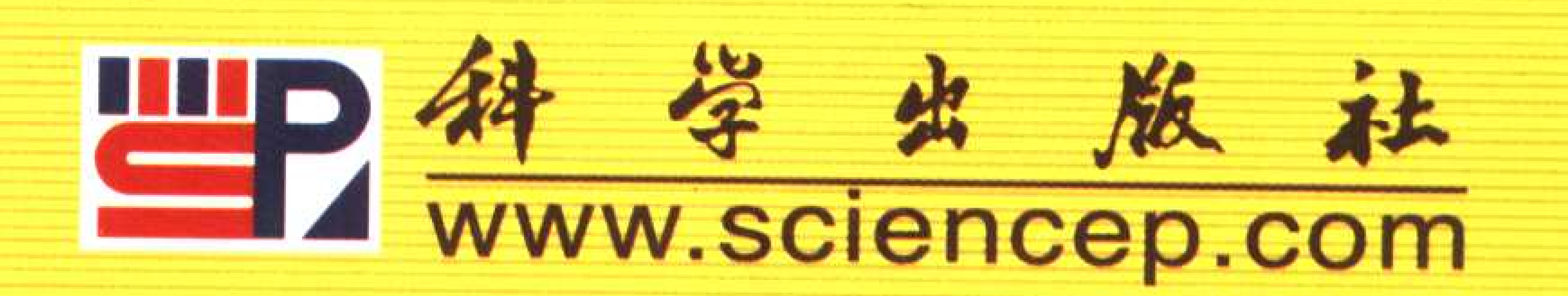
现代数学基础丛书 118

拓扑动力系统概论

叶向东 黄文 邵松 著



(O-2991.0101)



销售分类建议：高等数学

定　价：56.00 元

内 容 简 介

本书不仅系统介绍了拓扑动力系统的基本概念和结果，而且包含了近年来本领域的最新进展. 全书共有拓扑动力系统基础、遍历论基础、等度连续性与 Ellis 半群理论、族与弱不交、熵、熵与局部化、序列熵与局部化、传递系统的分类、不交性以及混沌等 10 章内容. 本书强调拓扑动力系统与遍历理论的关联、回复时间集与局部化思想的体现、代数方法在拓扑动力系统中的作用以及拓扑动力系统在诸如组合数论等其他数学分支上的应用等. 内容由浅入深，难易兼顾，充分反映最新成果，并配有大量例子与习题.

本书可作为高等院校数学系高年级本科生和研究生教材或教学参考书，也可供一般数学工作者、物理工作者和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑动力系统概论/叶向东，黄文，邵松著. —北京：科学出版社，2008
(现代数学基础丛书；118)
ISBN 978-7-03-020569-8
I. 拓… II. ① 叶… ② 黄… ③ 邵… III. 拓扑-动力系统 IV. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 009723 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超／责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 3 月第一次印刷 印张：21
印数：1—3 000 字数：391 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

引　言

动力系统的研究可以追溯到牛顿 —— 创立微积分、建立三大运动定律以及万有引力定律的非凡科学家. 在牛顿的体系中, 以时间为参变量的微分方程占据了主导地位. 牛顿的经典著作《自然哲学的数学原理》在接下来的两个世纪中成为人们研究天体问题的典范, 人们甚至乐观地认为可以像牛顿顺利解决二体问题那样, 通过求出微分方程的显式解来处理任何天体问题. 遗憾的是, 这种愿望从未实现.

到了 19 世纪末, 情况发生了一个质的转折. 著名的法国数学家 Poincaré 出版了《天体力学的新方法》. 一个重要的转变在于他将相空间的几何 —— 系统参数向量所有可能值的空间引入分析过程, 将人们的注意力从方程的单个解转移到所有可能的解曲线及其相互关系上来. 这种方法对单个解不能提供太多信息, 却能得到一些甚至大部分解曲线的信息. 运用颇具遍历论味道的方法, Poincaré 说明了对所有有界 Hamilton 系统, "大部分" 解曲线在 Poisson 意义下是稳定的.

随着 Poincaré 定性分析方法的引入, 动力系统研究的焦点从以微分方程定义系统的模式转到相空间与作用群上. Birkhoff 的工作无疑使这种转变更加明朗化. 在其著作《动力系统》(1927) 中, 他以一般度量空间上的群作用作为动力系统研究众多动力学性质. 特别地, 他在这个一般范畴下重建了前面提到的 Poincaré 的结论.

最终两个重要的分支从研究中衍生出来: 拓扑动力系统和遍历理论. 本书主要研究拓扑动力系统, 其底空间一般假设为紧致度量空间, 以半群 $\mathbb{Z}_+$ 作用于其上. 而在遍历理论中, 一般取 Lebesgue 空间为底空间. 拓扑动力系统的研究与诸如遍历理论、拓扑群、一般拓扑、组合、数论、代数、泛函分析等其他数学分支密切联系在一起.

与拓扑动力系统联系最为紧密的莫过于遍历理论, 这两套理论有着惊人的平行性. 一方面, 拓扑动力系统可以自然地视为一个保测系统 (因为对于许多作用群, 系统存在不变测度); 另一方面, 任何遍历系统有其拓扑表示. 在这两套理论中有着许多相对应的概念, 例如, 遍历–极小性、离散谱–等度连续、测度熵–拓扑熵等. 这些因素导致了这两套理论中的许多结论有着极为相似的陈述, 但是各自的证明方法却可能完全不一样, 而且大多没有互通之处. 在本书中, 我们将十分注重两套理论的相似性, 也强调它们在组合数论中的应用.

运用回复时间集以及局部化的思想来研究拓扑动力系统, 是近年来研究工作中的两个特点. 运用回复时间集来研究动力系统起源于 Gottschalk, Furstenberg 等人的工作. 例如, Gottschalk 证明了紧致度量空间中的一个点为几乎周期的当且仅当

这个点回复到自己任何邻域的时间集为 syndetic 的; Furstenberg 证明了一个拓扑动力系统为弱混合的当且仅当任何非空开集到另一个非空开集的碰撞时间集为 thick 的等. Akin 在他们的基础上发展了上述思想, 形成了族 (满足一定条件的 $\mathbb{Z}_+$ 的子集族) 的初步理论. 近年来, 族的理论被 Glasner, Weiss 及本书作者等进一步拓展.

局部性质的研究在拓扑动力系统一般性理论中很早就有体现, 例如 proximal 对、distal 对等. 这些局部性质也最终反映了系统的全局性质, 例如, 一个拓扑动力系统为等度连续的当且仅当其局部 proximal 关系为对角线, 它为 distal 的当且仅当其 proximal 关系为对角线. 最近, 为得到遍历理论中 Kolmogorov 系统的拓扑对应, Blanchard 等人局部化了拓扑熵、测度熵等概念. 事实证明, 这种做法非常有效. 例如, 利用这种思想人们证明了极大零熵因子的存在性、局部变分不等式等结论. 稍后, 这些概念从熵对推广到熵串 (Huang-Ye, 2006)、熵集 (Dou etc., 2006a)、熵点 (Ye-Zhang, 2007), 经典的熵的变分原理也推广到了局部形式 (Glasner-Weiss, 2004).

在拓扑动力系统方面有着许多优秀的专著, 如文献 (Gottschalk-Hedlund, 1955; Ellis, 1969; Bronstein, 1979; Veech, 1977; Furstenberg, 1981; Woude, 1982; Auslander, 1988; Vries, 1993; Akin, 1997; Weiss, 2000b; Glasner, 1976, 2003). 本书不同于上述书籍的地方在于, 我们主要立足于以下三个方面的思想: 遍历理论与拓扑动力系统概念和结果的相似性、系统回复时间集与系统的动力学性质紧密相连以及动力学性质的局部化与全局性质紧密相连. 另外, 本书还包含了最近几年拓扑动力系统一些新的重要研究成果. 除了上面提到的三个侧重点外, 我们也注意体现一些经典方法 (如 Ellis 半群理论) 的应用, 以及强调拓扑动力系统与其他数学分支的关联. 另外, 读者不难发现 Furstenberg 及其学派的思想对本书的影响, 其获 Wolf 奖的重要工作之一 —— 极小 distal 流的结构定理和 Szemerédi 定理的遍历理论的证明也在本书中作了简单介绍.

本书共分 10 章. 在第 1, 2 章给出拓扑动力系统和遍历理论的一些基本概念及定理. 在此过程中, 我们强调二者结论的相似性. 与此同时, 我们尽可能多地给出本书中所涉及的概念, 以便在后文中详细论述时, 读者不会太陌生. 特别地, 我们介绍了许多族及其与动力学性质的联系. 另外, 我们还分别介绍了拓扑动力系统以及遍历理论中的多重回复定理, 并运用它们给出著名的 van der Waerden 定理和 Szemerédi 定理的证明, 用以体现动力系统在组合数论中的应用.

第 3 章研究动力学性状相对简单的系统: 等度连续系统、distal 系统以及相关推广, 其中对几乎等度连续系统进行了颇为细致的讨论, 给出它与初值敏感和单生群之间的联系. 另外, 在研究等度连续系统的同时也讨论了各种 distal 性质, 其中拓扑动力系统的代数方法 ——Ellis 半群理论发挥了重要作用. 最后, 我们证明了著名的极小 distal 流的 Furstenberg 结构定理, 以此指出 distal 系统与等度连续系统的关系, 并引出一般极小流结构定理的陈述.

第 4 章系统研究族及其性质. 首先, 系统地介绍了族的概念, 更为深入地讨论其与动力系统性质的联系. 然后, 将传递与混合的概念推广到族传递与族混合, 并且讨论它们的基本性质. 本章还将证明关于族的动力系统实现的重要定理：Weiss-Akin-Glasner 定理. 最后, 在族传递的范畴下讨论了对偶问题.

接下来的三章将介绍拓扑动力系统和遍历理论中的熵理论. 首先, 第 5 章介绍熵的基本概念以及基本性质, 也细致讨论了 Pinsker σ 代数以及 Kolmogorov 系统等理论. 这些是经典熵理论的基本组成部分.

第 6 章给出熵的局部化理论. 首先, 运用局部化思想讨论拓扑 Kolmogorov 系统. 而后给出了 Glasner 和 Weiss 最近关于熵的局部变分原理的证明 (Glasner-Weiss, 2004). 最后讨论拓扑和测度熵串等概念, 给出二者之间的变分关系.

第 7 章系统讨论序列熵的性质与应用. 首先证明了 Kushnirenko 定理, 即保测系统具有离散谱当且仅当对任意无限序列, 其序列熵为零. 然后分别在拓扑动力系统和遍历论中, 运用序列熵刻画各种混合性. 这里再次展现了两个分支的结论表述的相似性. 最后, 将序列熵局部化, 给出序列熵对的概念, 结合极小流结构定理给出拓扑 null 系统的结构. 由于这一章用 Koopman-von Neumann 定理讨论了谱性质, 所以在本章附录中给出这个定理的证明.

有了前面的准备, 接下来的三章分别讨论传递系统的分类、不交性以及混沌这三个拓扑动力系统的重要主题. 第 8 章考虑传递系统分类问题. 首先, 引入沿序列的复杂性函数给出诸如满扩散、极端扩散、强扩散、扩散、弱扩散的刻画. 然后结合弱不交以及回复时间集 (运用族的方法) 对传递系统的分类问题进行讨论. 最后, 给出具体的例子以区分若干不同的概念.

第 9 章研究不交性. 首先给出基本的概念和性质, 并在此基础上证明了若干重要的不交性定理. 然后讨论不交性和弱不交性之间的联系, 细致地研究了与所有极小系统不交的系统的性质. 最后给出在极小系统中不交的代数刻画并讨论了伪因子.

最后一章讨论混沌. 从 20 世纪 60 年代以来, 确定论的科学观开始动摇, 人们开始探索科学上那些不可预测的现象, 使混沌科学得到飞速发展. 1975 年, Li 与 Yorke 发表了《周期三蕴含混沌》的文章, 在数学中第一次引入了“混沌”这个名词 (Li-Yorke, 1975). 之后, 不同领域的科学家基于自己对混沌的理解, 给出了许多混沌的不同定义. 我们将讨论 Li 与 Yorke 混沌、Devaney 混沌、正熵以及混合性之间的相互关系, 证明 Devaney 混沌、正熵以及混合性都蕴含 Li 与 Yorke 混沌.

本书可作为动力系统方向的研究生教材, 也可作为对拓扑动力系统和遍历理论感兴趣的数学工作者的参考书. 本书的内容可用于拓扑动力系统和遍历理论研究生课程的教学. 在本书中, 我们尽可能使内容自封闭, 但在选材上受限于作者的兴趣、能力以及书的篇幅, 无法面面俱到. 正因为如此, 动力系统的重要研究领域, 例如微分动力系统、Hamilton 系统、随机动力系统、微分方程的定性理论以及在本

书中没有用到的遍历理论和 Ellis 半群知识等都不在本书的讨论范围. 另外, 拓扑动力系统中像可扩性、吸引子、不动点理论、伪轨跟踪 (POTP)、一维动力系统、剩余 (residual) 熵、轨道等价、刚性、与分形几何的联系、相对情况的研究、一般的群作用等重要内容也无法在本书中涉及. 同时, 由于相关研究方向正在快速发展之中, 我们也无法收入一些预印本中的重要工作. 有兴趣的读者可在相关章节的注记中找到简单的介绍.

本书的第 1, 2 章是拓扑动力系统和遍历理论的基础知识, 读者在阅读中不会遇到困难. 对于不太熟悉 Ellis 半群的读者, 可以跳过第 3 章、第 6 章和第 9 章的部分内容, 不会影响到对全书内容的把握. 对于不太熟悉遍历理论的读者, 在阅读中遇到的困难是第 5 章的部分内容以及第 6 章和第 7 章的大部分内容, 对动力系统局部性质的理解可能会有些影响.

本书是作者在中国科学技术大学数学系多年从事拓扑动力系统和遍历理论的研究生课程和讨论班教学的基础上形成的, 其中部分章节曾用于 2004 年 5 月中国科学院晨兴数学中心面向研究生的十余次报告. 本书的第 1, 2, 8 章由叶向东执笔, 第 5~7 章由黄文执笔, 第 3, 4, 10 章由邵松执笔, 第 9 章由叶向东和邵松共同执笔. 初稿完成后, 作者进行了近两年的修改并在中国科学技术大学数学系的研究生课上进行了试讲. 尽管如此, 书中肯定还存在许多不足和笔误, 希望读者不吝指教. 作者衷心感谢张景中、杨路和熊金城先生共同为中国科学技术大学的动力系统研究打下的基础. 我们感谢中国科学技术大学动力系统研讨班的董攀登、窦斗、方春、胡泊、李思敏、鲁平、吕杰、匡锐、史恩慧、孙太祥、苏勇、叶盛、张国华、张鹏飞、张瑞丰、张伟和张玉成等人的积极参加, 以及对书稿的改进提出的有益意见, 尤其是张国华和张鹏飞同学仔细地阅读了本书的若干章节, 指出其中的笔误并提出修改意见. 同时, 非常感谢科学出版社对我们的大力支持.

最后, 衷心感谢家人、朋友、同事对我们长期的支持.

路漫漫其修远兮, 吾将上下而求索.

作　者

2007 年 1 月 30 日

于中国科学技术大学数学系

符号约定

本书用 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别表示自然数、整数、实数、复数集合. 而记 $\mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{Z}_-$ 为非负整数全体和非正整数全体, $\mathbb{R}_+$ 及 $\mathbb{R}_-$ 为非负实数和非正实数全体.

以 $\varnothing$ 记空集. 设 A, B 为集合 X 的子集, 定义差集 $B \setminus A$ 为 $\{x \in X : x \in B, x \notin A\}$, 而定义对称差集 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. 记 A 的补集为 A^c. 对于集合 A, 记它的势为 $|A|$ 或 $\mathrm{Card}A$.

设 X 为拓扑空间, A 为 X 子集. A 的闭包记为 $\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}(A)$, A 的内点集记为 $\mathring{A}$ 或 $\mathrm{int}(A)$. 如果 d 为 X 的度量, 对 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 令 $B_\varepsilon(x) = B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$. 对于子集 A 的直径用符号 $\mathrm{diam}A$ 表示.

设 $\{X_i\}_{i \in I}$ 为一族拓扑空间, 其中 I 为指标集. 记这族空间的乘积空间为 $\prod_{i \in I} X_i$, 尤其 $I = \mathbb{N}$ 时记为 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. 用 $p_n : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_n$ 表示到 X_n 的投射. 如果对任意 i 都有 $X_i = X$, 那么直接记 $\prod_{i \in I} X_i$ 为 $\prod_{i \in I} X$ 或 X^I. 特别地, 对拓扑空间 X, 其 n 次乘积空间记为 $X^n = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n\text{ 次}}, n \in \mathbb{N}$.

设 $T : X \to X$ 为映射, $n \in \mathbb{N}$, 记 $T^{(n)} = \underbrace{T \times T \times \cdots \times T}_{n\text{ 次}}$. 对自然数 n, 定义 T 的 n 次迭代为 $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n\text{ 次}}$, 并约定 $T^0 = \mathrm{id}$ (其中 id 表示恒同映射).

"$\exists$" 表示 "存在"; "$\forall$" 表示 "对任意的"; "s.t." 表示 "使得"; "$\Rightarrow$" 表示 "推出".

目　　录

第 1 章　拓扑动力系统基础

一般而言, 拓扑动力系统研究的是拓扑群在拓扑空间上作用的定性性质. 在这一章中我们将介绍一些拓扑动力系统的基本概念, 如传递性、极小性、混合性以及其他回复属性等, 也将证明 Birkhoff 回复定理及其推广 —— 多重 Birkhoff 回复定理, 并且作为应用, 用它证明 van der Waerden 定理. 另外, 在整个论述中, 我们将突出非负整数集 $\mathbb{Z}_+$ 的子集与动力学性质的关联.

§1.1　基 本 概 念

设 X 为紧致的 Hausdorff 空间, G 为拓扑群, 如果 $\phi: G\times X \to X$ 连续且满足:

(1) 对任意 $x\in X$, 有 $\phi(e,x)=x$, 其中 e 为 G 的单位元;

(2) 对任意 $x\in X$ 和 $g_1,g_2\in G$, $\phi(g_1,\phi(g_2,x))=\phi(g_1g_2,x)$ 成立.

那么就称 (X,G,ϕ) 为一个**拓扑动力系统**. 一般地, 也直接用 (X,G) 记一个拓扑动力系统. 易见, 此时对于每个 $g\in G$, $\phi(g,\cdot): X\to X$, $x\mapsto\phi(g,x)$ 为同胚. 为方便计, 有时将 $\phi(g,x)$ 简记为 gx. 当 X 为独点集时, 称系统 (X,G) 为**平凡系统**.

如果 $G=\mathbb{R}$ 为实数加群, 也称 $(X,\mathbb{R})$ 为一个**流**. 如果 $G=\mathbb{Z}$ 为整数加群, 那么称 $(X,\mathbb{Z})$ 为一个**离散动力系统**.

设 $T: X\to X$ 为一个同胚, 可以定义 $\phi:\mathbb{Z}\times X\to X$, 使得 $\phi(n,x)=T^n(x)$. 于是 $(X,\mathbb{Z},\phi)$ 成为一个离散动力系统. 反之, 如果 $(X,\mathbb{Z},\phi)$ 为一个离散动力系统, 那么 $T: X\to X$, $x\mapsto\phi(1,x)$ 为一个同胚, 且对任意 $x\in X$ 及 $n\in\mathbb{Z}$, 有 $\phi(n,x)=T^n(x)$. 正因为如此, 一般直接以 (X,T) 表示离散动力系统.

如果在上面的定义中以非负整数加法半群 $\mathbb{Z}_+$ 替代 G, 那么称 $(X,\mathbb{Z}_+,\phi)$ 为一个**半离散动力系统**. 利用类似的讨论可以看出, 一个半离散动力系统可以由一个连续映射生成. 在本书中, 这是我们讨论的主要对象.

设 (X,G) 为动力系统. 对 $x\in X$, 称 $\mathrm{orb}(x,G)=\{gx: g\in G\}$ 为 x **的轨道**. 设 A 为 X 的子集, 如果 $gA=\{gx: x\in A\}\subseteq A, \forall g\in G$, 则称 A 为**不变集**. 如果 $A\subseteq X$ 为闭的不变集, 则将群作用限制在 A 上也成为一个动力系统, 称之为 (X,G) 的**子系统**, 记为 (A,G,ϕ). 对任意 $x\in X$, 易见 $\overline{\mathrm{orb}(x,G)}$ 为闭的不变集, 进而 $(\overline{\mathrm{orb}(x,G)},G)$ 是 (X,G) 的一个子系统. 这是一个常用的构造新动力系统的方法. 设 (X,G) 和 (Y,G) 为两个动力系统, 定义它们的**乘积系统**为 $(X\times Y,G)$, 其中 $g(x,y)=(gx,gy),\forall g\in G$. 任意多个系统的乘积系统可以类似的定义.

就像别的数学分支一样, 拓扑动力系统的一个中心问题便是系统的分类. 于是一个自然的问题是: 两个拓扑动力系统何时是"一样的"? 在一般拓扑学中, 两个拓扑空间如果同胚, 那么我们认为它们是一样的; 而在代数中, 两个群如果为同构的, 那么认为它们是一样的. 在拓扑动力系统中, 有如下定义.

定义 1.1.1　设 (X_1, G, ϕ_1) 和 (X_2, G, ϕ_2) 为两个拓扑动力系统. 如果存在一个连续满射 $\pi: X_1 \to X_2$, 使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g} & X_1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ X_2 & \xrightarrow{g} & X_2 \end{array}$$

即 $\pi(gx) = g(\pi x)$, $\forall g \in G$, $\forall x \in X_1$, 那么就称 (X_1, G, ϕ_1) 为 (X_2, G, ϕ_2) 的一个**扩充**, 或者称 (X_2, G, ϕ_2) 是 (X_1, G, ϕ_1) 的一个**因子**. 此时称 π 为一个**因子映射** 或称为**半共轭**. 如果 π 为同胚, 就称 (X_1, G, ϕ_1) 和 (X_2, G, ϕ_2) 为**共轭的**.

在拓扑动力系统中, 两个系统如果为共轭的, 我们就认为它们是"一样的". 于是, 寻求共轭不变量是拓扑动力系统的一个重要主题.

在本书中, 如非特别指出, 一般研究 $\mathbb{Z}_+$ 作用下的系统. 即我们所指的拓扑动力系统是指偶对 (X, T), 其中 X 为紧度量空间而 $T: X \to X$ 为连续映射. 由于此时为半群作用, 所以上面的某些定义有些细微的差别.

对 $x \in X$, 称 $\mathrm{orb}(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \cdots\}$ 为 x **的轨道**. 设 A 为 X 的子集, 如果 $T(A) \subseteq A$, 则称 A 为**正不变集**或**不变集**; 如果 $T^{-1}A \subseteq A$, 则称 A 为**负不变集**; 如果 $T(A) = A$, 则称 A 为**强不变集**. 如果 $A \subseteq X$ 为闭的不变集, 则 $(A, T|_A)$ 也成为一个动力系统, 称之为 (X, T) 的**子系统**, 有时就直接将它记为 (A, T). 对任意 $x \in X$, 易见 $\overline{\mathrm{orb}(x, T)}$ 为闭的不变集, 进而 $(\overline{\mathrm{orb}(x, T)}, T)$ 是 (X, T) 的一个子系统.

当考虑两个半离散动力系统 (X, T) 和 (Y, S) 时, 因子映射 $\pi: X \to Y$ 就是满足 $\pi \circ T = S \circ \pi$ 的连续满射. 下面给出因子映射的等价描述.

设 (X, T) 为动力系统. 我们可以将 $X \times X$ 的子集 R 视为 X 上的一个关系. 如果 R 为 $X \times X$ 的闭子集, 就称 R 为**闭关系**; 如果 $(T \times T)(R) \subset R$, 就称关系 R 为**不变的**. 设 $R \subset X \times X$ 为 X 上闭的不变的等价关系. 对 $x \in X$ 考虑 x 所在的等价类 $[x]_R = \{y \in X : (x, y) \in R\}$. 所有的这些等价类形成了一个新的空间 $X/R = \{[x]_R : x \in X\}$, 如果 X/R 的拓扑取商拓扑, 则 X/R 为紧度量空间. 映射 T 自然地诱导了 X/R 上的连续映射 $T_R: [x]_R \to [Tx]_R$, 从而 $(X/R, T_R)$ 为动力系统. 设 $\pi: X \to X/R$ 为商映射, 则 $\pi: (X, T) \to (X/R, T_R)$ 为因子映射且 $R_\pi = \{(x, y) \in X \times X : \pi(x) = \pi(y)\} = R$.

反之, 设 $\pi: (X, T) \to (Y, S)$ 为因子映射, 通过 π 可以定义 X 上的一个闭的不

变的等价关系：

$$R_\pi = \{(x,y) \in X \times X : \pi(x) = \pi(y)\}.$$

易见 $(X/R_\pi, T_{R_\pi})$ 拓扑共轭于 (Y,S). 因此，在把拓扑共轭的两个动力系统不加区分的意义下，有

命题 1.1.2 *设 (X,T) 为动力系统. 则 (X,T) 的因子系统一一对应于 X 上闭的不变的等价关系.*

另外注意到，如果 $T : X \to X$ 为连续的，那么 $T : \bigcap_{i=0}^\infty T^i(X) \to \bigcap_{i=0}^\infty T^i(X)$ 为满的. 后面我们会看到，实际上一个系统几乎所有的动力学性状都集中体现在 $\bigcap_{i=0}^\infty T^i(X)$ 上，所以我们经常在系统 (X,T) 定义中假设映射 T 为满射.

将半离散系统与离散系统联系在一起的一个桥梁是所谓的**自然扩充**. 设 $T : X \to X$ 为连续满的自映射. 设

$$\widetilde{X} = \left\{(x_1, x_2, \cdots) \in \prod_{i=1}^\infty X : Tx_{i+1} = x_i,\ i \geqslant 1\right\}.$$

作为乘积空间 $\prod_{i=1}^\infty X$(取乘积拓扑) 的子集，$\widetilde{X}$ 是非空闭的. 如果定义 $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$，使得

$$\widetilde{T}(x_1, x_2, \cdots) = (Tx_1, x_1, x_2, \cdots).$$

那么 $\widetilde{T}$ 为同胚. 易见对每个 $n \in \mathbb{N}$，向第 n 分量的投影映射 $p_n : \widetilde{X} \to X$ 为连续满射. 尤其 p_1 为 $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ 到 (X,T) 的因子映射.

自然扩充 $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ 是可逆系统，它保持了 (X,T) 几乎所有的动力学性质. 在许多情形下，我们的结论首先是对可逆系统证明的，然后通过其自然扩充将一般情形转化为可逆的情况来获得相应的结论. 这是一种十分常用的技巧.

习 题 1.1

证明：一个子集为正不变的当且仅当它的补集为负不变的；一个强不变集为正不变的，但不一定为负不变的，除非 T 为单射；一个既是正不变又是负不变的子集 (例如 X) 不一定为强不变的，除非 T 为满射；当 T 为同胚时，集 A 为强不变集当且仅当它既为正不变集又为负不变集.

§1.2 传 递 性

回复性是十分重要的动力学性质. 这是因为在研究自然现象时，那些可以重复观察的现象才是我们最关心的. 从这节开始，我们将研究各种回复性质.

定义 1.2.1 *设 (X,T) 为动力系统，$x \in X$.*

*(1) 如果 $Tx = x$，那么点 $x \in X$ 称为***不动点***；*

(2) 如果存在某个 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $T^n x = x$ 成立, 那么点 $x \in X$ 称为**周期点**, 而满足 $T^n x = x$ 最小的自然数 n 称为 x 的**周期**.

用 $\mathrm{Fix}(X,T)$表示系统 (X,T) 的不动点全体, 用 $\mathrm{Per}(X,T)$ 表示系统 (X,T) 的周期点全体.

在下面的定义中, 如果空间确定并且不会引起混淆, 我们经常会省略空间记号. 例如把上面 $\mathrm{Fix}(X,T), \mathrm{Per}(X,T)$ 直接记为 $\mathrm{Fix}(T)$ 和 $\mathrm{Per}(T)$.

设 x 为以 n 为周期的周期点, 那么 $(\{x, Tx, \cdots, T^{n-1}x\}, T)$ 成为一个动力系统. 这是一类最简单的动力系统, 并且每个点都是周期回复的.

对 $x \in X$, 定义 **x 的 ω 极限集** $\omega(x,T)$为 $\mathrm{orb}(x,T)$ 的全体极限点集, 即

$$\omega(x,T) = \{y \in X : \exists n_i \to +\infty \text{ s.t. } T^{n_i}x \to y\} = \bigcap_{n \geqslant 0} \overline{\bigcup_{k \geqslant n} \{T^k x\}}.$$

如果 $U,\ V \subset X$, 定义**回复时间集**为

$$N(U,V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : U \cap T^{-n}V \neq \varnothing\}.$$

定义 1.2.2　称动力系统 (X,T) 或 T 为**传递的**是指对 X 的任意两个非空开集 $U,\ V$, 有 $N(U,V) \neq \varnothing$. 如果存在点 $x \in X$ 满足 $\overline{\mathrm{orb}(x,T)} = X$, 那么称 (X,T) 为**点传递的**, 而称 x 为一个**传递点**. X 的全体传递点记为 Trans_T .

注记 1.2.3　(1) 传递与点传递是不同的概念. 反例如下:

设 $X = \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\right\}$(取 $\mathbb{R}$ 的遗传拓扑), 而 $T: X \to X$ 定义为 $T(0) = 0, T\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1}$. 于是 $\mathrm{Tran}_T(X) = \{1\}$, 但 (X,T) 不是拓扑传递的.

设 $g: I \to I$, 其中 $I = [0,1]$, $g(x) = 1 - |2x - 1|$ 为帐篷映射. 则 $\overline{\mathrm{Per}(g)} = I$(张景中等, 1992). 令 $X = \mathrm{Per}(g)$ 及 $f = g|_{\mathrm{Per}(g)}$. 于是 (X,f) 为传递但不为点传递的.

(2) 易证: 如 X 没有孤立点, 则点传递推出传递; 当 X 是任意一个拓扑空间, T 是其上的一个连续自映射, 我们也可类似地引入传递和点传递的概念, 不难验证, 如果 X 为可分的第二纲集, 则传递推出点传递. 由于在定义一个动力系统 (X,T) 时我们已经假设 X 为紧度量的, 于是对一个动力系统而言总有传递推出点传递, 而如果再加上没有孤立点, 则两概念等价.

(3) 需要注意的是, 如果 T 为传递的, 那么 T 为满射, 并且 $\overline{\mathrm{orb}(x,T)} = X$ 当且仅当 $\omega(x,T) = X$. 记 $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的全体无限子集组成的集合. 易证, (X,T) 为传递的当且仅当对任意非空开集 U, V, $N(U,V) \in \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ 成立.

现在给出传递性的一些等价命题:

定理 1.2.4　设 (X,T) 为动力系统, 则以下命题等价:

(1) (X,T) 为传递的;

(2) 对每个非空开集 U, $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-n}U$ 稠密;

(3) 如果 U 为满足 $T^{-1}U \subset U$ 的非空开集, 则 U 为稠密的;

(4) 如果 E 为闭不变的, 那么或者 $E = X$, 或者 E 为无处稠密的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 U 为满足 $T^{-1}U \subset U$ 的非空开集. 则 $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}U = U$. 于是由条件 (2) 知 U 为稠密的.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 $U = X \setminus E$, 则 $T^{-1}U \subset U$. 于是或者 U 为空集或者 U 稠密. 等价地, 或者 $E = X$ 或者 E 无处稠密.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 U, V 为 X 的非空开集. 令 $E = X \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}U$. 于是 E 为无处稠密的, 即 $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}U$ 为稠密的. 从而有 $V \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}U \neq \varnothing$. 这样存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $V \cap T^{-n}U \neq \varnothing$, 即 (X, T) 为传递的. □

设 $\pi : X \to Y$ 为 (X, T) 到 (Y, S) 的因子映射, π 为**极小的**是指 X 为唯一满足 $\pi(A) = Y$ 的非空闭不变子集 A. 有

定理 1.2.5 设 $\pi : X \to Y$ 为 (X, T) 到 (Y, S) 的因子映射, 则

(1) 如果 (X, T) 为传递的, 那么 Trans_T 为 X 的稠密 G_δ 子集;

(2) 如果 T 为传递的, 那么 S 也是传递的, 且 $\mathrm{Trans}_T \subset \pi^{-1}(\mathrm{Trans}_S)$. 如果 π 还为极小的, 则等号成立.

证明 (1) 设 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X 的一组基, 那么有

$$\mathrm{Trans}_T = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n} U_i \right).$$

因为 (X, T) 为传递的, 所以对每个 $i \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}U_i$ 为 X 的稠密开集. 由 Baire 定理, Trans_T 为 X 的稠密 G_δ 集.

(2) 前半部分易证, 我们证后半部分. 设 π 为极小的且 $y \in \mathrm{Trans}_S$, 于是对任意 $x \in \pi^{-1}(y)$ 有 $\pi(\overline{\mathrm{orb}(x, T)}) = Y$. 根据 π 的极小性, 就有 $\overline{\mathrm{orb}(x, T)} = X$, 即 $x \in \mathrm{Trans}_T$. □

与传递性紧密联系在一起的一个概念是回复点.

定义 1.2.6 $x \in X$ 称为一个**回复点**是指存在序列 $n_i \to +\infty$, 使得 $T^{n_i}x \to x$, 即 $x \in \omega(x, T)$. 以 $\mathrm{Rec}(T)$ 记全体回复点的集合.

一个重要的事实是, 如果 x 为回复点, 那么 $(\overline{\mathrm{orb}(x, T)}, T)$ 为传递系统; 对传递系统 (X, T), 有 $\mathrm{Trans}_T \subset \mathrm{Rec}(T)$. 下面著名的 Birkhoff 定理说明对动力系统, 回复点总是存在的.

定理 1.2.7 (Birkhoff 定理) 每个动力系统都存在回复点.

令人吃惊的是, 即便这样一个似乎很简单的命题, 以往的证明不是需要 Zorn 引理就是要用到遍历论的方法. 读者可以试着用 Zorn 引理给出一个证明, 我们将在

下一节给出一个构造性证明 (Weiss, 2000b).

明显地, $\mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{Rec}(T)$. 如果 x 是周期为 n 周期点, 那么 $(\{x, Tx, \cdots, T^{n-1}x\}, T)$ 为传递系统. 为得到更多传递系统的例子, 我们先介绍**符号系统**的概念.

设 $k \geqslant 2$ 为自然数且记 $A = \{0, 1, \cdots, k-1\}$. 称 A 中元素为**字母**. 赋予 A 以离散拓扑, 而

$$\Sigma_k = \prod_{i=1}^{\infty} A = \{(x_1, x_2, \cdots) : x_i \in A, i \in \mathbb{N}\}$$

取乘积拓扑. 则 Σ_k 为紧致可度量空间, 一个相容的度量为

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x = y, \\ \dfrac{1}{i}, & \text{如果 } x \neq y \text{ 且 } i = \min\{j : x_j \neq y_j\}. \end{cases}$$

定义 $T : \Sigma_k \to \Sigma_k$, 使得对每个 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \Sigma_k$,

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots).$$

易见 T 为连续的满射, 称 (Σ_k, T) 或 T 为**全转移**或直接称之为转移. 如果 Y 为 Σ_k 的非空闭正不变子集, 那么称 (Y, T) 为**子转移**. 易见 $\mathrm{Per}(T)$ 在 Σ_k 中稠密.

每个 $B \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ 称为一个**块**或者一个**词**, 其中 $A^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为 n 词全体. 称词 B 在 $x \in \Sigma_k$ 的第 i 个位置处**出现**是指存在 $j \geqslant i$, 使得 $B = (x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j)$. 如果 B, C 为两个词, 那么 BC 表示一个新的词 $(b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_m)$, 其中 $B = (b_1, \cdots, b_n)$ 且 $C = (c_1, \cdots, c_m)$. 为方便起见, 分别记 $B \cdots B$ (n 个) 和 $BB\cdots$ 为 $B^{(n)}$ 和 B^{∞}. 对一个词 $B = (b_1, \cdots, b_n)$, 子集 $\{x \in \Sigma_k : x_1 = b_1, \cdots, x_n = b_n\}$ 称为一个**柱**, 记为 $[B]$. 首先有一个简单但重要的结论:

命题 1.2.8 *$x \in \Sigma_k$ 为回复点当且仅当每个 x 中的词在 x 中出现无限多次.*

下面举一个具体的例子.

例 1.2.9 设 $A_1 = (1), A_2 = (101), \cdots, A_{n+1} = A_n 0^{(n)} A_n$, 则 $x = \lim_{n\to\infty} A_n^{\infty}$ 为一个非周期点的回复点.

对于回复点集, 我们有如下基本性质:

定理 1.2.10 *设 $\pi : X \to Y$ 为 (X, T) 到 (Y, S) 的因子映射, 则*

(1) $T(\mathrm{Rec}(T)) = \mathrm{Rec}(T)$;

(2) $\mathrm{Rec}(T^n) = \mathrm{Rec}(T)$;

(3) $\pi(\mathrm{Rec}(T)) = \mathrm{Rec}(S)$.

证明 (1) 首先, 易验证 $T(\mathrm{Rec}(T)) \subset \mathrm{Rec}(T)$. 现在设 $x \in \mathrm{Rec}(T)$, 则存在序列 $n \to +\infty$ 使得 $T^{n_i}x \to x$. 由于 X 紧致, 不失一般性, 设 $T^{n_i-1}x \to y$. 于是 $T(y) = x$ 且 $T^{n_i}y = T^{n_i-1}x \to y$, 即 $y \in \mathrm{Rec}(T)$ 且 $T(y) = x$. 这样就有 $\mathrm{Rec}(T) \subset T(\mathrm{Rec}(T))$.

(2) 根据定义容易验证 $\mathrm{Rec}(T^n)\subset\mathrm{Rec}(T)$. 现在设 $x\in\mathrm{Rec}(T)$, 那么存在序列 $n_i\to+\infty$, 使得 $T^{n_i}x\to x$. 不失一般性, 可以假设 $n_i=k_in+j$, $0\leqslant j\leqslant n-1$. 于是 $x\in\overline{\mathrm{orb}(T^jx,T^n)}$, 进而 $\overline{\mathrm{orb}(x,T^n)}\subset\overline{\mathrm{orb}(T^jx,T^n)}$. 用 T^j 作用于此包含关系, 且注意到 $x\in\overline{\mathrm{orb}(T^jx,T^n)}$, 有

$$\overline{\mathrm{orb}(x,T^n)}\subset\overline{\mathrm{orb}(T^jx,T^n)}\subset\cdots\subset\overline{\mathrm{orb}(T^{(n-1)j}x,T^n)}\subset\overline{\mathrm{orb}(T^{nj}x,T^n)}.$$

于是 $x\in\overline{\mathrm{orb}(T^{jn}x,T^n)}$, 尤其有 $x\in\mathrm{Rec}(T^n)$. 这样就有 $\mathrm{Rec}(T)\subset\mathrm{Rec}(T^n)$.

(3) $\pi(\mathrm{Rec}(T))\subset\mathrm{Rec}(S)$ 是明显的. 现在设 $y\in\mathrm{Rec}(S)$ 且 $B=\omega(y,S)$. 则 $A'=\pi^{-1}B$ 为非空闭不变子集, 记 $\mathcal{A}$ 为满足 $\pi(A)=B$ 的 A' 的闭不变子集的全体. 由 Zorn 引理, 存在 $A\in\mathcal{A}$ 为包含关系下的极小元. 因为 $\pi(A)=B$, 所以存在 $x\in A$, 使得 $\pi(x)=y$. 根据 A 的选取, 有 $\omega(x,T)=A$, 尤其有 $x\in\mathrm{Rec}(T)$. 这样就完成了整个证明. □

一个动力系统称为**完全传递的**如果对任意 $n\in\mathbb{N}$, 系统 (X,T^n) 仍为传递的. 易见传递系统不必为完全传递的, 一个简单的例子为周期为 2 的周期轨. 一般而言有

定理 1.2.11 *设 (X,T) 为传递的动力系统及 $n\in\mathbb{N}$. 那么存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $k|n$ 且有分解*

$$X=X_0\cup X_1\cup\cdots\cup X_{k-1},$$

其中当 $i\neq j$ 时 $X_i\neq X_j$, (X_i,T^n) 为传递的且 $T(X_i)=X_{i+1(\mathrm{mod}\ k)}$.

证明 设 $x\in\mathrm{Trans}_T$, 则由定理 1.2.10, T^jx 为 T^n 的回复点, 其中 $0\leqslant j\leqslant n-1$. 令 $Y_j=\overline{\mathrm{orb}(T^jx,T^n)}$, 则 (Y_j,T^n) 为传递的且 $T(Y_i)=Y_{i+1(\mathrm{mod}\ n)}$. 设 k 为满足 $j\neq 0$ 和 $Y_0=Y_j$ 的最小自然数. 则易验证, $k|n$ 且当 $0\leqslant i<j\leqslant k-1$ 时, $Y_i\neq Y_j$. 于是 $X_j=Y_j$, $0\leqslant j\leqslant k-1$, 即为所求. □

对于一个动力系统 (X,T), 设 $x\in X$ 及 $U\subset X$, 令 x 进入 U 的**回复时间集**为

$$N(x,U)=\{n\in\mathbb{Z}_+:T^nx\in U\}.$$

从定理 1.2.10 看到, 如果 x 为回复点, 那么它也是 $T^n(n\in\mathbb{N})$ 的回复点. 由此可见回复点的回复时间集并不是任意的. 为刻画回复点的回复时间, 首先介绍一个概念:

定义 1.2.12 *$A\subset\mathbb{N}$ 为* **IP 集** *是指存在正整数序列 $p_1,p_2,\cdots$, 使得*

$$A=\{p_{i_1}+\cdots+p_{i_k}:i_1<\cdots<i_k,\ k\in\mathbb{N}\}.$$

*此时称 A 为由 $p_1,p_2,\cdots$ 生成的, 记为 $\mathrm{FS}(\{p_i\})$. 记集合 $\{A\subset\mathbb{N}:A$ 包含一个 IP 集$\}$为 $\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}$. $A\subset\mathbb{N}$ 称为*IP* **集** *是指 A 与任何 IP 集相交非空.*

需要注意的是, 在 IP 集的定义中, 并没有要求 p_i 为互异的.

定理 1.2.13　设 (X,T) 为动力系统. 如果 $x_0 \in \mathrm{Rec}(T)$, 那么对每个 $\delta > 0$, $N(x_0, B_\delta(x_0))$ 包含了一个 IP 集. 反之, 如果 $R \subset \mathbb{N}$ 为一个 IP 集, 那么存在传递系统 (X,T) 和 $x_0 \in \mathrm{Trans}_T$, 使得 $R \cup \{0\} \supset N(x_0, B_1(x_0))$.

证明　设 $x_0 \in \mathrm{Rec}(T)$ 及 $\delta > 0$. 取 p_1 满足

$$d(T^{p_1}x_0, x_0) < \delta. \tag{1.2.1}$$

取 $\delta_2 > 0$, 使得 $\delta_2 \leqslant \delta$ 且满足

$$d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow d(T^{p_1}x, x_0) < \delta. \tag{1.2.2}$$

对此 δ_2, 取 p_2, 使得

$$d(T^{p_2}x_0, x_0) < \delta_2. \tag{1.2.3}$$

由式子 (1.2.1)~(1.2.3) 就有

$$d(T^m x_0, x_0) < \delta \tag{1.2.4}$$

对 $m = p_1, p_2$ 及 $p_1 + p_2$ 均成立. 继续这个归纳过程. 假设 $p_1, \cdots, p_n$ 已经取定, 并且 (1.2.4) 式对所有 $m = p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, $k \in \mathbb{N}$ 均成立. 再取 $\delta_{n+1} \leqslant \delta$, 使得一旦 $d(x, x_0) < \delta_{n+1}$, 那么

$$d(T^m x, x_0) < \delta \tag{1.2.5}$$

对所有上述 m 成立. 于是, 如果取 p_{n+1}, 使得

$$d(T^{p_{n+1}}x_0, x_0) < \delta_{n+1}, \tag{1.2.6}$$

那么 (1.2.4) 将还对形如 $m + p_{n+1}$ 及 p_{n+1} 的指数成立. 这样就完成了归纳过程, 并且易见由 $p_1, p_2, \cdots$ 生成的 IP 集包含在 $N(x_0, B_\delta(x_0))$ 中.

反之, 设 $R \subset \mathbb{N}$ 为由 $p_1, p_2, \cdots$ 生成的 IP 集. 如果 $H_1, H_2, \cdots$ 为 $\mathbb{N}$ 互不相交的子集, 令 $p'_n = \sum\limits_{i \in H_n} p_i$, 那么由 $p'_1, p'_2, \cdots$ 生成的 IP 集为 R 的子集. 可以选取 H_n, 使得

$$p'_{n+1} > p'_1 + p'_2 + \cdots + p'_n.$$

这样, 不失一般性, 我们可以直接假设 $p_{n+1} > p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

在 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 中定义点 x_0, 使得

$$(x_0)_n = \begin{cases} 1, & \text{如果 } n = 0 \text{ 或者 } n \in R, \\ 0, & \text{如果 } n > 0 \text{ 并且 } n \notin R. \end{cases}$$

我们取度量为：当 $x=y$ 时，令 $d(x,y)=0$; 当 $x\neq y$ 且 $i=\min\{j:x_j\neq y_j\}$ 时，令 $d(x,y)=\frac{1}{i+1}$. 易见 x_0 为转移 T 的回复点，并且对 $n>0$，有

$$d(T^n x_0,x_0)<1\Leftrightarrow (T^n x_0)_0=1\Leftrightarrow (x_0)_n=1\Leftrightarrow n\in R.$$

由此，我们完成了整个证明. □

定义 1.2.14 设 X 为拓扑空间，$\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的子集族. 序列 $\{x_n\}$**依** $\mathcal{F}$ **收敛于** $x\in X$ (记为 $\mathcal{F}-\lim x_n=x$) 是指对 x 的任意邻域 U，有 $\{i:x_i\in U\}\in\mathcal{F}$ 成立.

最后再证明一个定理，进一步展示动力学性质与 $\mathbb{Z}_+$ 子集的关联.

定理 1.2.15 设 (X,T) 为动力系统，那么 (X,T) 有唯一回复点 x_0 当且仅当 $\mathrm{IP}^*-\lim T^n(x)=x_0$, $\forall x\in X$.

为证明定理 1.2.15，我们需要一些准备.

定义 1.2.16 设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的子集族，称 $\mathcal{F}$ 具有**Ramsey 性质**，如果 $F\in\mathcal{F}$ 且 $F=F_1\cup F_2$，则必有 $F_1\in\mathcal{F}$ 或 $F_2\in\mathcal{F}$ 成立.

下面的定理为组合数学中的一个著名的定理，在第 3, 4 章 (定理 3.3.18, 定理 4.1.8) 中我们会给出一个动力系统方法的证明.

定理 1.2.17 (Hindman 定理) $\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}$ 具有 Ramsey 性质.

对 $\mathbb{Z}_+$ 的子集 F 以及 $n\in\mathbb{Z}_+$，定义 $F-F=\{f_1-f_2\geqslant 1:f_1,f_2\in F\}$, $F+n=\{f+n:f\in F\}$ 及 $F-n=\{f-n\geqslant 1:f\in F\}$.

引理 1.2.18 设 (X,T) 为动力系统，$x\in X$ 及 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}$. 如果 K 为满足 $\{T^n(x):n\in F\}\subset K$ 的紧集，那么 $K\cap\mathrm{Rec}(T)\neq\varnothing$.

证明 令 $F_1=F$ 及 $K_1=\overline{\{T^n(x):n\in F_1\}}$. 取 $m_1\in\mathbb{N}$，使得 $(F_1-m_1)\cap F_1\in\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}$(请读者验证 m_1 的存在性). 对任意 $n\in(F_1-m_1)\cap F_1$，有 $T^n(x),T^{n+m_1}(x)\in K_1$. 于是 $K_1\cap T^{-m_1}K_1\neq\varnothing$. 令

$$K_1\cap T^{-m_1}K_1=\bigcup_{i=1}^{r_1}K_{1,i},$$

其中 $K_{1,i}$ 为满足 $\mathrm{diam}(K_{1,i})<\frac{1}{2}$ 的闭集 $(1\leqslant i\leqslant r_1)$. 设

$$C_{1,i}=\{n\in(F_1-m_1)\cap F_1:T^n(x)\in K_{1,i}\}.$$

则 $(F_1-m_1)\cap F_1=\bigcup_{i=1}^{r_1}C_{1,i}$. 于是由定理 1.2.17，存在 i_1，使得 $C_{1,i_1}\in\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}$.

令 $F_2=C_{1,i_1}$ 及 $K_2=K_{1,i_1}$. 则有 $K_2\subset K_1$, $\mathrm{diam}(K_2)<\frac{1}{2}$ 且 $T^{m_1}K_2\subset K_1$.

重复上面的讨论，得到一列集合 $F_n\in\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}$ 及闭集 K_n，使得对任意 $n\geqslant 2$，有 $K_n\subset K_{n-1}$, $\mathrm{diam}(K_n)<\frac{1}{n}$ 且 $T^{m_{n-1}}K_n\subset K_{n-1}$. 易见 $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ 为独点集，设为 y.

那么对任意给定的 j, 当 $k > j$ 时, 有

$$T^{m_j+\cdots+m_k}(y) \in K_j.$$

这就意味着 y 为回复点且 $y \in K_1 \subset K$. □

定理 1.2.15 的证明 设存在点 x_0, 使得对于任意 $x \in X$, 有 $\mathrm{IP}^*-\lim T^n(x) = x_0$ 成立. 如果 $x \in \mathrm{Rec}(T)$, U, V 分别为 x 和 x_0 的邻域, 则 $N(x,U) \in \mathcal{F}_{\mathrm{ip}}$ (定理 1.2.13) 且 $N(x,V)$ 为 IP^* 集. 于是 $N(x,U) \cap N(x,V) \neq \varnothing$. 由 U, V 的任意性就有 $x = x_0$.

反之, 假设 x_0 为唯一的回复点且 $x \in X$. 如果存在 x_0 的邻域 U, 使得 $N(x,U)$ 不是 IP^* 集, 那么存在 IP 集 F, 使得 $\{T^n(x) : n \in F\} \subset X \setminus U$. 设 $K = \overline{\{T^n(x) : n \in F\}}$, 根据引理 1.2.18, 有 $K \cap \mathrm{Rec}(T) \neq \varnothing$, 这与 x_0 为唯一的回复点矛盾. 证毕.

习 题 1.2

1. 证明: 如果 (X,T) 为传递系统, 那么 X 要么为有限集, 要么为不可数集.
2. 证明: 传递系统的自然扩充仍为传递系统.
3. 设 $g : I :\to I$, 其中 $I = [0,1]$, $g(x) = 1 - |2x-1|$ 为帐篷映射. 证明: $\overline{\mathrm{Per}(g)} = I$. 提示: 参见文献 (张景中等, 1992).
4. 验证例 1.2.9 为传递的.
5. 证明命题 1.2.8.
6. 给出定理 1.2.11 的详细证明.
7. 设 (X,T) 为传递系统, $x \in \mathrm{Trans}_T$ 且 U 为 x 的邻域. 证明 $N(U,U) = N(x,U) - N(x,U)$.
8. 证明: 一个 IP 集与一个 IP^* 集的交为无限子集.

§1.3 极 小 性

在本节中我们将讨论一类特殊的传递系统: 极小系统.

定义 1.3.1 动力系统 (X,T) 称为**极小的**是指它不真包含任何闭不变子集. 如果子系统 (Y,T) 为极小的, 那么称子集 Y 为 X 的**极小集**. 如果一个点包含在某个极小集中, 那么就称它为一个**极小点**.

在后面的某些章节中我们需要考虑一般群作用下的极小集. 它的定义是完全类似的. 设 (X,G) 为动力系统, 系统 (X,G) 为极小的是指它没有真的非空不变子集. 同样可以定义极小集和极小点. 下面的许多定理 (例如定理 1.3.2, 1.3.3 及 1.3.5) 对一般群作用系统仍成立, 请读者验证之.

易见, 如果两个子集 M_1 和 M_2 均为极小的, 那么或者 $M_1 = M_2$, 或者 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

定理 1.3.2 设 (X,T) 为动力系统, 则以下命题等价:

(1) (X,T) 为极小的;

(2) 对任何 $x \in X$, $\mathrm{orb}(x,T)$ 为稠密的;

(3) 对每个非空开集 U, 存在有限子集 $A \subset \mathbb{Z}_+$, 使得 $\bigcup_{n\in A} T^{-n}U = X$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $E = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-i}U$, 则 E 为闭不变的. 于是由假设 $E = \varnothing$, 根据 X 的紧性, 就有 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 E 为非空闭不变子集. 则 $U = X \setminus E$ 为开集且 $T^{-1}U \subset U$. 如果 $E \neq X$, 那么 $U \neq \varnothing$. 由假设, 存在有限集 $A \subset \mathbb{Z}_+$, 使得 $\bigcup_{n\in A} T^{-n}U = X$. 于是 $U = X$, 矛盾! 从而 $E = X$, 即 (X,T) 为极小的. □

易见, 每个极小点为回复点, 于是下面的定理实际上给出了 Birkhoff 回复定理的一个证明.

定理 1.3.3 每个动力系统都存在极小集.

证明 设 (X,T) 为动力系统, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X 的一组可数基. 设 $X_0 = X$. 对 $i = 1,2,\cdots$, 如果 $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}U_i \supset X_{i-1}$, 则令 $X_i = X_{i-1}$; 否则令 $X_i = X_{i-1} \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}U_i$.

易见 $X_i \neq \varnothing$ 为闭不变的. 设 $X_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. 则 X_∞ 也为非空闭不变的. 而且对每个满足 $U_i \cap X_\infty \neq \varnothing$ 的 U_i, 有 $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_i \cap X_\infty) \supset X_\infty$. 根据定理 1.3.2, X_∞ 为极小集. □

我们在前一小节已经看到, 如果 x 为回复点, U 为其邻域, 那么 $N(x,U)$ 包含了一个 IP 集. 对于极小点这一特殊的回复点, 我们自然期望它的回复时间集有些特殊的性质. 下面我们将会看到, 事实上也的确如此. 对于以 n 为周期的周期点 x, 它的回复时间集包含了子集 $n\mathbb{Z}_+$. 我们对这一概念进行推广:

定义 1.3.4 集合 $A = \{a_1 < a_2 < \cdots\} \subset \mathbb{Z}_+$ 称为**syndetic 的**是指它具有有界的间距, 即存在 $N > 0$, 使得对任意的 $i \in \mathbb{N}$, 有 $a_{i+1} - a_i \leqslant N$. 记全体 syndetic 集为 $\mathcal{F}_s$.

集合 $A \subset \mathbb{Z}_+$ 称为**thick 的**是指它包含了任意长的整数段, 即存在序列 $n_i \to \infty$, 使得 $A \supset \bigcup_{i=1}^{\infty}\{n_i, n_i+1, \cdots, n_i+i\}$. 记全体 thick 集为 $\mathcal{F}_t$.

设 (X,T) 为动力系统, 其中点 $x \in X$ 称为一个**几乎周期点**是指对 x 的任意邻域 U, $N(x,U) \in \mathcal{F}_s$. 记全体几乎周期点的集合为 $\mathrm{AP}(T)$.

定理 1.3.5 设 $\pi: X \to Y$ 为系统 (X,T) 到 (Y,S) 的因子映射. 则

(1) 如果 $x \in \mathrm{AP}(T)$, 那么 $\overline{\mathrm{orb}(x,T)}$ 为 X 的极小集;

(2) 如果 $M \subset X$ 为极小集, 那么 $M \subset \mathrm{AP}(T)$;

(3) 如果 (X,T) 为极小系统, 那么 (Y,S) 也为极小的;

(4) 如果 (X,T) 为极小的, 那么 π 为半开的, 即对 X 的任意非空开集 U, $\pi(U)$ 有非空的内部.

证明 (1) 设 $x \in \mathrm{AP}(T)$ 及 $A = \overline{\mathrm{orb}(x,T)}$. 如果 A 不是极小集, 则由定理 1.3.3, 存在极小集 $A_1 \subset A$ 且 $A_1 \neq A$. 易见 $x \notin A_1$. 取 x 和 A_1 的不交邻域 U, V. 则 $N(x,U)$ 为 syndetic 的. 由于 T 连续及 A_1 不变, $N(x,V)$ 为 thick 的. 这样 $N(x,U) \cap N(x,V) \neq \varnothing$, 矛盾.

(2) 设 M 为极小集, $x \in M$ 并且 U 为 x 的邻域. 如果 $N(x,U)$ 不是 syndetic 的, 那么存在 $\{n_i\}$, 使得对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有 $T^{n_i}x, \cdots, T^{n_i+i}x \notin U$. 不失一般性, 可设 $\lim T^{n_i}x = y$. 则对每个 $j \in \mathbb{N}$, 有 $\lim T^{n_i+j}x = T^j y$. 于是对任意 $j \in \mathbb{Z}_+$, 有 $T^j y \notin U$, 所以 $M = \overline{\mathrm{orb}(y,T)} \subset M \setminus U$, 矛盾!

(3) 假设 (X,T) 为极小的. 设 $Y_1 \subset Y$ 为非空闭不变子集. 因为 $\pi^{-1}(Y_1)$ 为非空闭不变的, 所以它为全空间. 于是 $Y_1 = \pi(X) = Y$, 即 (Y,S) 为极小的.

(4) 设 U,V 为 X 的非空开集, 且满足 $\overline{V} \subset U$. 根据定理 1.3.2, 存在有限集 $B \subset \mathbb{Z}_+$, 使得 $\bigcup_{n\in B} T^{-n}\overline{V} = X$. 于是有 $\bigcup_{n\in B} \pi(T^{-n}\overline{V}) = Y$, 即 $\bigcup_{n\in B} S^{-n}\pi(\overline{V}) = Y$. 根据 Baire 定理, 存在 $n \in B$, 使得 $S^{-n}\pi\overline{V}$ 内部非空. 作为一个简单的练习, 请读者自己验证 $\pi(U)(\supset \pi\overline{V})$ 的内部是非空的. □

由上面定理知道, 极小点与几乎周期点是同一回事, 后面我们经常会混用这两个概念. 下面为集合 $\mathrm{AP}(T)$ 的若干性质:

定理 1.3.6 *设 $\pi: X \to Y$ 为系统 (X,T) 到 (Y,S) 的因子映射. 则*

(1) $T(\mathrm{AP}(T)) = \mathrm{AP}(T)$;

(2) $\mathrm{AP}(T^n) = \mathrm{AP}(T)$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(3) $\pi\mathrm{AP}(T) = \mathrm{AP}(S)$.

证明 (1) 首先易见 $T(\mathrm{AP}(T)) \subset \mathrm{AP}(T)$. 现设 $x \in \mathrm{AP}(T)$, 则由定理 1.3.5, $A = \overline{\mathrm{orb}(x,T)}$ 为极小的. 因为 $T: A \to A$ 为满射, 所以存在 $y \in A$, 使得 $T(y) = x$. 再由定理 1.3.5 得到 $y \in \mathrm{AP}(T)$.

(2) 根据定理 1.2.11 和定理 1.3.5 即可得到结论.

(3) 首先易见 $\pi\mathrm{AP}(T) \subset \mathrm{AP}(S)$. 现设 $y \in \mathrm{AP}(S)$ 且 $A = \overline{\mathrm{orb}(y,T)}$. 则 A 为极小集. 由于 $B = \pi^{-1}A$ 为非空闭不变的, 存在极小集 $C \subset B$. 易见 $\pi(C) = A$, 于是存在 $x \in C$, 使得 $\pi(y) = x$. 根据定理 1.3.5, $x \in \mathrm{AP}(T)$. □

例 1.3.7 下面给出几个例子:

• 设 S^1 为复平面上的单位圆周, α 为无理数. 定义 $T: S^1 \to S^1$ 为 $z = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta} \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\theta+\alpha)}$, $\forall z \in S^1$. 则系统 (X,T) 为极小的.

可以如下给出证明: 首先对任意 $z = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta} \in S^1$, $\mathrm{orb}(z,T) = \{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\theta+n\alpha)} : n \in \mathbb{Z}_+\}$. 因为 $\{n\alpha - [n\alpha] : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密, 所以 $\mathrm{orb}(z,T)$ 在 S^1 中稠密 (其中 $[\cdot]$ 指实数 $\cdot$ 的整数部分).

• 设 $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, 其中 $\{0,1\}$ 取离散拓扑而 Σ_2 取乘积拓扑. 对 $x = (x_1, x_2, \cdots)$

及 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in\Sigma_2$, 令

$$x+y=(c_1,c_2,\cdots),$$

其中当 $x_1+y_1\leqslant 1$ 时 $c_1=x_1+y_1$, 而当 $x_1+y_1\geqslant 2$ 时 $c_1=x_1+y_1-2$ 且将 1 进到下个位置上. 对于以后位置依次以这种方式定义.

定义 $T:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 为

$$T(x_1,x_2,\cdots)=(x_1,x_2,\cdots)+(1,0,0,\cdots).$$

所得的系统 (Σ_2,T) 称为一个**加法机器**. 下面我们说明它为极小的.

实际上, 只要注意到 $\mathrm{orb}(0,T)=\{A0^{(\infty)}:A\in\bigcup_{i\geqslant 1}\{0,1\}^i\}$, 其中 $0=(0,0,\cdots)$, 就不难说明对任意 $x\in\Sigma_2$, $\mathrm{orb}(x,T)$ 为稠密的.

• 上面两个例子都是所谓的 Kroneker 系统. 设 G 为紧致度量交换群及 $g_0\in G$. 令 T 为 G 在 g_0 下的转移映射, 即 $T(g)=g_0g$, $\forall g\in G$. 一般称 (G,T) 为**Kroneker 系统**. 第 3 章将说明 (G,T) 为等度连续的.

下面说明 G 的每个点都是几乎周期的. 设 g_1 为取定的一个几乎周期点, 而 V 为单位元的一个邻域. 如果 $T^ng_1\in Vg_1$, 那么任何 $g\in G$ 就有

$$T^ng=g_0^ng=g_0^ng_1g_1^{-1}g\in Vg_1g_1^{-1}g=Vg.$$

于是 g 为几乎周期的. 尤其如果 (G,T) 为传递的, 那么它为极小的.

• 下面给出在符号系统中构造几乎周期点的一种方法. 设 $A=\{0,1,\cdots,k-1\}$, $w_0,\cdots,w_{k-1}$ 为 k 词且每个词包含了 A 中所有字母.

定义 $\phi:\bigcup_{i\geqslant 1}A^i\to\bigcup_{i\geqslant 1}A^i$ 满足 $\phi(i)=w_i$ 和 $\phi(a_1,\cdots,a_n)=\phi(a_1)\cdots\phi(a_n)$. 自然地, 这个映射 ϕ 可以延拓到 Σ_k 上. 容易说明, ϕ 的不动点实际上为几乎周期点. 一般称 ϕ 为一个**替换**, 而由它产生的极小系统称为**替换系统**.

一个十分著名的例子就是所谓的**Morse 序列**. 设 $w_0=01$ 以及 $w_1=10$, 于是

$$0\to 01\to 0110\to 01101001\to 0110100110010110\to\cdots,$$

而 Morse 序列为 $(0110100110010110\cdots)$, 它是一个几乎周期点.

• 设 (Σ_k,T) 为全转移, 那么 $x\in\Sigma_k$ 为几乎周期点当且仅当每个 x 中出现的词出现在 x 的位置为 syndetic 的.

定义 1.3.8 动力系统 (X,T) 称为

• 一个**P 系统**是指它为传递的, 并且 $\mathrm{Per}(T)$ 在 X 中稠密;

• 一个**M 系统**是指它为传递的, 并且 $\mathrm{AP}(T)$ 在 X 中稠密.

根据定义, 任何 P 系统是 M 系统. 全转移 (Σ_k,T) 为一个 P 系统; 任何极小但非周期的系统为 M 系统, 而非 P 系统. 我们提及一个相反的例子: 设 x 为例 1.2.9

中的回复点而 $X = \overline{\mathrm{orb}(x,T)}$, 则系统 (X,T) 为传递的, 并且只有一个唯一的极小集 $\{(0,0,\cdots)\}$. 事实上, 如果 y 为 X 的几乎周期点, 则存在序列 $n_i \to +\infty$, 使得 $T^{n_i}x \to y$. 于是 y 中有任意长的 0 词, 这意味着 $(0,0,\cdots) \in \overline{\mathrm{orb}(y,T)}$. 于是由极小性就有 $y=(0,0,\cdots)$.

定义 1.3.9　集合 $A \subset \mathbb{Z}_+$ 称为**piecewise syndetic 的**是指它为一个 syndetic 集合与一个 thick 集合的交. 记所有 piecewise syndetic 集合为 $\mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$.

一个集合 $A \subset \mathbb{Z}_+$ 称为**thickly syndetic 的**是指对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在一个 syndetic 集 $\{s_1^n < s_2^n < \cdots\}$, 使得 $A \supset \bigcup_{j=1}^{\infty}\{s_j^n, s_j^n+1,\cdots,s_j^n+n\}$. 记全体 thickly syndetic 集为 $\mathcal{F}_{\mathrm{ts}}$.

易见, 任何 $\mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$ 集与任何 $\mathcal{F}_{\mathrm{ts}}$ 集相交非空. 下面的定理体现了它们与动力系统的联系.

定理 1.3.10　设 (X,T) 为传递系统且 $x \in \mathrm{Trans}_T$. 则

(1) (X,T) 为 M 系统当且仅当对 x 的任意邻域 U, $N(x,U) \in \mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$;

(2) 设 K 为 (X,T) 的极小集, 那么 (X,T) 以 K 为其唯一极小集当且仅当对 K 的任意邻域 U, $N(x,U) \in \mathcal{F}_{\mathrm{ts}}$.

证明　(1) 如果 (X,T) 为 M 系统, 则易见对 x 的任何邻域 U, $N(x,U) \in \mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$. 这是因为对每个极小点 $y \in U$, $N(y,U)$ 为 syndetic 的, 并且存在序列 $n_i \to +\infty$, 使得 $T^{n_i}(x) \to y$.

下面假设对 x 的任意邻域 U, $N(x,U) \in \mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$. 取 $\varepsilon > 0$, 使得 $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset U$. 于是存在 $p \in \mathbb{N}$ 及 $\{m_j^i : i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant j \leqslant i\} \subset N(x, B_{\varepsilon/2}(x))$, 使得 $m_1^i < \cdots < m_i^i$ 且 $m_{j+1}^i - m_j^i \leqslant p$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant i-1$. 令 y 为 $\{T^{m_1^i}(x)\}$ 的极限点. 则易见 $y \in B_\varepsilon(x)$ 且 $N(y, B_\varepsilon(x))$ 为 syndetic 的. 设 M 为 y 在 T 下轨道闭包中的极小集, 我们断言 $M \cap \overline{B_\varepsilon(x)} \neq \varnothing$. 实际上, 如果 $M \cap \overline{B_\varepsilon(x)} = \varnothing$, 那么存在开集 $V \supset M$ 及开集 $U_1 \supset \overline{B_\varepsilon(x)}$, 使得 $U_1 \cap V = \varnothing$. 因为 $N(y,V)$ 为 thick 的, 所以 $N(y,U_1)$ 不能为 syndetic 的, 矛盾!

根据 $M \cap U \neq \varnothing$ 以及 (X,T) 的传递性, (X,T) 为 M 系统.

(2) 假设 (X,T) 有唯一极小集 K. 对任意 K 的邻域 U, 设 $U_i \subset U$ 为 K 的邻域, 且满足如果 $T^j(x) \in U_i$, 就有 $T^{j+k}(x) \in U$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant i$. 因为对每个 i, $N(x,U_i)$ 为 syndetic 的, 所以 $N(x,U) \in \mathcal{F}_{\mathrm{ts}}$.

反之, 如果 T 有极小集 K_1, 使得 $K_1 \cap K = \varnothing$. 那么对于 K_1 的每个不交于 U 的邻域 V, $N(x,V)$ 为 thick 的. 于是 $N(x,U) \subset \mathbb{N} \setminus N(x,V)$ 不可能为 syndetic 的, 矛盾! □

作为定理 1.3.3 的应用, 有

定理 1.3.11　设 $\mathbb{N} = B_1 \cup \cdots \cup B_q$, 则存在 j, 使得 $B_j \in \mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$.

证明 设 $A=\{1,\cdots,q\}$, 定义 $w\in A^{\mathbb{N}}$ 为

$$w_n=i \text{ 当且仅当 } n\in B_i.$$

令 $X=\overline{\mathrm{orb}(w,T)}$, 设 T 为转移映射. 则 (X,T) 为动力系统, 根据定理 1.3.3, 在 X 中存在极小点 ξ. 假设 j 在 ξ 中出现, 那么 j 出现的位置形成一个 syndetic 集, 设其间距不大于 l. 由于 $\xi\in X$, 存在 $\{m_i\}$, 使得 $T^{m_i}w$ 能任意接近 ξ. 这意味着存在序列 $n_i\to+\infty$, 使得

$$(T^{m_i}w)_1=\xi_1,\ (T^{m_i}w)_2=\xi_2,\cdots,(T^{m_i}w)_{n_i}=\xi_{n_i}.$$

上式说明 j 在 $(w_{m_i+1},\cdots,w_{m_i+n_i})$ 中以间距不大于 l 出现. 于是 $B_j\in\mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$. □

类似于传递的情形, 我们可以定义**完全极小性**, 即对任意 $n\in\mathbb{N}$, (X,T^n) 为极小的. 圆周上的无理旋转是完全传递的, 而加法机器不是. 关于极小集在迭代下的分解的详细讨论参见文献 (Ye, 1992).

Birkhoff 回复定理说明每个动力系统都有回复点, 这个事实启发我们给出**回复集**的概念.

定义 1.3.12 子集 $A\subset\mathbb{Z}_+$ 称为**回复集**是指对每个动力系统 (X,T), 存在 $\{n_i\}\subset A$, 使得 $n_i\to+\infty$, 以及 $x\in X$, 使得 $T^{n_i}x\to x$.

于是 Birkhoff 定理说明 $\mathbb{Z}_+$ 为回复集. 由定理 1.3.13, 我们可以看到每个 thick 集为回复集. 令人惊奇的是, 回复集与组合数学中的染色问题密切相关, 而且也与 syndetic 集的差集联系在一起. 回复集的一个刻画为

定理 1.3.13 集合 A 为回复集当且仅当对每个 syndetic 集 S, $A\cap(S-S)\neq\varnothing$.

证明 $(\Rightarrow)$ 设 A 为回复集且 $S\in\mathcal{F}_{\mathrm{s}}$. 令 $\Sigma_2=\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 且 T 为转移映射. 定义 $x\in\Sigma_2$ 为 $x_n=1$ 当且仅当 $n\in S$. 令 $X=\overline{\mathrm{orb}(x,T)}$. 设 Y 为 X 的极小集且 $U=\{y\in Y:y_0=1\}$. 由于 S 为 syndetic 的, $U\neq\varnothing$. 我们断言 $N(U,U)\subset S-S$. 实际上, 令 $n\in N(U,U)$, 则 $U\cap T^{-n}(U)\neq\varnothing$, 即存在 $y\in U$, 使得 $T^n(y)\in U$. 这样就有某 $m\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $x_m=1$ 且 $x_{m+n}=1$, 即 $n\in S-S$.

因为 Y 为极小的, 根据定理 1.3.2, 存在 N, 使得 $Y=\bigcup_{i\leqslant N}T^{-i}U$. 这样对每个 $y\in Y$, 存在 $i\leqslant N$, 使得 $T^i(y)\in U$. 因为 A 为回复集, 所有存在 $a\in A$ 及 $y\in Y$, 使得 $d(T^ay,y)$ 充分小且 $T^a(T^iy),T^iy\in U$, 其中 $i\leqslant N$, 使得 $T^iy\in U$. 这意味着 $A\cap N(U,U)\neq\varnothing$, 继而 $A\cap(S-S)\neq\varnothing$.

$(\Leftarrow)$ 设 Y 为极小集, U 为 Y 满足 $\mathrm{diam}(U)<\varepsilon$ 的非空开集, 其中 $\varepsilon>0$. 对 $y_0\in U$, 由于 $N(U,U)=N(y_0,U)-N(y_0,U)$ 及 $N(y_0,U)$ 为 syndetic 的, 有 $A\cap N(U,U)\neq\varnothing$. 于是存在 $a\in A$ 及 $z_0\in U$, 使得 $d(T^az_0,z_0)<\varepsilon$. 令

$$B_\varepsilon=\{y\in Y:\text{存在}a\in A,\ \text{使得}d(T^ay,y)<\varepsilon\}.$$

由于在每个非空开集 U 中存在 $y \in U \cap B_\varepsilon$, 所以 B_ε 为稠密开集.



令

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}.$$

则 D 为 Y 的稠密子集且 D 中每个点均按 A 的子集元素回复. 因为每个系统均有极小子集, 所以 A 为回复集. □

回复集与染色问题有着密切联系. 设 G 为以 $\mathbb{Z}$ 为顶点的图, 并且在 $\mathbb{Z}$ 的加法下保持不变, 即如果 (i,j) 为 G 的边, 那么对每个 $n \in \mathbb{Z}$, $(i+n, j+n)$ 仍然是它的边. 易见这样的图由一个距离集 $D \subset \mathbb{N}$ 所确定, 其中 D 取遍所有边长 $|i-j|$, (i,j) 为图的边. 一个以 D 为距离集的图记为 $G(D)$. 一个图的染色是指赋予 G 的顶点以各种颜色, 使得相邻的顶点的颜色不同 (即有共同边相连的顶点有不同的颜色). 所谓 G 的**染色数**就是按上述方式去染色所需的最少颜色. 明显地, 当 D 越小时, $G(D)$ 为有限数的可能性越大. 称序列 $D = \{1 \leqslant d_1 < d_2 < \cdots\}$ 为**缺项的**是指成立 $\inf_j d_{j+1}/d_j > 1$. Katznelson 证明了如果 D 为缺项的, 那么 $G(D)$ 具有有限的染色数. 更进一步地有, 一个图具有有限染色数当且仅当 D 不是回复集 (Katznelson, 2001).

最后我们以一个关于非传递点集的结构定理结束本节.

定理 1.3.14 *设 (X,T) 为传递且非极小的动力系统, 则 $X \setminus \mathrm{Trans}_T$ 为 X 的稠密子集.*

证明 设 V 为 X 的非空开集. 因为 Trans_T 稠密, 存在 $x \in V \cap \mathrm{Trans}_T$. 由于 x 为非极小点, 所以存在开集 U, 使得 $\overline{U} \subset V$ 且 $N(x,U)$ 不为 syndetic 的. 于是存在序列 $n_i \to +\infty$, 使得 $T^{n_i}(x) \in U$ 且 $T^{n_i+j}(x) \notin U$, $\forall j = 1, 2, \cdots, i$. 根据紧性, 不妨设 $T^{n_i}(x) \to y$. 于是 $y \in \overline{U}$ 且 $Ty, T^2y, \cdots \notin U$. 这样就有 $y \in X \setminus \mathrm{Trans}_T$. 由 V 的任意性, $X \setminus \mathrm{Trans}_T$ 为 X 的稠密子集. □

作为定理的补充说明, 我们指出, 存在这样的传递非极小系统 (X,T), 它满足 $X = \mathrm{Trans}_T \cup \mathrm{Per}(T)$, 即每个非传递点为周期点. 实际上还存在传递非极小系统, 它的非传递点均为非周期的几乎周期点. 关于这些例子参见文献 (Downarowicz-Ye, 2002).

习 题 1.3

1. 证明：极小系统的自然扩充仍为极小系统.

2. 完成定理 1.3.5 (4) 的证明. 提示：证明如果 $T: X \to X$ 极小, 那么如 A 有非空内部, 则 $T(A)$ 也有非空内部 (Kolyada etc., 2001).

3. 给出例 1.3.7 (2) 的详细证明.

4. 说明对极小系统 (X,T), 在定理 1.2.11 中可以要求 $X_i \cap X_j = \varnothing$. 提示: 参见文献 (Ye, 1992).

5. 证明: 如果 $A \cap B \neq \varnothing, \forall B \in \mathcal{F}_s$ $(B \in \mathcal{F}_t)$, 则 A 为 thick 的 (syndetic 的).

6. 证明: 如果 $A \cap B \neq \varnothing, \forall B \in \mathcal{F}_{ps}$ $(B \in \mathcal{F}_{ts})$, 则 $A \in \mathcal{F}_{ts}$ $(A \in \mathcal{F}_{ps}$).

7. 证明: $\mathcal{F}_{ps}$ 具有 Ramsey 性.

8. 验证定理 1.3.2 及 1.3.3 对一般群作用仍成立.

9. $\mathcal{F}_{inf} - \mathcal{F}_{inf} = \{F - F : F \in \mathcal{F}_{inf}\}$ 中集合称为**差集**. 证明任何差集为回复集. 提示: 对 syndetic 集 S 及无限集 $F = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$, 考虑 $S + n_1, S + n_2, \cdots$, 并且说明存在 $i < j$, 使得 $(S + n_i) \cap (S + n_j) \neq \varnothing$.

10. 设 (X,T) 为动力系统, $S \in \mathcal{F}_{ps}$. 证明: 如果存在 $x \in X$, 使得 $\overline{\{T^i(x) : i \in S\}} \subset K$, 那么 K 中存在极小点. 提示: 参见文献 (Blokh, 2002).

11. 设 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为单位圆, α 为无理数以及 $\beta \in [0,1)$ 与 α 有理线性无关的. 定义 $w \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 为 $w(n) = 1_{[0,\beta]}(n\alpha), \forall n \in \mathbb{Z}$. 令 $X = \overline{\text{orb}(w,T)}$, 其中 T 为转移映射. 证明: (X,T) 为极小系统. 这种系统称为**Sturmian 系统**.

12. **Toeplitz 序列** $w \in \{1,2,\cdots,l\}^{\mathbb{Z}}$ 定义为: 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 存在 $p \geqslant 1$, 使得对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 成立 $w(n+kp) = w(n)$. **Toeplitz 系统**定义为 Toeplitz 序列在转移映射下的轨道闭包. 证明: Toeplitz 系统为极小的.

§1.4 混 合 性

在这一节, 我们讨论另一类具有较强回复属性的传递系统 —— 混合系统.

定义 1.4.1 设 (X,T) 和 (Y,S) 为两个动力系统, 称它们为**弱不交的**是指乘积系统 $(X \times Y, T \times S)$ 为传递的.

上面的乘积系统 $T \times S : X \times Y \to X \times Y$ 的作用定义为 $T \times S(x,y) = (Tx, Sy)$, $\forall (x,y) \in X \times Y$. $\mathbb{Z}_+$ 的子集 A 称为**有限余的**是指 $\mathbb{Z}_+ \setminus A$ 为有限的. 我们用 $\mathcal{F}_{cf}$ 来表示全体有限余集构成的集合.

定义 1.4.2 (1) 一个动力系统称为**弱混合的**是指它弱不交于自己, 即 $(X \times X, T \times T)$ 为传递的;

(2) 一个动力系统称为**强混合的**是指对每个非空开集 U 和 V, $N(U,V)$ 为有限余的.

由定义知, 强混合的系统必为弱混合的, 而弱混合系统必为传递的 (实际上也为完全传递的). 圆周上的无理旋转为完全传递而非弱混合的, 后面我们会看到许多弱混合而非强混合的例子. 为刻画混合性, 我们引入如下概念:

定义 1.4.3 $\mathbb{Z}_+$ 的一个子集族 $\mathcal{F}$ 称为一个**滤子**是指它满足:

(1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

(2) 如果 $F_1 \in \mathcal{F}$ 且 $F_1 \subseteq F_2$, 那么就有 $F_2 \in \mathcal{F}$;

(3) 对任意 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

下面的定理被称为“Furstenberg 相交引理”, 这是研究混合性的一个重要工具. 对于 $\mathbb{Z}_+$ 的子集族 $\mathcal{F}$, 我们用 $[\mathcal{F}]$ 表示集合 $\{A \subset \mathbb{Z}_+ : 存在\ F \in \mathcal{F},\ 使得\ A \supset F\}$.

定理 1.4.4 一个动力系统 (X,T) 为弱混合的当且仅当 $[\mathcal{F}]$ 为滤子, 其中 $\mathcal{F} = \{N(U,V) : U, V\ 为X的非空子集\}$.

证明 如果 $[\mathcal{F}]$ 为滤子, 那么对 X 的任意非空开集 U_1, U_2, V_1, V_2, 有

$$N(U_1 \times U_2, V_1 \times V_2) = N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \in [\mathcal{F}].$$

特别地, $N(U_1 \times U_2, V_1 \times V_2) \neq \varnothing$. 所以 (X,T) 为弱混合的.

反之, 设 (X,T) 为弱混合的, 且 $N(U_1, V_1)$, $N(U_2, V_2) \in [\mathcal{F}]$. 由弱混合的定义, 存在 $m \in N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2)$. 设 $A = U_1 \cap T^{-m}U_2$, $B = V_1 \cap T^{-m}V_2$. 对任意 $k \in N(A, B)$, 有

$$A \cap T^{-k}B = (U_1 \cap T^{-m}U_2) \cap T^{-k}(V_1 \cap T^{-m}V_2) = (U_1 \cap T^{-k}V_1) \cap T^{-m}(U_2 \cap T^{-k}V_2).$$

这意味着 $U_1 \cap T^{-k}V_1 \neq \varnothing$ 且 $U_2 \cap T^{-k}V_2 \neq \varnothing$. 于是

$$N(A, B) \subset N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2). \qquad \square$$

下面的定理指出弱混合系统与集族 $\mathcal{F}_t$ 有着密切相关.

定理 1.4.5 设 (X,T) 为动力系统, 则以下各命题等价:

(1) (X,T) 为弱混合的;

(2) 对任意非空开集 U, V, $N(U,U) \cap N(U,V) \neq \varnothing$;

(3) 对任意非空开集 U, V, $N(U,U) \cap N(V,U) \neq \varnothing$;

(4) 对任意非空开集 U 和 V, $N(U,V)$ 为 thick 的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定义即得.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 U, V 为 X 的非空开集, 那么存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $V_1 = V \cap T^{-n}U \neq \varnothing$. 于是

$$N(U,U) \cap N(V,U) \supset N(T^{-n}U, T^{-n}U) \cap N(V_1, U) \supset N(V_1, V_1) \cap N(V_1, U) \neq \varnothing.$$

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 U_1, U_2, U_3, U_4 为 X 的非空开集, 那么存在 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $E = U_1 \cap T^{-n_1}U_2 \neq \varnothing$ 及 $F = T^{-n_1}U_3 \cap T^{-n_2}E \neq \varnothing$. 同样地, 存在 $n_3 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $F \cap T^{-n_3}F \neq \varnothing$ 及 $U_4 \cap T^{-n_3}F \neq \varnothing$. 令 $n = n_2 + n_3$, 则有

$$T^{-n_1}(T^{-n}U_2 \cap U_3) \supset T^{-(n_1+n)}U_2 \cap T^{-n}U_1 \cap T^{-n_1}U_3 \supset T^{-n}E \cap F \supset T^{-n_3}F \cap F \neq \varnothing.$$

于是 $T^{-n}U_2 \cap U_3 \neq \varnothing$. 另外,

$$T^{-n}U_1 \cap U_4 \supset T^{-(n_1+n)}U_2 \cap T^{-n}U_1 \cap U_4 = T^{-n}E \cap U_4 \supset T^{-n_3}F \cap U_4 \neq \varnothing.$$

即 $N(U_3,U_2)\cap N(U_4,U_1)\neq\varnothing$.

(1) $\Rightarrow$ (4) 设 U, V 为 X 的非空开集. 由定理 1.4.4, 对任意 $N\in\mathbb{N}$, 有

$$N(U,V)\cap N(U,T^{-1}V)\cap\cdots\cap N(U,T^{-N}V)\neq\varnothing.$$

所以 $N(U,V)$ 为 thick 的.

(4) $\Rightarrow$ (2) 设 U, V 为 X 的非空开集及 $m\in N(U,V)$, 那么 $W=U\cap T^{-m}V\neq\varnothing$. 由于 $N(W,W)$ 为 thick 的, 存在 $n\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $W\cap T^{-n}W\neq\varnothing$ 及 $W\cap T^{-(n-m)}W\neq\varnothing$. 于是

$$U\cap T^{-n}U\supset W\cap T^{-n}W\neq\varnothing,\quad U\cap T^{-n}V=U\cap T^{-(n-m)}T^{-m}V\supset W\cap T^{-(n-m)}W\neq\varnothing.$$

即 $N(U,U)\cap N(U,V)\neq\varnothing$. □

例 1.4.6 下面给出一些混合的例子:

• 设 (Σ_k,T) 为全转移, 则它为强混合的.

• 设 x 为例 1.2.9 中的回复点且设 $X=\overline{\mathrm{orb}(x,T)}$. 下面说明 (X,T) 为强混合的. 考虑 x 的开邻域 $[A_n]$, 由 x 的构造, 对每个 $m\geqslant n$, $A_n0^{(m)}A_n$ 出现在 x 中. 于是 $N([A_n],[A_n])=N(x,[A_n])-N(x,[A_n])$ 为有限余的. 因为 (X,T) 为传递系统, 所以对于任何非空开集 U,V, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $C=U\cap T^{-n}V\neq\varnothing$. 这样 $N(U,V)=N(T^{-n}U,T^{-n}V)\supset N(T^{-n}C,C)\supset n+N(C,C)$. 假设 $T^k(x)\in C$ 并且取 j, 使得 $T^k([A_j])\subset C$. 于是就有 $N(U,V)\supset n+N([A_j],[A_j])$, 这意味着系统为强混合的.

• 设 $\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ 为一个 thick 集, 定义 $A_1=(1)$, $A_2=A_10^{(a_1)}A_1,\cdots,A_{n+1}=A_n0^{(a_n)}A_n$. 令 $x=\lim A_n^\infty$ 以及 $X=\overline{\mathrm{orb}(x,T)}$. 容易验证 (X,T) 为弱混合的. 我们也可以选取 a_n 使得系统成为强混合的.

命题 1.4.7 设 x 为 Σ_k 中的回复点且设 $X=\overline{\mathrm{orb}(x,T)}$, 那么

(1) (X,T) 为弱混合的当且仅当出现在 x 中的任何两个词无限次出现, 并且它们的间隔可以为任意长的数;

(2) (X,T) 为强混合的当且仅当出现在 x 中的任何两个词无限次出现, 并且它们的间隔为有限余的.

证明留作习题.

定义 1.4.8 (1) 一个动力系统称为**拓扑遍历的**是指对任意非空开集 U,V, $N(U,V)\in\mathcal{F}_s$;

(2) 一个动力系统称为**扩散的**是指它弱不交于任意极小系统;

(3) 一个动力系统称为**极端扩散的**是指它弱不交于任意拓扑遍历系统.

推论 1.4.9 任何弱混合系统为极端扩散的, 而任何极端扩散系统为扩散的.

证明 由定理 1.4.5, 如果 (X,T) 为弱混合的, 那么对 X 的任意非空开集 U,V, $N(U,V)$ 为 thick 的. 于是易证弱混合系统为极端扩散的.

为证极端扩散蕴含扩散, 仅需证明极小系统为拓扑遍历的. 设 (X,T) 为极小的, U,V 为 X 的非空开集. 那么存在 $n\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $V_1=U\cap T^{-n}V\neq\varnothing$. 令 $x\in V_1$, 由定理 1.3.5, $N(x,V_1)$ 为 syndetic 的. 于是

$$N(U,V)=N(T^{-n}U,T^{-n}V)\supset N(T^{-n}V_1,V_1)\supset n+N(V_1,V_1)=n+(N(x,V_1)-N(x,V_1))$$

为 syndetic 的. □

介于弱混合性与强混合性之间有一类非常重要的混合性：mild 混合, 它是由 Glasner(2004) 和黄文、叶向东 (2004b) 借鉴遍历理论中的定义分别引入的.

定义 1.4.10 *一个动力系统称为***mild 混合的***是指它弱不交于任何传递系统.*

由定义, 两个 mild 混合系统的乘积系统仍为 mild 混合的. 实际上 mild 混合是严格介于强、弱混合之间的性质, 我们在第 8 章会给出具体的例子来说明这个事实. 根据定理 1.4.5, 一个动力系统为弱混合的当且仅当对任意非空开集 U,V, $N(U,V)$ 为 thick 的. 设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的子集族, 定义 $\mathcal{F}-\mathcal{F}=\{F-F:F\in\mathcal{F}\}$, 而子集 $A\subset\mathbb{Z}_+$ 属于集合 $(\mathcal{F}_{\text{ip}}-\mathcal{F}_{\text{ip}})^*$是指它与任何 $\mathcal{F}_{\text{ip}}-\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 中元相交. 对 mild 混合有

定理 1.4.11 *设 (X,T) 为动力系统. 则 (X,T) 为 mild 混合的当且仅当对任意非空开集 U,V, $N(U,V)\in(\mathcal{F}_{\text{ip}}-\mathcal{F}_{\text{ip}})^*$.*

证明 设 (X,T) 为 mild 混合的, 即对任意传递系统 (Y,S), $(X\times Y,T\times S)$ 仍为传递的. 因此 (X,T) 为弱混合的. 下证对任意 IP 子集 F 以及 X 的任意非空开集 U_1,U_2, $N(U_1,U_2)\cap(F-F)\neq\varnothing$ 成立. 由定理 1.2.13, 存在传递系统 (Y,S)、传递点 $y\in Y$ 以及 y 的邻域 V, 使得 $N(y,V)\subseteq F$. 由于 (X,T) 为 mild 混合的, $(X\times Y,T\times S)$ 为传递的. 于是 $N(U_1,U_2)\cap N(V,V)=N(U_1\times V,U_2\times V)\neq\varnothing$. 由于

$$N(V,V)=N(y,V)-N(y,V)\subseteq F-F,$$

得到 $N(U_1,U_2)\cap(F-F)\neq\varnothing$.

反之, 假设对 X 的任意两个非空开集 U_1,U_2, 均有 $N(U_1,U_2)\in(\mathcal{F}_{\text{ip}}-\mathcal{F}_{\text{ip}})^*$. 设 (Y,S) 为任一传递系统, 且设 U_1,U_2 为 X 的任意非空开集而 V_1,V_2 为 Y 任意的非空开集. 则由定义有

$$N(U_1\times V_1,U_2\times V_2)=\{n\in\mathbb{Z}_+:(T\times S)^{-n}(U_2\times V_2)\cap(U_1\times V_1)\neq\varnothing\}.$$

由于 (Y,S) 为传递的, 存在 $k\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $V=S^{-k}V_2\cap V_1$ 为 X 非空开集. 这样就有

$$\begin{aligned}&N(U_1\times V_1,U_2\times V_2)\\=&\{n\in\mathbb{Z}_+:(T\times S)^{-n}(U_2\times V_2)\cap(U_1\times V_1)\neq\varnothing\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\supseteq k+\{m\in\mathbb{Z}_+:(T^{-(m+k)}U_2\cap U_1)\times(S^{-(m+k)}V_2\cap V_1)\neq\varnothing\}\\&\supseteq k+\{m\in\mathbb{Z}_+:(T^{-m}(T^{-k}U_2\cap U_1)\times(S^{-m}V\cap V)\neq\varnothing\}\\&=k+N(U_1,T^{-k}U_2)\cap N(V,V).\end{aligned}$$

由定理 1.2.13, $N(V,V)$ 包含子集 $(F-F)$, 其中 F 为 IP 子集. 由于 (X,T) 为 $(\mathcal{F}_{\rm ip}-\mathcal{F}_{\rm ip})^*$ 传递的, 有 $N(U_1,T^{-k}U_2)\cap N(V,V)\neq\varnothing$. 于是 $N(U_1\times V_1,U_2\times V_2)\neq\varnothing$. 因为 U_1,U_2 与 V_1,V_2 为任意的, 所以 $(X\times Y,T\times S)$ 为传递的, 即 (X,T) 为 mild 混合的. □

对于各种混合性的讨论, 我们会在后面的章节中详细展开. 由于任意 $F'\in\mathcal{F}_{\rm ip}-\mathcal{F}_{\rm ip}$ 必包含偶数, 所以 $2\mathbb{N}\in(\mathcal{F}_{\rm ip}-\mathcal{F}_{\rm ip})^*$. 于是 $(\mathcal{F}_{\rm ip}-\mathcal{F}_{\rm ip})^*$ 中元不必为 thick 的. 作为练习, 请读者证明: 任意 $F\in(\mathcal{F}_{\rm ip}-\mathcal{F}_{\rm ip})^*$ 都是 syndetic 的.

习 题 1.4

1. 证明: 弱混合 (相应的、mild 混合、强混合) 系统的自然扩充必为弱混合 (相应的、mild 混合、强混合).
2. 证明命题 1.4.7.
3. 证明: 一个动力系统为完全传递的当且仅当它与所有周期系统为弱不交的.
4. 证明: $\mathcal{F}_{\rm ip}^*$ 和 $\mathcal{F}_{\rm ts}$ 为滤子. 提示: 用 Hindman 定理. 问题: $(\mathcal{F}_{\rm ip}-\mathcal{F}_{\rm ip})^*$ 是否为滤子?
5. 证明: 如果 (X,T) 为弱混合的, 那么对每个 $n\in\mathbb{N}$, $T^n:X\to X$ 及 $T^{(n)}:X^n\to X^n$ 为弱混合的.
6. 证明: 完全传递的 P 系统为弱混合的.
7. 设 (X,T) 为动力系统. 如果对任意非空开集 U,V, $N(U,V)\in\mathcal{F}_{\rm s}\cap\mathcal{F}_{\rm t}$, 那么 $N(U,V)\in\mathcal{F}_{\rm ts}$.
8. 证明: (X,T) 为扩散的当且仅当它弱不交于任意 M 系统.

§1.5 其他不变集

在前面几节中, 我们研究了传递性、极小性和混合性, 介绍了周期点、几乎周期点和回复点的概念. 它们有如下包含关系:

$$\mathrm{Per}(T)\subset\mathrm{AP}(T)\subset\mathrm{Rec}(T).$$

在这一节, 我们再介绍一些诸如 ω 极限集、非游荡集等其他不变集.

定义 1.5.1 设 (X,T) 为动力系统. 令 $\Lambda(T)=\bigcup_{x\in X}\omega(x,T)$, 称 $\Lambda(T)$ 为 (X,T) 的 ω 极限集.

由定义易见, $x\in\mathrm{Rec}(T)$ 当且仅当 $x\in\omega(x,T)$. 需要注意的是一个 ω 极限点不必为回复点. 例如, 令 $x=(10100100010000\cdots)\in\Sigma_2$, T 为转移映射. 则 $y=(100000\cdots)\in\omega(x,T)$ 但它不是回复点. ω 极限点集有如下性质:

定理 1.5.2　设 (X,T) 为动力系统, $x \in X$. 则

(1) $\omega(x,T)$ 为非空闭集;

(2) $T\omega(x,T)=\omega(x,T)$. 于是 $T\Lambda(T)=\Lambda(T)$. 另外, 对每个 $i \geqslant 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$, $T\omega(T^i x,T^n)=\omega(T^{i+1}x,T^n)$;

(3) 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立 $\omega(x,T)=\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega(T^i x,T^n)$, 于是对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\Lambda(T^n)=\Lambda(T)$;

(4) $\mathrm{Rec}(T) \subset \Lambda(T)$.

证明　(1) 由 X 的紧性, $\omega(x,T)$ 为非空的. 对 $y \in X \setminus \omega(x,T)$, 存在 y 的邻域 U, 使得 $U \cap \mathrm{orb}(x,T)$ 有限. 于是, 存在 y 的邻域 U', 使得 $U' \subset X \setminus \omega(x,T)$. 这意味着 $\omega(x,T)$ 为闭集.

(2) 易验证, 留作习题.

(3) 易见 $\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega(T^i x,T^n) \subset \omega(x,T)$. 下设 $y \in \omega(x,T)$. 那么存在 $n_i \to +\infty$, 使得 $T^{n_i}x \to y$. 不失一般性, 设 $n_i = k_i n + r$, 其中 $0 \leqslant r \leqslant n-1$. 于是 $y \in \omega(T^r x,T^n) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1}\omega(T^i x,T^n)$.

(4) 易证. □

需要特别注意的是, 一般而言 $\Lambda(T)$ 并非为闭的. 下面的定理告诉我们, 并非 X 的每一个闭不变子集都可以作为某个 $x \in X$ 的 ω 极限集.

定理 1.5.3　设 (X,T) 为动力系统, $x \in X$. 如果存在一个周期点 $p \in \omega(x,T)$, 使得 p 为 $\omega(x,T)$ 的孤立点, 那么 $\omega(x,T)$ 为周期轨. 尤其, 如果 $\omega(x,T)$ 为有限的, 那么它必为周期轨.

证明　设 p 的周期为 n. 根据定理 1.5.2 (3), 存在 i, 使得 $p \in \omega(T^i x,T^n)$. 令 $y=T^i(x)$ 及 $g=T^n$. 于是 $p \in \omega(y,g)$ 为 g 的不动点, 且为 $\omega(y,g)$ 的孤立点. 下证 $\omega(y,g)=\{p\}$.

假设 $\omega(y,g) \neq \{p\}$. 令 U 为 p 的开邻域满足 $U \cap (\omega(y,g) \setminus \{p\}) = \varnothing$. 则存在 $n_i \to +\infty$, 使得 $g^{n_i}y \in U$ 且 $g^{n_i+1}y \notin U$. 因为 p 为 $\omega(y,g)$ 的孤立点, $g^{n_i}y \to p$. 由 g 的连续性, $g^{n_i+1}y \to p$. 因为 $g^{n_i+1}y \notin U$, 矛盾!

于是 $\omega(y,g)=\{p\}$. 这说明 $\{p\}=\omega(T^i x,T^n)$, 从而 $\omega(x,T)=\mathrm{orb}(p,T)$ 为周期轨. □

定义 1.5.4　设 (X,T) 为动力系统. 一个点 $x \in X$ 称为**非游荡点**是指对 x 的任意邻域 U, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $U \cap T^{-n}U \neq \varnothing$. 如果 x 不是非游荡点, 那么称为**游荡点**. 记全体 X 非游荡点的集合为 $\Omega(T)$.

非游荡点集有如下性质:

定理 1.5.5　设 (X,T) 为动力系统, 则

(1) $\Omega(T)$ 为闭的;

(2) $\overline{\Lambda(T)} \subset \Omega(T)$, 尤其 $\Omega(T)$ 为非空的;

(3) $T(\Omega(T)) \subset \Omega(T)$.

证明 (1) 因为 $X \setminus \Omega(T)$ 为开集, 所以 $\Omega(T)$ 为闭集.

(2) 设 $x \in X$ 及 $y \in \omega(x,T)$. 则存在序列 $n_i \to +\infty$, 使得 $T^{n_i}x \to y$. 对 y 的任意邻域 U, 存在 $n_j > n_i$, 使得 $T^{n_j}x, T^{n_i}x \in U$. 于是 $U \cap T^{-(n_j-n_i)}U \neq \varnothing$, 继而 $y \in \Omega(T)$. 所以 $\Lambda(T) \subset \Omega(T)$. 因为 $\Omega(T)$ 为闭集, 所以 $\overline{\Lambda(T)} \subset \Omega(T)$.

(3) 令 $x \in \Omega(T)$ 且 U 为 Tx 的邻域. 由 T 的连续性, 存在 x 的邻域 V, 使得 $TV \subset U$. 因为 $x \in \Omega(T)$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $V \cap T^{-n}V \neq \varnothing$. 于是 $U \cap T^{-n}U \supset TV \cap T^{-n}TV \supset T(V \cap T^{-n}V) \neq \varnothing$. □

需要指出的是 $T(\Omega(T)) = \Omega(T)$ 一般不成立. 另外, 迭代不变性一般也不成立, 即 $\Omega(T^n) = \Omega(T)$ 一般不再成立, 具体例子可参见文献 (Coven-Niteck, 1981; Huang-Ye, 2001a).

当 $\Omega(T) = X$ 时, 有

定理 1.5.6 设 (X,T) 为一个动力系统. 如果 $\Omega(T) = X$, 那么 $\mathrm{Rec}(T)$ 为 X 的一个稠密 G_δ 集.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 令

$$A_\varepsilon = \{x \in X : 存在\ n \geqslant 1,\ 使得\ d(T^n x, x) < \varepsilon\}.$$

易见 A_ε 为稠密开集. 设 $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{\frac{1}{i}}$, 则 $\mathrm{Rec}(T) = A$ 为稠密的 G_δ 集. □

设 (X,T) 为动力系统, 令 $\Omega_1(T) = \Omega(T)$, $\Omega_2(T) = \Omega(T|_{\Omega_1(T)}), \cdots$. 归纳地, 如果 β 为后继序数, 令 $\Omega_\beta(T) = \Omega(T|_{\Omega_{\beta-1}(T)})$; 如果 β 为极限序数, 令 $\Omega_\beta(T) = \cap_{\alpha<\beta}\Omega_\alpha(T)$. 由于 X 为紧致度量空间, 存在一个可数序数 τ, 使得 $\Omega_{\tau+1}(T) = \Omega_\tau(T)$. 我们将具有以上性质的最小的 τ 称为 (X,T) 的**中心深度**, 而 $\Omega_\tau(T)$ 称为 (X,T) 的**中心**. 由定理 1.5.6, 系统的中心实际上就是 $\overline{\mathrm{Rec}(T)}$. 另外, 对任意可数序数 τ, 我们都可以找到一个系统 (X,T), 其中心深度为 τ(Kato-Park, 1999).

习 题 1.5

1. 设 $T : [0,1] \to [0,1]$ 为动力系统. 证明 $\{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 不能为 $[0,1]$ 中任意一点的 ω 极限集. 提示: 如果存在 x, 使得 $\omega(x,T) = \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 那么运用 T 于 $\omega(x,T)$ 去导出矛盾.

2. 构造一个系统 (X,T), 使得 $T\Omega(T) \neq \Omega(T)$. 提示: 参见文献 (Block-Coppel, 1992).

3. 构造一个系统 (X,T) 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 均有 $\Omega(T^n) \neq \Omega(T)$. 提示: 参见文献 (Block-Coppel, 1992).

4. 对每个可数序数 τ, 构造系统 (X,T), 使得 X 可数且 (X,T) 的深度为 τ. 提示: 参见文献 (Kato-Park, 1999).

5. 构造系统 (X,T) 满足: 存在 $x \in X$, 使得 $\omega(x,T)$ 为可数但非有限的.

§1.6　多重回复定理与 van der Waerden 定理

Birkhoff 回复定理告诉我们, 如果 T 为紧致度量空间到自身的连续映射, 则 $\mathrm{Rec}(T) \neq \varnothing$. 于是自然的问题是: 如果 X 为紧致度量空间, $T_1, \cdots, T_l$ 为 X 上 l 个可交换的连续自映射, 那么是否存在一个序列 $n_i \to +\infty$ 以及点 $x \in X$, 使得 $T_j^{n_i}x \to x, \forall 1 \leqslant j \leqslant l$ 成立? 这个问题的答案是肯定的, Furstenberg 等人在 20 世纪 70 年代证明了这个结论, 并且运用它给出了著名的 van der Waerden 定理的一个简单证明. 在本节中, 我们主要引用 Petersen(1983) 的证明.

定理 1.6.1　*设 X 为紧致度量空间, $T_1, \cdots, T_l$ 为 X 到自身的可交换的连续映射. 那么存在序列 $n_i \to +\infty$ 以及 $x \in X$, 使得 $T_j^{n_i}x \to x, \forall 1 \leqslant j \leqslant l$.*

为证明定理 1.6.1, 我们需要如下准备. 首先引入如下定义.

定义 1.6.2　*设 (X,T) 是一个动力系统, 其中 T 是可逆的. (X,T) 称为***齐性的***是指存在 X 上与 T 交换的同胚群 G, 使得 (X,G) 为极小的. 一个闭子集 $A \subset X$ 在 (X,T) 中为***齐性***的是指存在 X 上与 T 交换的同胚群 G, 使得 $GA = A$ 且 (A,G) 为极小的.*

引理 1.6.3 (Bowen)　*设 (X,T) 为动力系统, T 可逆且 $A \subset X$ 为闭的齐性子集. 假设对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x, y \in A$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $d(T^n x, y) < \varepsilon$. 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $z \in A$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $d(T^n z, z) < \varepsilon$ (注意, A 不必为 T 不变的).*

证明　首先我们证明定理的假设可以转化为: 对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $y \in A$, 存在 $x \in A$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $d(T^n x, y) < \varepsilon$.

由 A 的齐性, 存在群 G, 使得 (A,G) 极小. 对 $\varepsilon > 0$, 我们断言, 存在 $g_1, \cdots, g_n \in G$, 使得

$$\min_i d(g_i x, y) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, y \in A. \tag{1.6.1}$$

事实上, 用直径小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的有限多个开集 V_j 覆盖 A, 对每个 j, $\{g^{-1}V_j : g \in G\}$ 为 A 的开覆盖, 于是有有限子覆盖

$$\{g_{1,j}^{-1}V_j, g_{2,j}^{-1}V_j, \cdots, g_{n,j}^{-1}V_j\}.$$

从而对任意 $x, y \in A$, 存在 j, 使得 $y \in V_j$, 且对此 j, 存在 i, 使得 $x \in g_{i,j}^{-1}V_j$. 于是 $d(g_{i,j}x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$, 这就证明了 (1.6.1).

取充分小的 $\delta > 0$, 使得一旦 $d(x, x') < \delta$, 就有 $d(g_i x, g_i x') < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall i$ (注意 g_i 为满足 (1.6.1) 中取定的有限个元素). 根据假设, 存在 $x_0, y_0 \in A$ 及 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $d(T^{n_0}x_0, y_0) < \delta$.

于是对任意 i 有

$$d(T^{n_0}g_ix_0, g_iy_0) = d(g_iT^{n_0}x_0, g_iy_0) < \frac{\varepsilon}{2},$$

(1.6.1) 允许我们取 i, 使得 $d(g_iy_0, y) < \frac{\varepsilon}{2}$, 于是

$$\min_i d(T^{n_0}g_ix_0, y) < \varepsilon\ , \quad \forall\ y \in A.$$

这就证明了对任意 $y \in A$, 存在 $x \in A$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $d(T^nx, y) < \varepsilon$.

任取定点 $z_0 \in A$, 由以上结论, 取 $z_1 \in A$ 及 $n_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$d(T^{n_1}z_1, z_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6.2}$$

同样取 $z_2 \in A$, $n_2 \in \mathbb{N}$ 及 $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, 使得 $d(T^{n_2}z_2, z_1) < \varepsilon_2$, 其中 ε_2 充分小, 使得 (1.6.2) 当 z_1 被 $T^{n_2}z_2$ 替代时仍成立. 即 $d(T^{n_1+n_2}z_2, z_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

继续上面的归纳. 如果 $z_0, z_1, \cdots, z_r \in A$, $n_1, n_2, \cdots, n_r \in \mathbb{N}$, 及 $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 已经取定, 使得

$$d(T^{n_j}z_j, z_{j-1}) < \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \cdots, r, \tag{1.6.3}$$

取 $\varepsilon_{r+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ 充分小, 使得 (1.6.3) 当 z_r 被它附近距离小于 ε_{r+1} 的点替代时仍成立. 取 $z_{r+1} \in A$ 及 $n_{r+1} \in \mathbb{N}$, 使得 $d(T^{n_{r+1}}z_{r+1}, z_r) < \varepsilon_{r+1}$. 这样有, 当 $i < j$ 时,

$$d(T^{n_j+n_{j-1}+\cdots+n_i}z_j, z_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 A 的紧性, 存在 i, j, 使得 $i < j$ 且 $d(z_i, z_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $n = n_j + n_{j-1} + \cdots + n_i$, 就有 $d(T^nz_j, z_j) < \varepsilon$. 证毕. □

引理 1.6.4 *假设同上, 则存在 $x \in A$ 在 T 作用下回复.*

证明 对任意 $n = 1, 2, \cdots$, 令

$$E_n = \left\{x \in A : \inf_k\ d(T^kx, x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

如果 A 中没有 T 的回复点, 那么

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

下面说明每个闭集 E_n 的内部 E_n^0 (相对于 A) 为空集, 这样就与 Baire 定理矛盾.

如果存在 n, 使得 $E_n^0 \neq \varnothing$, 那么由于 (A,G) 极小, 就有 $A = GE_n^0$. 由紧性, 存在 $g_1,\cdots,g_m \in G$, 使得

$$A = g_1^{-1}E_n^0 \cup \cdots \cup g_m^{-1}E_n^0.$$

取 $\delta > 0$, 使得 $d(x,x') < \delta$ 蕴含 $d(g_ix, g_ix') < \dfrac{1}{n}, i = 1,2,\cdots,m$. 我们断言, 如果 $x \in g_j^{-1}E_n^0$, 那么 $\inf_k d(T^kx, x) \geqslant \delta$. 这是因为如果存在 k, 使得 $d(T^kx,x) < \delta$, 那么对任意 $j \in \{1,2,\cdots,m\}$ 有 $d(T^kg_jx, g_jx) < \dfrac{1}{n}$, 或者对某个 $y \in E_n^0$ 有 $d(T^ky,y) < \dfrac{1}{n}$.

因为任意 $x \in A$ 必在某个 $g_j^{-1}E_n^0$ 中, 我们得到, 对任意 $x \in A$, 有 $\inf_k d(T^kx,x) \geqslant \delta$. 这与引理 1.6.3 矛盾. □

定理 1.6.1 的证明　设 $T_1,\cdots,T_l$ 为紧度量空间 X 上的交换同胚, 我们要寻找点 $x \in X$ 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $d(T_i^nx, x) < \varepsilon, \forall i = 1,\cdots,l$.

用归纳法. 当 $l = 1$ 时, 即为 Birkhoff 回复定理. 假设以上结论对任意 $l-1$ 个交换同胚已经成立.

取 G 为由 $T_1,\cdots,T_l$ 生成的群, 不妨设 (X,G) 为极小的 (否则限制于某个极小子集上). 令 $\Delta \subset X^l$ 为对角线及 $T = T_1 \times \cdots \times T_l$. G 中元素 g 在 X^l 上的作用为: $g(x_1,\cdots,x_l) = (gx_1,\cdots,gx_l)$, 即 g 对应于 $g \times \cdots \times g$. 易见这些映射与 T 交换, 且 (Δ, G) (它与 (X,G) 同构) 为极小的, 进而 Δ 为系统 (X^l, T) 的齐性集.

下面我们验证前面引理中的假设, 即验证: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x^*, y^* \in \Delta$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $d(T^nx^*, y^*) < \varepsilon$. 令 $R_i = T_iT_l^{-1}, \forall i = 1,\cdots,l-1$. 由归纳假设, 存在 $x \in X$ 及 $n_m \to +\infty$, 使得 $R_i^{n_m}x \to x, \forall i = 1,\cdots,l-1$. 设 $\varepsilon > 0$, 令

$$y^* = (x,x,\cdots,x) \;\; 和 \;\; x^* = (T_l^{-n_m}x, T_l^{-n_m}x,\cdots,T_l^{-n_m}x).$$

则

$$\begin{aligned} d(T^{n_m}x^*, y^*) &= d(T_1^{n_m} \times T_2^{n_m} \times \cdots \times T_l^{n_m}x^*, y^*) \\ &= d((T_1^{n_m}T_l^{-n_m}x,\cdots,T_{l-1}^{n_m}T_l^{-n_m}x, x),(x,x,\cdots,x)) \\ &= d((R_1^{n_m}x,\cdots,R_{l-1}^{n_m}x,x),(x,x,\cdots,x)), \end{aligned}$$

取 m 充分大使得上式小于 ε.

这样我们就可以应用引理 1.6.4 得到: 存在 $(x,x,\cdots,x) \in \Delta$ 为在 $T = T_1 \times \cdots \times T_l$ 下回复的, 此即为所求. □

下面我们运用标准的方法将以上结论推广到一般情况:

定理 1.6.5　*设 X 为紧致度量空间, $T_1,\cdots,T_l$ 为 X 上交换的连续自映射. 那么存在 $x \in X$ 及序列 $n_i \to +\infty$, 使得*

$$T_j^{n_i}x \to x, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant l.$$

证明 令 $\Omega = X^{\mathbb{Z}^l}$ 及

$$(S_i\omega)_{(n_1,\cdots,n_i,\cdots,n_l)} = (\omega)_{(n_1,\cdots,n_i+1,\cdots,n_l)}, \quad i = 1,\cdots,l.$$

设 $\widetilde{X} \subset \Omega$ 满足对每个 $i = 1,\cdots,l$ 和每个格点 $(n_1,\cdots,n_l) \in \mathbb{Z}^l$ 有

$$(S_i\omega)_{(n_1,\cdots,n_i,\cdots,n_l)} = T_i\omega_{(n_1,\cdots,n_i,\cdots,n_l)}. \tag{1.6.4}$$

集合 $\widetilde{X}$ 为非空的. 为证明此点, 任取 $x \in X$, 对 $n \in \mathbb{N}$ 设

$$(\omega^n)_{(n_1,\cdots,n_l)} = T_1^{n_1+n}T_2^{n_2+n}\cdots T_l^{n_l+n}x, n_i \geqslant -n.$$

对于 ω^n 在其余格点的值随意定义. 这样得到点列 ω^n, 对 $n_i \geqslant -n$ 的 $(n_1,\cdots,n_l)$ 满足 (1.6.4). 取 ω^n 在 Ω 中的极限点, 它在 $\widetilde{X}$ 中. 于是 $\widetilde{X}$ 为非空的. 并且易证在 S_i 与 S_i^{-1} 作用下为不变的.

于是应用定理 1.6.1 于 $\widetilde{X}$ 及交换同胚 $S_1,\cdots,S_l$, 我们可找到相对于 $S_1,\cdots,S_l$ 的多重回复点 $\widetilde{x}$. 根据 (1.6.4), $\widetilde{x}$ 的每个分量为 X 相对于 $T_1,\cdots,T_l$ 的多重回复点. 证毕. □

现在我们运用定理 1.6.5 证明:

定理 1.6.6 (van der Waerden 定理) *如果 $\mathbb{N} = B_1 \cup \cdots \cup B_l$, 那么存在 j, 使得 B_j 包含了任意长的等差数列.*

证明 不失一般性, 设 $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$. 设 $A = \{1,\cdots,l\}$, $\Sigma_l = A^{\mathbb{N}}$ 且 $T: \Sigma_l \to \Sigma_l$ 为转移映射. 定义点 $w \in \Sigma_l$, 使得

$$w_n = i \text{ 当且仅当 } n \in B_i.$$

设 $X = \overline{\mathrm{orb}(w,T)}$. 给定 $k \geqslant 1$, 令 $T_i = T^i$, $i = 1,\cdots,k$. 运用定理 1.6.5, 我们得到点 $x \in X$ 及 $n \geqslant 1$, 使得

$$d(T_i^n x, x) < 1, \quad \forall i = 1,\cdots,k.$$

尤其 $x, T^n x, T^{2n}x, \cdots, T^{kn}x$ 在坐标 1 处一致, 于是

$$x_1 = x_{n+1} = x_{2n+1} = \cdots = x_{kn+1}.$$

因为 $x \in X$, 所以存在 m, 使得

$$w_{m+1} = w_{m+n+1} = \cdots = w_{m+kn+1}.$$

于是存在 j_k, 使得 B_{j_k} 包含了长为 $k+1$ 的等差数列.

因为 $B_1,\cdots,B_l$ 是 $\mathbb{N}$ 的有限剖分, 必定存在 j, 使得 B_j 包含任意长的等差数列. □

习 题 1.6

1. 证明：任何 syndetic 集合包含任意长的等差数列.

2. 设 (X,T) 为极小系统, $U \subset X$ 为非空开集. 证明：对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $x \in U$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $T^n x, T^{2n} x, \cdots, T^{kn} x \in U$.

3. 设 $G = \{T_1, \cdots, T_l\}$ 为作用于紧致度量拓扑群 X 上的交换群. 证明：所有点满足定理 1.6.5 的结论.

4. 证明多重 van der Waerden 定理：如果 $\mathbb{N}^m = C_1 \bigcup \cdots \bigcup C_r$ 为有限剖分, 那么存在某 $j \in \{1, 2, \cdots, r\}$, 对 $\mathbb{N}^m$ 的任意有限集 F, 存在 $a \in \mathbb{N}^m$ 及 $b \in \mathbb{N}$, 使得 $bF + a \subset C_j$.

5. 设 $\mathcal{F}_{\text{vdw}}$ 为包含任意长等差数列的 $\mathbb{Z}_+$ 的子集全体. 证明 $\mathcal{F}_{\text{vdw}}$ 具有 Ramsey 性.

§1.7 注 记

本章的主要内容可参见文献 (Furstenberg, 1981; Weiss, 2000b) 以及黄文、叶向东、Steelfield, Blokh, Banks, Snoha, Kolyada 及 Trofimchuk 等人最近的文章. 其中, 定理 1.2.11 来自 Banks(1997). 定理 1.2.13, 1.2.15 和 1.3.11 来自 Furstenberg(1981). 对于定理 1.2.15 的证明, 我们引用了 Blokh 和 Steelfield (2002) 的一些结论. 定理 1.3.3 的证明来自 Weiss (2000b). 对于定理 1.3.5, 参见文献 (Gottshalk, 1944; Snoha et al., 2001). 定理 1.3.10 来自黄文和叶向东 (2005). 定理 1.3.13 引自 Weiss(2000b). 定理 1.3.14 引自 Kinoshita(1958). 定理 1.4.5 来源于 Petersen (1970) 和 Furstenberg (1967). 定理 1.4.11 可参见文献 (Glasner, 2004; 黄文等, 2004b). 最后, §1.6 的证明来源于 Petersen(1983) 及 Furstenberg(1981).

目前存在的关于抽象拓扑动力系统的著作大多是在一般群作用下进行的, 如文献 (Gottschalk-Hedlund, 1955; Ellis, 1969; Glasner, 1976; Bronstein, 1979; Auslander, 1988; Vries, 1993) 等. 其中最早开始系统研究拓扑动力系统的是 Gottshalk 和 Hedlund (1955), 这本著作引入了许多沿用至今的概念. 如果需要系统了解一般群作用下的拓扑动力系统理论的基本概念和结论, 文献 (Glasner, 1976; Auslander, 1988; Vries, 1993) 都是很好入门书籍. 关于涉及到传递性、混合性以及不变集的进一步内容可以参见 Akin(1993), Akin(1997), 张景中等 (1992) 等著作. 其中专著 (Akin, 1993; Akin, 1997) 对这几个主题进行了非常广泛与细致的讨论. 另外, 关于传递性的讨论, 还可以参见综述性文章 (Kolyada-Snoha, 1997). 对于涉及多重回复定理相关的内容, 最好的参考文献无疑是 (Furstenberg, 1981). 也可以参见几篇原始的文章, 如文献 (Furstenberg-Weiss, 1979; Furstenberg, 1981b) 等. 关于这个主题最近几年的工作, 可以参见文献 (Bergelson, 1996; Bergelson-Leibman, 1996; McCutcheon, 1999) 等.

第 2 章　遍历论基础

本章介绍一些将在后文中用到的遍历论中的基本概念与结论. 我们在论述中强调拓扑动力系统与遍历论的关联, 尤其是它们在概念以及结论上的相似性.

§2.1　基本概念

拓扑动力系统研究的是拓扑群在拓扑空间上作用的定性理论, 而遍历理论研究的是群在可测空间上作用的定性理论. 对于拓扑动力系统, 在相当大的一类群作用下, 它具有一个相应与 Borel σ 代数的不变测度. 于是, 此时拓扑动力系统自然可以视为一个保测系统. 这样遍历理论成为研究拓扑动力系统的一个基本工具就不足为奇了. 后面我们可以看到, 拓扑动力系统中许多结论的遍历论的证明方法比拓扑的证明方法要更加简洁与清晰, 甚至有许多结论目前只有遍历论方法的证明, 而没有纯拓扑的证明.

随着讨论的展开, 我们可以看到, 在拓扑动力系统与遍历理论这两个动力系统的重要分支中有着众多对应的概念以及论述上十分相似的结论. 但是在处理问题的方法上, 它们却是大相径庭. 由于在遍历理论中, 我们总是可以忽略掉零测集, 所以相较而言, 这使得遍历论中的结论论述起来要更加简洁明了.

设 X 为一个集合. X 的一个 σ **代数** 是指 X 的一个子集族 $\mathcal{B}$, 满足: (1) $X \in \mathcal{B}$; (2) 如果 $B \in \mathcal{B}$, 则 $X \setminus B \in \mathcal{B}$; (3) 如果 $B_n \in \mathcal{B}, \forall n \geqslant 1$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

将偶对 $(X, \mathcal{B})$ 称为一个**可测空间**. $(X, \mathcal{B})$ 上的一个**有限测度** 是指满足下列条件的函数 $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$: (1) $\mu(\varnothing) = 0$; (2) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$, 其中 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{B}$ 中互不相交的元; (3) $\mu(X) < \infty$. 如果 $\mu(X) = 1$, 那么就称三元组 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为一个**概率空间**.

就像基与子基在拓扑中的作用一样, 在可测空间中也有类似的概念. X 的一个子集族 φ 称为**半代数**是指它满足下面条件: (1) $\varnothing \in \varphi$; (2) 如果 $A, B \in \varphi$, 则 $A \cap B \in \varphi$; (3) 如果 $A \in \varphi$, 则 $X \setminus A$ 为有限个 φ 中元的无交并. X 的子集族 $\mathcal{A}$ 称为一个**代数**是指它满足下列条件: (1) $\varnothing \in \mathcal{A}$; (2) 如果 $A, B \in \mathcal{A}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{A}$; (3) 如果 $A \in \mathcal{A}$, 则 $X \setminus A \in \mathcal{A}$. 可以证明, 一个半代数上的有限可加 (可数可加) 非负实值函数可以唯一地延拓到此半代数生成的代数上去. 而一个代数上可数可加的非负实值函数可以唯一地延拓到它生成的 σ 代数上.

在应用中, 我们对由代数 $\mathcal{A}$ 生成的 σ 代数 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 有一种比较常用的刻画. 集合 X 的一个子集族 M 称为一个**单调类**是指对 M 中的任何满足 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ 和 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ 的子集列, 都有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 和 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 仍在 M 中. 由于任何单调类的交仍为单调类, 所以 X 的任何子集族都可以生成一个单调类, 即所有包含它的单调类的交. 可证, 如果 $\mathcal{A}$ 为 X 上的代数, 那么 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 即为由 $\mathcal{A}$ 生成的单调类. 另外, 如果 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为概率空间而 $\mathcal{A}$ 为一个生成 $\mathcal{B}$ 的代数, 即 $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, 那么对任意 $\varepsilon > 0$ 以及 $B \in \mathcal{B}$, 存在 $A \in \mathcal{A}$, 使得 $\mu(A\Delta B) < \varepsilon$.

定义 2.1.1　设 $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$ 及 $(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)$ 为概率空间.

(1) 变换 $T: X_1 \to X_2$ 称为**可测的**是指它满足 $T^{-1}(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{B}_1$, 即对任意 $B_2 \in \mathcal{B}_2$ 有 $T^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}_1$;

(2) 变换 $T: X_1 \to X_2$ 称为**保测的**是指 T 为可测的且对任意 $B_2 \in \mathcal{B}_2$ 有 $\mu_1(T^{-1}(B_2)) = \mu_2(B_2)$;

(3) 变换 $T: X_1 \to X_2$ 称为**可逆保测变换**是指 T 为双射, 并且 T 和 T^{-1} 都是保测的.

由于我们主要讨论迭代 T^n, 所以多数情况下仅对 $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1) = (X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)$ 的情形感兴趣. 当 $T: X \to X$ 为 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上的保测映射时, 也称 T **保持** μ 或者称 μ 为 T **不变的**.

在遍历论中有两种类型的问题. 第一种是所谓的 “内在问题”, 主要研究保测变换本身以及决定何时两个系统是 “一样的”, 即同构的. 第二种问题是它在别的数学分支中的应用. 现在我们先定义何时两个系统称为 “一样的”.

定义 2.1.2　设 $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$ 和 $(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)$ 为两个概率空间, $T_1: X_1 \to X_1$ 和 $T_2: X_2 \to X_2$ 为保测变换. 称 $(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)$ 为 $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$ 的**因子**, 或者称 $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$ 为 $(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)$ 的**扩充**是指存在 $M_i \in B_i$, 使得 $\mu_i(M_i) = 1$, $T_i M_i \subset M_i$ $(i = 1,2)$ 以及存在保测变换 $\phi: M_1 \to M_2$ 满足 $\phi T_1(x) = T_2 \phi(x)$, $\forall x \in M_1$.

如果 ϕ 为一个可逆保测变换, 那么就称 T_1 **同构于** T_2.

根据定义, 如果 $\pi: (X,\mathcal{B},\mu,T) \to (Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 为扩充, 那么 $\mathcal{D}' = \{\pi^{-1}D : D \in \mathcal{D}\}$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数且 $T^{-1}(\mathcal{D}') \subset \mathcal{D}'$. 反之, 如果 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{B}$ 的满足 $T^{-1}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ 的子 σ 代数, 那么 $\pi = \mathrm{id} : (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{D},\mu)$ 为保测变换, 从而 $(X,\mathcal{D},\mu,T)$ 为 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的因子.

根据定义 2.1.1 去判定一个变换是否为保测的并非一件容易的事情, 下面的引理是更为常用的.

引理 2.1.3　设 $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$ 和 $(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)$ 为概率空间, $T: X_1 \to X_2$ 为变换, φ_2 为生成 $\mathcal{B}_2$ 的半代数. 如果对每个 $A_2 \in \varphi_2$, 都有 $T^{-1}(A_2) \in \mathcal{B}_1$ 且 $\mu_1(T^{-1}(A_2)) = \mu_2(A_2)$, 那么 T 为保测的.

证明 设 $\mathcal{C}_2=\{B\in\mathcal{B}_2:T^{-1}(B)\in\mathcal{B}_1,\mu_1(T^{-1}B)=\mu_2(B)\}$. 下证 $\mathcal{C}_2=\mathcal{B}_2$. 因为 $\varphi_2\subset\mathcal{C}_2$, 并且由 φ_2 生成的代数 $\mathcal{A}(\varphi_2)$ 中的元为有限个 φ_2 中元的无交并, 所以有 $\mathcal{A}(\varphi_2)\subset\mathcal{C}_2$. 易见 $\mathcal{C}_2$ 为单调类, 根据 $\mathcal{A}(\varphi_2)$ 生成的 σ 代数为由 $\mathcal{A}(\varphi_2)$ 生成的单调类的事实, 易得结论. □

设 $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1,T_1)$ 和 $(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2,T_2)$ 为两个保测系统. 令 $\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ 为由 $\{B_1\times B_2: B_i\in\mathcal{B}_i,\ i=1,2\}$ 生成的 σ 代数. 在 $\{B_1\times B_2:B_i\in\mathcal{B}_i,\ i=1,2\}$ 上定义 $\mu_1\times\mu_2$ 为 $\mu_1\times\mu_2(B_1\times B_2)=\mu_1(B_1)\mu_2(B_2)$, 它可以自然地延拓为 $\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ 上的一个测度. 由引理 2.1.3, 易验证 $(X_1\times X_2,\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2,\mu_1\times\mu_2,T_1\times T_2)$ 仍为一个保测系统, 称之为两个系统的**乘积系统**. 同理可以定义任意多个系统的乘积系统.

如果存在 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{B}$, 使得对任意 $\varepsilon>0$ 以及 $B\in\mathcal{B}$, 存在某 B_k, 使得 $\mu(B\Delta B_k)<\varepsilon$, 那么称概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 有一个**可数基**. 在本书中均假设概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 有可数基. 这等价于作为度量空间, Hilbert 空间 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 为可分的.

对任意概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$, 都可定义相应的 Banach 空间

$$L^p(\mu)=L^p(X,\mathcal{B},\mu)=\left\{f:X\to\mathbb{C}:f\ \text{可测且}\int|f|^p\mathrm{d}\mu<\infty\right\},\quad p\geqslant 1.$$

这些空间上的理论是处理可测空间问题的一类重要工具. 设 $L^0(X,\mathcal{B},\mu)$ 为 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上可测复值函数全体的集合 (在我们涉及到泛函空间上, 两个函数相等是指它们几乎处处相等) 并且以 $L^0_R(X,\mathcal{B},\mu)$ 记 $L^0(X,\mathcal{B},\mu)$ 实值函数全体.

定义 2.1.4 假设 $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$ 及 $(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)$ 为概率空间, $T:X_1\to X_2$ 为保测映射. 诱导算子 $U_T:L^0(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)\to L^0(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$ 定义为 $(U_Tf)(x)=f(Tx)$, $f\in L^0(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)$, $x\in X_1$.

易见 U_T 为线性的且 $U_TL^0_R(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)\subset L^0_R(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$. 事实上, 有 $U_TL^p_R(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)\subset L^p_R(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$. 研究 U_T 的理论称为 T 的**谱理论**, 后面我们会看到它在统一理解遍历性及混合性等概念上有着重要作用.

下面我们陈述一些经常用到的基本结论.

定理 2.1.5 (单调收敛定理) 设 $f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots$ 为概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上一列递增实值可积函数. 如果 $\left\{\int f_n\mathrm{d}\mu\right\}$ 有界, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ 存在 a.e., 可积并有 $\int(\lim f_n)\mathrm{d}\mu=\lim\int f_n\mathrm{d}\mu$. 如果 $\left\{\int f_n\mathrm{d}\mu\right\}$ 为无界的, 那么要么 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ 在一个正测集上无限, 要么 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ 不可积.

定理 2.1.6 (Fatou 引理) 设 $\{f_n\}$ 为概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上一列可测实值函数且下界被一个可积函数控制. 如果 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu<\infty$, 则 $\liminf\limits_{n\to\infty}f_n$ 为可积的且 $\int\liminf\limits_{n\to\infty}f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu$.

定理 2.1.7 (控制收敛定理)　如果 $g: X \to \mathbb{R}$ 为可积的且函数列 $\{f_n\}$ 满足 $|f_n| \leqslant g$ a.e. $(n \geqslant 1)$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ a.e., 那么 f 是可积的并且 $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$.

设 $(X, \mathcal{B})$ 为可测空间, μ 与 m 是 $(X, \mathcal{B})$ 上的两个概率测度. 称 μ 相对于 m 是**绝对连续的**是指一旦 $m(B) = 0$, 则 $\mu(B) = 0$. 记为 $\mu \prec m$.

定理 2.1.8 (Radon-Nikodym 定理)　设 μ, m 为可测空间 $(X, \mathcal{B})$ 上两个概率测度. 则 $\mu \prec m$ 当且仅当存在 $f \in L^1(m)$, 使得 $f \geqslant 0$, $\int f \mathrm{d}m = 1$ 且 $\mu(B) = \int_B f \mathrm{d}m$, $\forall B \in \mathcal{B}$. 这个函数 f 是唯一的 (几乎处处的意义下), 称为 μ 相对于 m 的 Radon-Nikodym 导数.

与绝对连续相 "对立" 的一个概念是互异性. $(X, \mathcal{B})$ 上两个概率测度 μ, m 称为**互异的** (记为 $\mu \perp m$) 是指存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $\mu(B) = 0$ 且 $m(B) = 1$. 我们有如下定义:

定理 2.1.9 (Lebesgue 分解定理)　设 μ, m 为 $(X, \mathcal{B})$ 上两个概率测度, 则存在 $p \in [0, 1]$ 以及概率测度 μ_1, μ_2, 使得 $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$ 且 $\mu_1 \prec m$, $\mu_2 \perp m$. 其中数 p 以及测度 μ_1, μ_2 是唯一决定的.

习　题　2.1

1. 设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为概率空间. 记 $\overline{\mathcal{B}}$ 为所有形如 $B \Delta F$, 其中 $B \in \mathcal{B}$ 而 F 为 $\mathcal{B}$ 中零测集的集合全体, $\overline{\mu}$ 定义为 $\overline{\mu}(B \Delta F) = \mu(B)$. 证明 $(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu})$ 为完备的概率空间. $(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu})$ 称为 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的完备化.
2. 设 $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ 为可逆的保测变换. 证明 U_T 为酉算子.

§2.2　遍历及遍历定理

在第 1 章我们已经看到, 如果 $T: X \to X$ 为传递的动力系统, U 为满足 $T^{-1}(U) \subset U$ 的非空开集, 那么 U 在 X 中稠密, 即 U 比较 "大". 于是自然要问在遍历论中, 与拓扑动力系统中传递性相对应的概念是什么.

设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为一个保测系统, 对任意满足 $\mu(A)\mu(B) > 0$ 的 $A, B \in \mathcal{B}$, 定义

$$N(A, B) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \mu(A \cap T^{-n}B) > 0\}.$$

定义 2.2.1　设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统. 则 T 为**遍历**的当且仅当对任意满足 $T^{-1}B = B$ 的 $B \in \mathcal{B}$, 必有 $\mu(B) = 0$ 或 $\mu(B) = 1$ 成立.

于是就像传递性一样, 遍历性体现的是系统的一种不可分割性. 关于遍历性, 我们有众多等价刻画.

定理 2.2.2 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, 则以下命题等价:

(1) T 为遍历的;

(2) $\mathcal{B}$ 中元 B 如满足 $\mu(T^{-1}B\Delta B)=0$, 则必有 $\mu(B)=0$ 或 $\mu(B)=1$;

(3) 对任意满足 $\mu(A)>0$ 的 $A\in\mathcal{B}$, 有 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}A)=1$[①];

(4) 对任意满足 $\mu(A)\mu(B)>0$ 的 $A,B\in\mathcal{B}$, 有 $N(A,B)\neq\varnothing$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $B\in\mathcal{B}$ 满足 $\mu(T^{-1}B\Delta B)=0$. 下面构造集合 $B_\infty\in\mathcal{B}$, 使得 $T^{-1}(B_\infty)=B_\infty$ 且 $\mu(B\Delta B_\infty)=0$. 对任意 $n\geqslant 0$, 由于 $T^{-n}B\Delta B\subset\bigcup_{i=0}^{n-1}T^{-(i+1)}B\Delta T^{-i}B=\bigcup_{i=0}^{n-1}T^{-i}(B\Delta T^{-1}B)$, 所以 $\mu(T^{-n}B\Delta B)=0$.

令 $B_\infty=\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}T^{-i}B$. 由上面讨论, $\mu(B\Delta\bigcup_{i=n}^{\infty}T^{-i}B)\leqslant\sum\limits_{i=n}^{\infty}\mu(T^{-1}B\Delta B)=0$, $\forall n\geqslant 0$. 因为对每个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $(\bigcup_{i=n}^{\infty}T^{-i}B)\Delta B$ 测度为 0, 有 $\mu(B_\infty\Delta B)=0$, 于是 $\mu(B_\infty)=\mu(B)$. 因为 $T^{-1}(B_\infty)=B_\infty$ 以及遍历性, 有 $\mu(B_\infty)=0$ 或 1, 继而 $\mu(B)=0$ 或 1.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $A\in\mathcal{B}$ 满足 $\mu(A)>0$. 令 $A_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}A$. 因为 $T^{-1}A_1\subset A_1$ 及 $\mu(T^{-1}A_1)=\mu(A_1)$, 所以 $\mu(T^{-1}A_1\Delta A_1)=0$. 由 (2), 得到 $\mu(A_1)=0$ 或 1. 因为 $\mu(A)>0$, 所以 $\mu(A_1)=1$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 $\mu(A)\mu(B)>0$. 由 (3), 有 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}A)=1$, 于是 $0<\mu(B)=\mu(B\bigcap\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}A)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B\cap T^{-n}A))$. 从而存在 $n\geqslant 1$, 使得 $\mu(B\cap T^{-n}A)>0$.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $B\in\mathcal{B}$ 满足 $T^{-1}B=B$. 如果 $0<\mu(B)<1$, 那么 $0=\mu(B\cap(X\setminus B))=\mu(T^{-n}B\cap(X\setminus B))$, $\forall n\geqslant 1$. 这与 (4) 矛盾. □

推论 2.2.3 如果 T 为遍历的, 那么对任意满足 $\mu(A)\mu(B)>0$ 的 $A,B\in\mathcal{B}$, $N(A,B)$ 为 syndetic 的.

证明 因为 $\mu(B)>0$, 由 T 的遍历性, 有 $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}T^{-i}B)=1$. 取 k 使得 $\mu(\bigcup_{i=1}^{k}T^{-i}B)>1-\dfrac{\mu(A)}{2}$. 这意味着对每个 $l\in\mathbb{Z}_+$, 有 $\mu(A\cap(\bigcup_{i=l+1}^{l+k}T^{-i}B))>0$, 亦即对每个 $l\in\mathbb{Z}_+$, 存在 $j\in[l+1,l+k]$, 使得 $\mu(A\cap T^{-j}B)>0$. 从而 $N(A,B)$ 为 syndetic 的. □

在第 1 章中, 我们证明了如果动力系统 (X,T) 为极小的, 那么对任意非空开集 U, 存在有限集 $A\subset\mathbb{Z}_+$, 使得 $\bigcup_{n\in A}T^{-n}U=X$. 类似地, 称一个保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为**类极小的**是指对每个满足 $\mu(B)>0$ 的 $B\in\mathcal{B}$, 存在有限集 $A\subset\mathbb{Z}_+$, 使得 $\mu(\bigcup_{n\in A}T^{-n}B)=1$. 可证, 类极小的保测系统共轭于等分布测度的周期轨 (见习题 2.7).

在上节已经定义了算子 U_T, 由此可以自然地定义特征值与特征函数.

定义 2.2.4 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, 称复数 λ 为 T 的特征值, 如果它为算

① 利用 $\mathbb{Z}_+$ 的序列 $\{p_n\}$ 和 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-p_n}A)=1$ 可以刻画其他性质, 见 Kuang-Ye(2005).

子 U_T 的特征值, 即存在非零函数 $f \in L^2(\mu)$, 使得 $U_T f = \lambda f$. 这个函数 f 称为相应于特征值 λ 的特征函数.

下面的定理指出遍历性可以由特征函数来刻画.

定理 2.2.5 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, 则以下命题为等价的:

(1) T 为遍历的;

(2) 如果 $f \in L^2(\mu)$ 满足 $U_T f = f$, 那么 f 为常值 a.e..

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 假设 T 为遍历的且 $f \in L^2(\mu)$. 不妨设 f 为实值的 (对于复值映射, 可以分实部与虚部讨论). 对 $k \in \mathbb{Z}$ 及 $n > 0$, 令

$$X(k,n) = \{x : k/2^n \leqslant f(x) < (k+1)/2^n\} = f^{-1}([k/2^n, (k+1)/2^{n+1})).$$

有

$$T^{-1}X(k,n)\Delta X(k,n) \subset \{x : f \circ T(x) \neq f(x)\},$$

继而 $\mu(T^{-1}X(k,n)\Delta X(k,n)) = 0$. 根据定理 2.2.2, 有 $\mu(X(k,n)) = 0$ 或 1.

对每个 n, $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X(k,n) = X$ 为无交并, 于是存在唯一一个 k_n, 使得 $\mu(X(k_n,n)) = 1$. 令 $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X(k_n,n)$, 则 $\mu(Y) = 1$ 且 f 在 Y 上为常数, 即 f 为常值 a.e..

(2) $\Rightarrow$ (1) 假设 $B \in \mathcal{B}$ 及 $T^{-1}B = B$. 因为 $U_T 1_B = 1_B$, 有 1_B 为常值 a.e.. 即 $\mu(B) = 0$ 或 1. 所以 T 为遍历的. □

根据定理 2.2.5 有

例 2.2.6 设 S^1 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆周, $T: S^1 \to S^1$ 为其上的无理旋转. 设 μ 为 $\mathcal{B}(S^1)$ 上规范化的 Lebesgue 测度, 则 $(S^1, \mathcal{B}(S^1), \mu, T)$ 为遍历的.

证明 首先证明 μ 为 T 不变的. 如果 B 为 S^1 上的区间, 那么有 $\mu(B) = \mu(T^{-1}B)$. 因为 S^1 的区间全体是一个生成 $\mathcal{B}$ 的半代数. 根据定理 2.1.3, μ 为不变的.

设 T 为在 $a \in S^1$ 下的旋转, $f \in L^2(\mu)$ 满足 $U_T f = f$. 令 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ 为其 Fourier 级数. 则 $f(az) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n a^n z^n$, 于是 $b_n(a^n - 1) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. 如果 $n \neq 0$, 那么 $b_n = 0$, 继而 f 为常值函数. 根据定理 2.2.5, T 为遍历的. □

正如我们所看到, 遍历系统是一类 "不可分割" 的保测变换. 我们自然希望任何保测系统均可分解为若干遍历子系统的和. 事实上也的确如此, 我们将在 §2.7 讨论这个问题.

运用 Radon-Nikodym 定理, 我们可以定义条件期望. 设 $(X, \mathcal{B}, m)$ 为概率空间, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数. 下面定义**条件期望**算子 $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{C}) : L^1(X, \mathcal{B}, m) \to L^1(X, \mathcal{C}, m)$. 如果

$f \equiv 0$, 定义 $\mathbb{E}(f|\mathcal{C}) \equiv 0$; 如果 $f \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$ 为非负实值函数且 $a = \int_X f\mathrm{d}m > 0$, 则 $\mu_f(C) = a^{-1}\int_C f\mathrm{d}m$ 定义了 $(X, \mathcal{C}, m)$ 上的一个概率测度, 并且 μ_f 相对于 m 为绝对连续的. 由 Radon-Nikodym 定理, 存在函数 $\mathbb{E}(f|\mathcal{C}) \in L^1(X, \mathcal{C}, m)$, 使得 $\mathbb{E}(f|\mathcal{C}) \geqslant 0$ 且 $\int_C \mathbb{E}(f|\mathcal{C})\mathrm{d}m = \int_C f\mathrm{d}m, \forall C \in \mathcal{C}$. 并且 $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ 为唯一的 a.e.. 如果 f 为任意的实值函数, 则分别考虑其正值与负值部分且线性的定义 $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$. 对于 f 为复值函数的时候, 将它按实部与虚部类似处理. 这样, 对任意 $f \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$, 我们找到了唯一的一个 $\mathcal{C}$ 可测函数 $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ 满足 $\int_C \mathbb{E}(f|\mathcal{C})\mathrm{d}m = \int_C f\mathrm{d}m, \forall\ C \in \mathcal{C}$.

遍历理论中的第一个重要的结论是由 Birkhoff 在 1931 年得到的. 对一个保测系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, 设 V_T 为 $L^2(\mu)$ 中全体 T 不变函数组成的闭子空间而 $\mathcal{B}_T = \{B \in \mathcal{B} : T^{-1}B = B\}$.

定理 2.2.7 (Birkhoff *遍历定理*) *设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, $f \in L^1(\mu)$. 则 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ 几乎处处收敛于函数 $f^* = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_T)$. 尤其当 T 遍历的时候, $f^* = \int f\mathrm{d}\mu$.*

证明 设 $A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$. 对 $\phi \in L^1(\mu)$, 令

$$M_n\phi = \max\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \phi \circ T^j : 1 \leqslant k \leqslant n\right\},$$

此时易见, $A_n\phi \leqslant \frac{1}{n}M_n\phi$. 设

$$A = A(\phi) = \{x \in X : \sup_n M_n\phi(x) = \infty\} \in \mathcal{B}_T.$$

对于任意 $x \in A^c$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n\phi(x) \leqslant 0.$$

注意 $M_n\phi$ 为递增函数列, 并且

$$M_n\phi(Tx) = \max\left\{\sum_{j=1}^{k-1} \phi(T^j x) : 2 \leqslant k \leqslant n+1\right\}.$$

于是有

$$M_{n+1}\phi(x) - M_n\phi(Tx) = \phi(x) - \min\{0, M_n\phi(Tx)\} \geqslant \phi(x).$$

这样, $M_n\phi(Tx)$ 与 $M_{n+1}\phi(x)$ 在同一 k 值取到时, 它们相差一个 $\phi(x)$; 或者

$$M_{n+1}\phi(x) = \phi(x) > \phi(x) + M_n\phi(Tx),$$

后者当且仅当 $M_n\phi(Tx) < 0$ 时成立.

于是在集合 A 上, 序列 $M_{n+1}\phi(x) - M_n\phi(Tx)$ 递减趋于 ϕ, 且由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$0 \leqslant \int_A (M_{n+1}\phi - M_n\phi)\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A (M_{n+1}\phi - M_n\phi \circ T)\mathrm{d}\mu \to \int_A \phi \mathrm{d}\mu.$$

设 $f \in L^1(\mu)$ 且 $\varepsilon > 0$ 取定, 且令 $\phi = f - f^* - \varepsilon$. 因为 $A = A(\phi) \in \mathcal{B}_T$, 有 $\int_A f\mathrm{d}\mu = \int_A f^*\mathrm{d}\mu$, 于是

$$\int_A \phi\mathrm{d}\mu = \int_A (f - f^* - \varepsilon)\mathrm{d}\mu = -\varepsilon\mu(A) \leqslant 0,$$

这样 $\int_A \phi\mathrm{d}\mu = 0$, 从而 $\mu(A(\phi)) = 0$. 所以

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n\phi(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in X \text{ a.e.}.$$

由于 f^* 为 T 不变的, $A_n\phi = A_n f - f^* - \varepsilon$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n f(x) \leqslant f^* + \varepsilon.$$

最后, 对 $-f$ 同样讨论可得

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n f(x) \geqslant f^* - \varepsilon.$$

这样完成了整个证明. □

下面的定理是定理 2.2.7 的推论.

定理 2.2.8 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为遍历系统, $f, g \in L^2(\mu)$, 那么

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \int f(x) g\circ T^n(x)\mathrm{d}\mu(x) \to \int f(x)\mathrm{d}\mu(x) \int g(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

推论 2.2.9 T 为遍历的当且仅当对任意 $A, B \in \mathcal{B}$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

证明　设 T 为遍历的. 令 $f=1_A$, 运用定理 2.2.7, 得到 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}1_A(T^i(x))\to\mu(A)$ a.e.. 乘上 1_B 即为 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}1_A(T^i(x))1_B\to\mu(A)1_B$. 由控制收敛定理得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(T^{-i}A\cap B)=\mu(A)\mu(B).$$

反之, 设 $T^{-1}E=E$, $E\in\mathcal{B}$. 令 $A=B=E$, 由条件即有 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(E)\to\mu(E)^2$. 于是 $\mu(E)=\mu(E)^2$. 这样就有 $\mu(E)=0$ 或 1. 所以 T 为遍历的. □

设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $E\in\mathcal{B}$. 对 $x\in X$, 一个自然的问题是: 其轨道 $\mathrm{orb}(x,T)$ 将以何种频率进入集合 E? 明显地, $T^i(x)\in E$ 当且仅当 $1_ET^i(x)=1$, 于是 $x,Tx,\cdots,T^{n-1}x$ 在 E 中的个数就等于 $\sum_{i=0}^{n-1}1_ET^i(x)$. 取平均即为 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}1_ET^i(x)$, 如果此时 T 为遍历的, 那么由遍历定理就有 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}1_ET^i(x)\to\mu(E)$ a.e..

根据定理 2.2.7, 可以证明:

定理 2.2.10 (von Neumann 的 L^p 遍历定理)　*设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $1\leqslant p<\infty$. 如果 $f\in L^p(\mu)$, 那么存在 $f^*\in L^p(\mu)$ 满足 $f^*\circ T=f^*$ a.e. 且*

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(T^i(x))-f^*(x)\right\|_p\to 0.$$

习　题　2.2

1. 设 G 为紧致拓扑群, 证明存在 $\mathcal{B}(G)$ 上的一个正则概率测度 μ 满足 $\mu(xE)=\mu(E)$, $\forall x\in G$, $\forall E\in\mathcal{B}(G)$(这个测度称为**Haar 测度**). 同时证明: G 上的旋转 $T(x)=ax$ 为遍历的当且仅当 $\{a^n\}_{-\infty}^{\infty}$ 在 G 中稠密. 尤其 T 为遍历的, 则 G 为交换群.

2. 设 $k\geqslant 2$ 为取定的整数, $(p_0,\cdots,p_{k-1})$ 为正值概率向量, 即 $p_i>0$ 且 $\sum_{i=0}^{k-1}p_i=1$. 记 $(Y,2^Y,\mu)$ 为概率空间, 其中 $Y=\{0,1,\cdots,k-1\}$, 2^Y 为 Y 的幂集并且点 i 取测度 p_i. 设 $(X,\mathcal{B},m)=\prod_{-\infty}^{\infty}(Y,2^Y,\mu)$ 且 T 为 X 上转移. 称系统 T 为**双边** $(p_0,\cdots,p_{k-1})$ **转移**, 证明它为遍历的.

3. 证明定理 2.2.8, 并且证明逆命题也成立.

4. 给出定理 2.2.10 的证明.

§2.3 测度混合性

我们已经看到遍历系统为不可分割的, 并且对任意正测集, 其原像轨道将覆盖几乎整个空间. 本节将介绍一些比遍历性更强的性质, 具有这些性质的系统将有更为复杂的动力学性状.

定义 2.3.1 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为一个保测系统.

(1) 如果 $(X\times X,\mathcal{B}\times\mathcal{B},\mu\times\mu,T\times T)$ 为遍历的, 那么称 T 为**(测度) 弱混合的**;

(2) 如果对任意 $A,B\in\mathcal{B}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A\cap T^{-n}B)=\mu(A)\mu(B),$$

那么称 T 为**(测度) 强混合的**.

从定义易见强混合蕴含弱混合, 而弱混合蕴含遍历性. 在刻画弱混合前, 我们需要一些准备. 设 S 为 $\mathbb{Z}_+$ 的子集, 定义

$$\overline{d}(S)=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}|S\cap\{0,1,\cdots,n-1\}|$$

及

$$\underline{d}(S)=\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}|S\cap\{0,1,\cdots,n-1\}|.$$

二者分别称为 S 的**上密度**和**下密度**. 如果 $\overline{d}(S)=\underline{d}(S)=d$, 那么称 S 具有**密度**d. 记 $\mathcal{F}_{\mathrm{d}1}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 中密度为 1 的子集全体组成的集合.

引理 2.3.2 设 $\{a_n\}$ 为实有界序列, 则以下等价:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|a_i|=0$;

(2) 存在 $\mathbb{N}$ 的零密度集 J, 使得 $\lim\limits_{n\notin J}a_n=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|a_i|^2=0$.

下面的定理提供了一种验证一个保测系统为遍历、弱混合还是强混合的方法.

定理 2.3.3 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, φ 为生成 $\mathcal{B}$ 的半代数. 则

(1) T 为遍历的当且仅当对任意 $A,B\in\varphi$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(A\cap T^{-i}B)=\mu(A)\mu(B);$$

(2) T 为弱混合的当且仅当对任意 $A,B\in\varphi$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|\mu(A\cap T^{-i}B)-\mu(A)\mu(B)|=0;$$

(3) T 为强混合的当且仅当对任意 $A, B \in \varphi$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

定理 2.3.4 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统. 则下列命题等价:

(1) T 为弱混合的, 即 $T \times T$ 为遍历的;

(2) 对任意 $A, B \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-i}B) - \mu(A)\mu(B)| = 0;$$

(3) 对任意 $A, B \in \mathcal{B}$, 存在 $J \in \mathcal{F}_{\text{d1}}$, 使得 $\lim\limits_{n\in J} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 T 为弱混合的, 我们说明对任意 $A, B \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-i}B) - \mu(A)\mu(B)|^2 = 0$$

成立. 由推论 2.2.9, 有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-i}B) \to \mu(A)\mu(B).$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-i}B)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\mu \times \mu)(A \times A) \cap (T \times T)^{-i}(B \times B) \\ &\to (\mu \times \mu)(A \times A)(\mu \times \mu)(B \times B) \\ &= \mu(A)^2\mu(B)^2.\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \{\mu(A \cap T^{-i}B) - \mu(A)\mu(B)\}^2 \\ =&\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \{\mu(A \cap T^{-i}B)^2 - 2\mu(A \cap T^{-i}B)\mu(A)\mu(B) + \mu(A)^2\mu(B)^2\} \\ \to& 2\mu(A)^2\mu(B)^2 - 2\mu(A)^2\mu(B)^2 = 0.\end{aligned}$$

于是由引理 2.3.2 (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (3) 由引理 2.3.2 即有结论.

(3) $\Rightarrow$ (1) 对正测集 $A, B, C, D \in \mathcal{B}$, 存在密度为 1 的集合 $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{Z}_+$, 使得

$$\lim_{n\in J_1}\mu(A\cap T^{-n}B)=\mu(A)\mu(B)>0,$$
$$\lim_{n\in J_2}\mu(C\cap T^{-n}D)=\mu(C)\mu(D)>0.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\in J_1\cap J_2}(\mu\times\mu)\{(A\times C)\cap(T\times T)^{-n}(B\times D)\}&=\lim_{n\in J_1\cap J_2}\mu(A\cap T^{-n}B)\mu(C\cap T^{-n}D)\\&=\mu(A)\mu(B)\mu(C)\mu(D)\\&=(\mu\times\mu)(A\times C)(\mu\times\mu)(B\times D).\end{aligned}$$

由引理 2.3.2, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|(\mu\times\mu)\{(A\times C)\cap(T\times T)^{-n}(B\times D)\}-(\mu\times\mu)(A\times C)(\mu\times\mu)(B\times D)|=0.$$

因为可测方体生成 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 的半代数, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|(\mu\times\mu)(A_1\cap(T\times T)^{-n}B_1)-(\mu\times\mu)(A_1)(\mu\times\mu)(B_1)|=0$$

对任意 $A_1,B_1\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 成立. 由引理 2.3.3 这意味着 $T\times T$ 为遍历的. □

两个保测系统称为**弱不交的**是指它们的乘积系统为遍历的.

定理 2.3.5 *假设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, 那么 T 为弱混合的当且仅当 T 弱不交于任意遍历系统.*

证明 仅需证明必要性. 假设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为弱混合的且 $(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 为遍历的. 作为定理 2.2.8 的一个简单应用, 易见对任意 $f,g\in L^2(X,\mu)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\int f(x)g(T^nx)\mathrm{d}\mu(x)-\int f\mathrm{d}\mu\int g\mathrm{d}\mu\right\}^2\to 0,$$

且对任意 $f,g\in L^2(Y,\nu)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int f(x)g(T^nx)\mathrm{d}\nu(x)\to\int f\mathrm{d}\nu\int g\mathrm{d}\nu.$$

为证 $X\times Y$ 为遍历的, 需要证明对任意 $f\in L^2(X\times Y,\mu\times\nu)$, 均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(T^nx,S^ny)$ 弱收敛于 $\int f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$. 因为形如 $f(x,y)=g(x)h(y)$ 的函数的线性组合在空间 $L^2(X\times Y,\mu\times\nu)$ 中稠密, 仅需证明对任意 $g_1,g_2\in L^2(X,\mu)$ 和 $h_1,h_2\in L^2(Y,\nu)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int g_1(x)g_2(T^nx)\mathrm{d}\mu(x)\int h_1(y)h_2(S^ny)\mathrm{d}\nu(y)\to\int g_1\mathrm{d}\mu\int g_2\mathrm{d}\mu\int h_1\mathrm{d}\nu\int h_2\mathrm{d}\nu.$$

我们可以先对 g_1 为常值时证明结论, 然后对满足 $\int g_1 \mathrm{d}\nu = 0$ 的 g_1 给出证明, 最后给出一般情况的结论. 我们将详细的论述留给读者作为习题. □

需要注意的是, 对于拓扑动力系统, 类似于定理 2.3.5 的结论并不正确, 即存在拓扑弱混合系统并不弱交于任意拓扑传递系统 (参见第 4 章).

下面讨论弱混合系统谱方面的性质.

定义 2.3.6 称概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上保测系统 T 具有**连续谱**是指 1 为 T 唯一的特征值, 而它唯一的特征函数是常值函数.

对弱混合系统, 有

定理 2.3.7 如果 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为可逆保测系统, 则 T 为弱混合的当且仅当 T 有连续谱.

这个定理的证明我们会在第 7 章中给出.

第 1 章定义了拓扑 mild 混合, 并指出一个系统为拓扑 mild 混合的当且仅当它为 $(\mathcal{F}_{\mathrm{ip}} - \mathcal{F}_{\mathrm{ip}})^*$ 传递的. 在第 8 章, 我们将证明一个极小系统为拓扑 mild 混合的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}^*$ 传递的. 在遍历论方面, 定义

定义 2.3.8 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, 称 T 为**(测度)mild 混合的**是指对任意 A, $B \in \mathcal{B}$, 有

$$\mathrm{IP}^* - \lim \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

称可测函数 f 为**刚性的**是指存在序列 $n_k \geqslant 1$, 使得 $T^{n_k} f \to f$(在 $L^2(X)$ 中). 可以证明, 一个保测系统为 mild 混合的当且仅当它在 $L^2(X)$ 中没有非常值刚性函数 (Furstenberg, 1981). 我们将在第 8 章中讨论这个定理的拓扑对应.

习　题　2.3

1. 证明引理 2.3.2 和定理 2.3.3.
2. 证明紧致群上任何转移映射 $Tx = ax$ 都不可能为弱混合的.
3. 证明双边 $(p_0, \cdots, p_{k-1})$ 转移映射为强混合的.
4. 完成定理 2.3.5 的证明.

§2.4　不变测度

对于一个紧致度量空间 X, 它有一个自然的 σ 代数与之对应, 即由全体开集生成的 σ 代数 $\mathcal{B}(X)$. 对于一个动力系统 (X, T), 一个自然而且重要的问题是: 在 $\mathcal{B}(X)$ 上是否存在一个不变测度? 如果是, 那么就可以将遍历理论的方法运用到拓扑动力系统中. 幸运的是, 答案是肯定的. 我们将在这节中讨论这个问题.

设 $\mathcal{M}(X)$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上全体概率测度的集合. 易见, 集合 $\mathcal{M}(X)$ 为凸集. 设 $C(X)$ 为 X 到 $\mathbb{C}$ 上全体连续映射的集合, 取范数为 $||f|| = \max_{x \in X}\{|f(x)| : x \in X\}$.

引理 2.4.1 设 (X,T) 为动力系统. 则 $\mu=\nu\in\mathcal{M}(X)$ 当且仅当 $\int f\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\nu, \forall f\in C(X)$. 一个 $\mathcal{B}(X)$ 上的概率测度 μ 为不变的当且仅当 $\int f\mathrm{d}\mu=\int f\circ T\mathrm{d}\mu, \forall f\in C(X)$.

在 $\mathcal{M}(X)$ 上可以定义一个弱 * 拓扑, 使得 $\mu_n\to\mu$ 当且仅当 $\int f\mathrm{d}\mu_n\to\int f\mathrm{d}\mu$, $\forall f\in C(X)$. 事实上, 在这个拓扑下 $\mathcal{M}(X)$ 成为一个紧致度量空间. 为刻画它, 我们需要下面的定理:

定理 2.4.2 (Riesz 表示定理) 设 X 为紧致度量空间, $J: C(X)\to\mathbb{C}$ 为连续的正算子且 $J(1)=1$. 那么存在 $\mu\in\mathcal{M}(X)$, 使得 $J(f)=\int_X f\mathrm{d}\mu, \forall f\in C(X)$.

根据 Riesz 表示定理和引理 2.4.1, 我们得到, $\mu\to J_\mu$ 为从 $\mathcal{M}(X)$ 到 $C(X)$ 上规范正线性算子集合的双射. 并且易见这个映射还为仿射的. 这样, $\mathcal{M}(X)$ 可以视为 $C(X)^*$ 的单位球中的一个凸子集, 于是, $\mathcal{M}(X)$ 可赋予从 $C(X)^*$ 上弱 * 拓扑诱导过来的一个拓扑 (即上面提到的弱 * 拓扑).

现在我们可以证明:

定理 2.4.3 (Krylov-Bogolioubov 定理) 对任意动力系统 (X,T), 存在 $\mathcal{B}(X)$ 上的不变测度.

证明 对任意 $x\in X$, 令 δ_x 为测度集中在点 $\{x\}$ 上的测度, 即 $\delta_x(B)=1$, 当 $x\in B$ 时; $\delta_x(B)=0$, 当 $x\notin B$ 时. 令 $\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^i(x)}$, 设 μ 为 μ_n 在 $\mathcal{M}(X)$ 中的极限点, 即存在 $\{n_j\}$, 使得 $\mu_{n_j}\to\mu$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\int f\mathrm{d}\mu-\int f\circ T\mathrm{d}\mu\right|&=\lim_{j\to\infty}\left|\int f\mathrm{d}\mu_{n_j}-\int f\circ T\mathrm{d}\mu_{n_j}\right|\\&=\lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{n_j}\int\sum_{i=0}^{n_j-1}(f\circ T^{i+1}-f\circ T^i)\mathrm{d}\delta_x\right|\\&=\lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{n_j}\int(f\circ T^{n_j}-f)\mathrm{d}\delta_x\right|\\&\leqslant\lim_{j\to\infty}\frac{2||f||}{n_j}=0.\end{aligned}$$

所以 μ 为不变测度. □

记 $\mathcal{M}(X,T)\subset\mathcal{M}(X)$ 为全体 T 不变 Borel 概率测度, 而 $\mathcal{M}^e(X,T)\subset\mathcal{M}(X,T)$ 为全体遍历测度.

定理 2.4.4 设 (X,T) 为动力系统, 则

(1) $\mathcal{M}(X,T)$ 为 $\mathcal{M}(X)$ 的紧致子集;

(2) $\mathcal{M}(X,T)$ 为凸集;

(3) μ 为 $\mathcal{M}(X,T)$ 的端点当且仅当 T 为 $(X,\mathcal{B}(X),\mu)$ 上的遍历测度.

证明 (1) 设 $\{\mu_n\}_1^\infty$ 为 $\mathcal{M}(X,T)$ 中的序列且 $\mu_n \to \mu$. 那么

$$\int f\circ T\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int f\circ T\mathrm{d}\mu_n = \lim_{n\to\infty}\int f\mathrm{d}\mu_n = \int f\mathrm{d}\mu, \quad \forall f\in C(X).$$

于是 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$.

(2) 易证.

(3) 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 不是遍历的且 $A\in\mathcal{B}$ 满足 $T^{-1}A=A$, $0<\mu(A)<1$. 构造测度 μ' 及 μ'' 如下

$$\mu'(B)=\mu(B\cap A)/\mu(A), \quad \mu''(B)=\mu(B\setminus A)/\mu(X\setminus A).$$

那么 $\mu=\mu(A)\mu'+\mu(X\setminus A)\mu''$ 为非平凡的分解, 并且由于 $\mu'\neq\mu''$, μ 不是端点.

现设 μ 为遍历的, 且 $\mu=\alpha\mu'+(1-\alpha)\mu''$, 其中 $0<\alpha<1$. $\mu\geqslant\alpha\mu'$ 意味着 μ' 相对于 μ 是绝对连续的. 根据 Radon-Nikodym 定理, 存在唯一的 $f\in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$, 使得

$$\mu'(A)=\int_A f\mathrm{d}\mu.$$

令 $E=\{x\in X: f(x)>1\}$ 及 $F=\{x\in X: f(x)<1\}$. 可以说明 $\mu(E)=\mu(F)=0$. 这样 $f(x)=1$, a.e.. 即 $\mu=\mu'$, 从而 μ 为端点. □

由于 $\mathcal{M}(X,T)$ 为紧凸集, 根据 Choquet 表示定理, 可以用 $\mathcal{M}(X,T)$ 中的遍历元来表示 $\mathcal{M}(X,T)$ 中的元素. 亦即对任意 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 存在一个唯一的 $\mathcal{M}(X,T)$ 上的 Borel 测度 τ, 使得 $\tau(\mathcal{M}^e(X,T))=1$, 且对任意 $f\in C(X)$, 有

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_{\mathcal{M}^e(X,T)}\left(\int_X f(x)\ \mathrm{d}m(x)\right)\ \mathrm{d}\tau(m).$$

记 $\mu=\displaystyle\int_{\mathcal{M}^e(X,T)} m\ \mathrm{d}\tau(m)$, 且称之为 μ 的**遍历分解**.

受 Birkhoff 遍历定理的启发, 有如下定义:

定义 2.4.5 设 (X,T) 为动力系统及 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 点 $x\in X$ 称为 μ 一个**generic 点**是指对任意 $f\in C(X)$, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(T^i(x))\to\int f\mathrm{d}\mu.$$

下面定理说明, 如果 T 为遍历的, 那么就存在 "很多" 的 generic 点.

定理 2.4.6 设 (X,T) 为拓扑动力系统且 $\mu \in \mathcal{M}^e(X,T)$. 则存在 $Y \in \mathcal{B}(X)$, 使得 $\mu(Y)=1$, 并且 Y 的每个点都是 generic 点.

证明 取 $C(X)$ 的可数稠密子集 $\{f_k\}_1^\infty$. 根据 Birkhoff 遍历定理, 存在 $X_k \in \mathcal{B}(X)$, 使得 $\mu(X_k)=1$ 且

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_k(T^i(x)) \to \int f_k \mathrm{d}\mu, \quad \forall x \in X_k.$$

设 $Y=\bigcap_{k=1}^\infty X_k$, 则 $\mu(Y)=1$ 且

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_k(T^i(x)) \to \int f_k \mathrm{d}\mu, \quad \forall x \in Y, \forall k \geqslant 1.$$

对任意的 $f \in C(X)$, 用 $\{f_k\}_1^\infty$ 逼近即可得到结论. □

从定理 2.4.4 看到, 对于一个动力系统, $\mathcal{M}^e(X,T) \neq \varnothing$. 下面考虑一种特殊情况.

定义 2.4.7 设 (X,T) 为一个动力系统, 称 (X,T) 为**唯一遍历**的是指 $\mathcal{M}^e(X,T)$ 只有一个元素.

下面是唯一遍历性的一些刻画:

定理 2.4.8 设 (X,T) 为动力系统, 则以下命题等价:

(1) 对每个 $f \in C(X)$, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ 一致收敛到一个常值函数;

(2) 对任意 $f \in C(X)$, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ 逐点收敛到一个常值函数;

(3) 存在 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, 使得对任意 $f \in C(X)$ 及 $x \in X$, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \to \int f \mathrm{d}\mu$;

(4) T 为唯一遍历的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) 定义 $k: C(X) \to \mathbb{C}$, 使得

$$k(f)=\lim \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)).$$

由于 $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))\right| \leqslant \|f\|$, 易见 k 为连续线性算子. 并且 $k(1)=1$ 以及对 $f \geqslant 0$ 有 $k(f) \geqslant 0$. 这样就由 Riesz 表示定理存在 Borel 概率测度 μ, 使得 $k(f)=\int f \mathrm{d}\mu$. 由于

$k(f\circ T)=k(f)$, 于是 $\int f\circ T\,\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu$. 所以根据定理 2.4.1 就有 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 $\nu\in\mathcal{M}(X,T)$. 有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(T^i(x))\to f^*,\quad x\in X,$$

其中 $f^*=\int f\mathrm{d}\mu$. 对 ν 积分之, 根据有界收敛定理就有

$$\int f\mathrm{d}\nu=\int f^*\mathrm{d}\nu=f^*=\int f\mathrm{d}\mu,\quad f\in C(X).$$

于是根据定理 2.4.1 就有 $\nu=\mu$. 即 T 为唯一遍历的.

(4) $\Rightarrow$ (1) 如果 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(T^i(x))$ 一致收敛于一个常值, 那么此常值必为 $\int f\mathrm{d}\mu$, 其中 $\{\mu\}=\mathcal{M}(X,T)$. 假设 (1) 不成立, 那么存在 $g\in C(X)$, $\varepsilon>0$, 使得对任意 $N\in\mathbb{N}$, 存在 $n>N$ 及 $x_n\in X$, 使得

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}g(T^i(x_n))-\int g\mathrm{d}\mu\right|\geqslant\varepsilon.$$

如果设

$$\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^ix_n}.$$

那么 $\left|\int g\mathrm{d}\mu_n-\int g\mathrm{d}\mu\right|\geqslant\varepsilon$. 取 $\{\mu_n\}$ 的收敛子列 $\{\mu_{n_i}\}$. 如果 $\mu_{n_i}\to\mu_\infty$, 那么由引理 2.4.1, $\mu_\infty\in\mathcal{M}(X,T)$. 因为 $\left|\int g\mathrm{d}\mu_\infty-\int g\mathrm{d}\mu\right|\geqslant\varepsilon$, 所以 $\mu_\infty\neq\mu$. 这与 T 的唯一遍历性矛盾. □

定义 2.4.9 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. μ 的**支撑**定义为

$$\mathrm{supp}(\mu)=\{x\in X:\text{对 } x \text{ 的每个邻域 } U,\ \mu(U)>0\}.$$

一个不变测度的支撑有下性质:

定理 2.4.10 设 (X,T) 为拓扑动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$.

(1) $\mathrm{supp}(\mu)$ 为非空闭的不变集;

(2) 如果 μ 为遍历的, 那么 $(\mathrm{supp}(\mu),T)$ 为传递的;

(3) 如果 T 为唯一遍历的, 那么 $(\mathrm{supp}(\mu),T)$ 为极小的.

证明　(1) 如果 $\mathrm{supp}(\mu)$ 为空集, 那么由 X 的紧性, X 的测度为零. 于是 $\mathrm{supp}(\mu)$ 非空. 因为 $X\setminus\mathrm{supp}(\mu)$ 为开集, 所以 $\mathrm{supp}(\mu)$ 为闭集. 下面说明 $\mathrm{supp}(\mu)$ 为 T 不变的. 设 $x\in\mathrm{supp}(\mu)$ 及 U 为 Tx 的邻域. 因为 T 为连续的, 所以存在 x 的邻域 V, 使得 $V\subset T^{-1}U$. 这样就有 $\mu(U)=\mu(T^{-1}U)\geqslant\mu(V)>0$.

(2) 假设 μ 为遍历的. 则 $(\mathrm{supp}(\mu),\mathcal{B}(\mathrm{supp}(\mu)),\mu,T)$ 也为遍历的. 如果 U,V 为 $\mathrm{supp}(\mu)$ 的非空开集, 则 $\mu(U)\mu(V)>0$. 由遍历性, 存在 $n>0$, 使得 $\mu(U\cap T^{-n}V)>0$, 即 $N(U,V)\neq\varnothing$.

(3) 设 $Y\subset\mathrm{supp}(\mu)$ 为非空闭的不变子集. 根据定理 2.4.3, 存在 $\nu\in\mathcal{M}(Y,T)$, 使得 $\mathrm{supp}(\nu)\subset Y$. 因为 (X,T) 为唯一遍历的, $\nu=\mu$ 及 $Y=\mathrm{supp}(\mu)$. 所以 $(\mathrm{supp}(\mu),T)$ 为极小的. □

设 $\pi:X\to Y$ 为 (X,T) 到 (Y,S) 的因子映射. 对 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 定义 $\pi\mu$为满足 $\pi\mu(B)=\mu(\pi^{-1}B),\forall B\in\mathcal{B}(Y)$ 的测度. 有

定理 2.4.11　设 $\pi:X\to Y$ 为动力系统 (X,T) 到 (Y,S) 的因子映射.

(1) 如果 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 则 $\pi\mu\in\mathcal{M}(Y,S)$;

(2) 如果 $\nu\in\mathcal{M}(Y,S)$, 那么存在 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得 $\pi\mu=\nu$;

(3) 如果 $\nu\in\mathcal{M}^e(Y,S)$, 那么存在 $\mu\in\mathcal{M}^e(X,T)$, 使得 $\pi\mu=\nu$.

证明　(1) 易证.

(2) 设 $\nu\in\mathcal{M}(Y,S)$. 可以通过 π 将 $C(Y)$ 映入 $C(X)$, 即把 $f\in C(Y)$ 映为 $f\circ\pi\in C(X)$. 于是 ν 可以视为 $C(X)$ 的闭子空间 $\{f\circ\pi:f\in C(Y)\}$ 上的线性算子 J_ν, 即 $J_\nu(f\circ\pi)=\int_Y f\mathrm{d}\nu$. 易见 $J_\nu(1)=1$ 且 $||J_\nu||=1$. 根据 Hahn-Banach 定理, J_ν 可以扩充为 $C(X)$ 上的线性算子 J, 且满足 $||J||=1$, $J(f\circ\pi)=J_\nu(f\circ\pi)=\int_Y f\mathrm{d}\nu,\forall f\in C(Y)$. 特别地, $J(1)=1$. 下证 J 为正算子.

对 $f\in C(X)$, $f\geqslant 0$, 设 $a=||f||_\infty+1$. 则 $J(a-f)=a-J(f)\geqslant a-||f||_\infty\geqslant 1$ (因为 $|J(f)|\leqslant||f||_\infty$). 另外, $|J(a-f)|\leqslant||a-f||_\infty\leqslant a$ (因为 $f\geqslant 0$). 于是就有 $a\geqslant|J(a-f)|=J(a-f)=a-J(f)$, 从而 $J(f)\geqslant 0$.

由 Riesz 表示定理, 存在 $\mu'\in\mathcal{M}(X)$, 使得 $J(g)=\int_X g\mathrm{d}\mu',\forall g\in C(X)$. 特别地, 对任意 $f\in C(Y)$,

$$\int_Y f\mathrm{d}\pi\mu'=\int_X f\circ\pi\mathrm{d}\mu'=J(f\circ\pi)=J_\nu(f\circ\pi)=\int_Y f\mathrm{d}\nu.$$

这意味着 $\pi\mu'=\nu$.

设 $\mu_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} T^i\mu'$, 且令 μ 为 $\{\mu_k\}$ 在弱 * 拓扑下的极限点, 即存在 $\{k_j\}$, 使得 $\mu = \lim_{j\to\infty} \mu_{k_j}$. 则 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. 因为对任意 $f \in C(Y)$,

$$\begin{aligned}\int_Y f\mathrm{d}\pi\mu &= \int_X f\circ\pi\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{k_j}\sum_{i=0}^{k_j-1}\int_X f\circ\pi\mathrm{d}T^i\mu' \\ &= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{k_j}\sum_{i=0}^{k_j-1}\int_X f\circ\pi(T^ix)\mathrm{d}\mu'(x) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{k_j}\sum_{i=0}^{k_j-1}\int_X f\circ S^i(\pi x)\mathrm{d}\mu'(x) \\ &= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{k_j}\sum_{i=0}^{k_j-1}\int_Y f\circ S^i(y)\mathrm{d}\nu(y) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{k_j}\sum_{i=0}^{k_j-1}\int_Y f(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y f\mathrm{d}\nu,\end{aligned}$$

得到 $\pi\mu = \nu$.

(3) 现设 $\nu \in \mathcal{M}^e(X,T)$. 易验证 $K = \pi^{-1}(\nu)$ 为 $\mathcal{M}(X,T)$ 的非空闭凸集. 于是我们仅需证明断言: K 的端点也为 $\mathcal{M}(X,T)$ 的端点. 否则, K 的某端点 μ' 可以表示为 $\mu' = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$, 其中 $0 < p < 1$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(X,T)$ 至少有一个不在 K 中. 于是 $\nu = p\pi\mu_1 + (1-p)\pi\mu_2$, 且 $\pi\mu_1 = \pi\mu_2 = \nu$, 矛盾! □

运用定理 2.4.3, 我们得到 Birkhoff 回复定理的另一个证明:

定理 2.4.12 设 (X,T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. 那么几乎所有点都是 T 的回复点.

证明 取 X 的可数基 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 记

$$B'_n = B_n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} T^{-j}B_n.$$

任何非回复点必属于某个 B'_n. 我们断言 $\mu(B'_n) = 0$. 实际上, 对任意 $A \in \mathcal{B}(X)$, 令 $A' = A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} T^{-j}A$. 则集合 A' 满足 $A' \cap T^{-n}A' = \varnothing, \forall n \geqslant 1$. 于是 $\mu(A') = 0$. 所以 $\mu(B'_n) = 0$, 继而 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n) = 0$. 于是 $\mu(\mathrm{Rec}(T)) = \mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n) = 1$. □

习 题 2.4

1. 运用遍历分解定理证明定理 2.4.11 (3).

2. 证明引理 2.4.1.

3. 设 (X,T) 为动力系统. 对 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, 记 $G(\mu)$ 为全体 generic 点的集合. 证明: 如果 $\mu_1 \neq \mu_2 \in \mathcal{M}^e(X,T)$, 那么 $G(\mu_1) \bigcap G(\mu_2) = \varnothing$.

4. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为遍历的, 请给出一个类似定理 1.2.11 的一个命题的论述, 且证明你的结论.

5. 设 X 为紧致度量空间且 $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}(X)$, $n \geqslant 1$. 证明: 以下论述为等价的:

(i) $\mu_n \to \mu$ 在弱 * 拓扑下成立;

(ii) 对 X 的每个闭子集 F, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$;

(iii) 对 X 的每个开子集 U, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf \mu_n(U) \geqslant \mu(U)$;

(iv) 对每个满足 $\mu(\partial A)=0$ 的 $A\in\mathcal{B}$, 有 $\mu_n(A)\to\mu(A)$.

§2.5　Poincaré 序列

对于一个动力系统 (X,T), Birkhoff 回复定理说明, X 必有回复点. 对于保测系统, 有

定理 2.5.1 (Poincaré 回复定理)　*设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 如果 $A\in\mathcal{B}$ 满足 $\mu(A)>0$, 那么存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $\mu(A\cap T^{-n}A)>0$.*

证明　对于序列 $A, T^{-1}A, T^{-2}A,\cdots$, 如果 $A, T^{-1}A, T^{-2}A,\cdots$ 互不相交 (mod 0), 那么 $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}A)=\infty$. 于是存在 $i<j$, 使得 $\mu(T^{-i}A\cap T^{-j}A)>0$. 即 $\mu(A\cap T^{-(j-i)}A)>0$. □

Birkhoff 回复定理启发我们定义了回复集, 在这里类似地定义 Poincaré 序列:

定义 2.5.2　*$\mathbb{Z}_+$ 的一个子集 S 称为***Poincaré 序列***是指对任意保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 以及任意满足 $\mu(A)>0$ 的 $A\in\mathcal{B}$, 存在 $0<n\in S$, 使得 $\mu(A\cap T^{-n}A)>0$.*

于是 Poincaré 回复定理可以重述为: $\mathbb{Z}_+$ 为 Poincaré 序列. 设 $\Delta_{\inf}=\mathcal{F}_{\inf}-\mathcal{F}_{\inf}$, 任意 $S\in\Delta_{\inf}$ 称为**差集**. 完全类似于 Poincaré 回复定理的证明, 我们可以说明任意差集为 Poincaré 序列. 由于每个 thick 集包含了一个某个差集, 所以每个 thick 集也是 Poincaré 序列. 为刻画 Poincaré 序列, 我们需要下面的定义.

设 S 为 $\mathbb{Z}_+$ 的子集. S 的**上半 Banach 密度**定义为

$$BD^*(S)=\lim_{|I|\to+\infty}\sup\frac{|S\cap I|}{|I|},$$

其中 I 取遍 $\mathbb{Z}_+$ 所有子区间. 其**下半 Banach 密度**类似定义. 记 $\mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 中全体具有正上半 Banach 密度的序列的集合.

定理 2.5.3 (Furstenberg 对应原则)　*设 $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的全体有限子集的集合, 则*

(1) 如果 $E\subseteq\mathbb{Z}_+$ 满足 $BD^*(E)>0$, 那么存在保测系统 $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ 以及 $A\in\mathcal{A}$, 使得 $\mu(A)=BD^*(E)$, 进一步, 对任意 $\alpha\in\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$, 有

$$BD^*\left(\bigcap_{n\in\alpha}(E-n)\right)\geqslant\mu\left(\bigcap_{n\in\alpha}(T^{-n}A)\right);$$

(2) 设 $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ 为保测系统, $A \in \mathcal{A}$ 满足 $\mu(A) > 0$, 那么存在 $E \subseteq \mathbb{Z}_+$, 使得 $\overline{d}(E) \geqslant \mu(A)$ 且

$$\left\{\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+) : \bigcap_{n\in\alpha}(E-n) \neq \varnothing\right\} \subseteq \left\{\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+) : \mu\left(\bigcap_{n\in\alpha} T^{-n}A\right) > 0\right\}.$$

证明 (1) 设 $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, $T : X \to X$ 为转移映射: $Tx(n) = x(n+1)$. 取 $\mathbb{Z}_+$ 的区间列 I_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = \infty$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E \cap I_n|}{I_n} = BD^*(E).$$

令 $\xi = 1_E \in X$ 及 $A = \{x \in X : x(0) = 1\}$. 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{i\in I_n} 1_A(T^i\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{i\in I_n} 1_E(i) = BD^*(E).$$

设 $\mu_n = \dfrac{1}{|I_n|} \sum\limits_{i\in I_n} \delta_{T^i\xi}$. 不失一般性, 设 μ_n 弱收敛于 μ(否则取子列). 易证 μ 为不变测度, 并且

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{i\in I_n} 1_A(T^i\xi) = BD^*(E).$$

于是对任意 $\alpha = \{n_1, n_2, \cdots, n_k\} \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$, 就有

$$\begin{aligned}
&\mu(T^{-n_1}A \cap T^{-n_2}A \cap \cdots \cap T^{-n_k}A) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{i\in I_n} 1_{T^{-n_1}A\cap T^{-n_2}A\cap\cdots\cap T^{-n_k}A}(T^i\xi) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{i\in I_n} 1_{(E-n_1)\cap(E-n_2)\cap\cdots\cap(E-n_k)}(i) \\
&\leqslant BD^*((E-n_1) \cap (E-n_2) \cap \cdots \cap (E-n_k)).
\end{aligned}$$

(2) 对 $\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$, 令 $E_\alpha = \bigcap_{n\in\alpha} T^{-n}A$. 取 N 为所有具有零测度的 E_α 的并集. 由于它为可数个零测集的并, $\mu(N) = 0$. 令 $B = A \setminus N$. 根据定义, 我们易有断言: 对 $\alpha \in \mathcal{F}$, $\mu(\bigcap_{n\in\alpha} T^{-n}B) = 0$ 当且仅当 $\bigcap_{n\in\alpha} T^{-n}B = \varnothing$.

令 $f_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} 1_{T^{-i}B}$, 则对任意 $x \in X$ 和 n 有 $f_n \leqslant 1$. 于是由 Fatou 引理有

$$\int \lim_{n\to\infty} \sup f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \lim_{n\to\infty} \sup \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

于是存在 $x \in X$, 使得

$$\overline{d}(\{n : x \in T^{-n}B\}) = \lim_{n\to\infty} \sup f_n(x) \geqslant \lim_{n\to\infty} \sup \int \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{T^{-i}B}\mathrm{d}\mu = \mu(B) = \mu(A).$$

令 $E = \{n : x \in T^{-n}B\}$. 则对 $\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$, 如果 $k \in \bigcap_{n\in\alpha}(E-n)$, 那么 $T^k x \in \bigcap_{n\in\alpha} T^{-n}B$. 由前面的断言, 有 $\mu(\bigcap_{n\in\alpha}(T^{-n}A) > 0$. □

下面可以证明:

定理 2.5.4 *$R\subset\mathbb{Z}_+$ 为 Poincaré 序列当且仅当对任意 $E\in\mathcal{F}_{\rm pubd}$, $R\cap(E-E)\neq\varnothing$.*

证明 设 R 为 Poincaré 序列. 对 $E \in \mathcal{F}_{\rm pubd}$, 由定理 2.5.3, 存在保测系统 $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ 以及 $A \in \mathcal{A}$, 使得 $\mu(A) = BD^*(E) > 0$ 及 $BD^*(E\cap(E-n)) \geqslant \mu(A\cap T^{-n}A), \forall n \in \mathbb{N}$. 因为存在 $n \in R$, 使得 $\mu(A\cap T^{-n}A) > 0$, 有 $E\cap(E-n) \neq \varnothing$, 即 $n \in E-E$. 于是就有 $R\cap(E-E)\neq\varnothing$.

反之, 假设对任意 $E \in \mathcal{F}_{\rm pubd}$, 有 $R\cap(E-E)\neq\varnothing$. 设 $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ 为保测系统, $A \in \mathcal{A}$ 满足 $\mu(A) > 0$. 根据定理 2.5.3, 存在 $E \subset \mathbb{Z}_+$, 使得 $\overline{d}(E) \geqslant \mu(A)$, 且 $E\cap(E-n)\neq\varnothing$ 蕴含 $\mu(A\cap T^{-n}A) > 0$. 由假设, 存在 $n \in R\cap(E-E)$, 于是 $\mu(A\cap T^{-n}A) > 0$. 所以 R 为 Poincaré 序列. □

定理 2.5.4 的一个直接推论为

推论 2.5.5 *任何 Poincaré 序列为回复集. 尤其对任意 $S \in \mathcal{F}_{\rm pubd}$, $S-S$ 为 syndetic 的.*

证明 因为 syndetic 集合有正上半 Banach 密度, 所以任何 Poincaré 为回复集. 设 $S\in\mathcal{F}_{\rm pubd}$. 由定理 2.5.4, $S-S$ 与任意 Poincaré 序列相交非空. 因为 thick 集为 Poincaré 序列, 所以 $S-S$ 与所有 thick 集相交非空. 从而 $S-S$ 为 syndetic. □

需要注意的是, 存在非回复集的 Poincaré 序列 (参见文献 (Kriz, 1987)).

习 题 2.5

1. 对于保测系统给出一个类似于定理 2.4.12 的命题, 并证明你的结论.

2. 证明: 如果对任意 $\alpha \in (0,2\pi)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha s_k} = 0$ 成立, 那么 $\{s_k\}$ 为 Poincaré 序列. 提示: 参见文献 (Weiss, 2000b).

3. 证明: IP 集为 Poincaré 序列.

§2.6 E 系 统

在这一节, 我们讨论 E 系统.

定义 2.6.1 设 (X,T) 为动力系统. 称 (X,T) 为一个 **E 系统**是指它为传递的并且存在一个不变测度 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得 $\text{supp}(\mu)=X$.

回忆一下, M 系统是指它为传递的且极小点集稠密. 由定义即知, 任意 M 系统必为 E 系统. 在第 1 章, 我们给出了 M 系统的刻画. 对 E 系统, 有

定理 2.6.2 设 (X,T) 为传递系统, $x\in\text{Trans}_T$. 则 (X,T) 为 E 系统当且仅当对 x 的任意邻域 U, $N(x,U)$ 具有正上 Banach 密度.

证明 设 (X,T) 为 E 系统. 对 x 的任意邻域 U, 由遍历分解定理, 存在遍历测度 μ, 使得 $\mu(U)>0$. 运用 Birkhoff 遍历定理于 1_U(相对于 μ) 得到, 存在 $y\in U$, 使得 $N(y,U)$ 有正密度. 于是, 因为 $x\in\text{Trans}_T$, 易见 $N(x,U)$ 具有正上 Banach 密度.

现在设对 x 的任意邻域 U, $N(x,U)$ 具有正上 Banach 密度. 因为 $x\in\text{Trans}_T$, 我们知对于 X 的任意非空开集 V, 有 $BD^*(N(x,V))>0$.

设 $\{V_j\}_{j=1}^{+\infty}$ 为 X 的一组拓扑基. 令 $U_j=\text{cl}(V_j)$. 对于每个 j, 因为 $BD^*(N(x,U_j))>0$, 对每个 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $a_k(j)<b_k(j)$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{b_k(j)-a_k(j)}|N(x,U_j)\cap\{a_k(j),a_k(j)+1,\cdots,b_k(j)-1\}|>0$$

且

$$\lim_{k\to+\infty}(b_k(j)-a_k(j))=+\infty.$$

令 $\mu_k(j)=\dfrac{1}{b_k(j)-a_k(j)}\displaystyle\sum_{i=a_k(j)}^{b_k(j)-1}\delta_{T^ix}$ 以及 $\mu^j=\lim\limits_{i\to+\infty}\mu_{k_i}(j)$ 为 $\{\mu_k(j)\}_{k=1}^{+\infty}$ 在弱 * 拓扑下极限点. 易见 μ^j 为 (X,T) 的不变测度且

$$\begin{aligned}\mu^j(U_j)&\geqslant\limsup_{i\to+\infty}\mu_{k_i}(j)(U_j)\\&=\limsup_{i\to+\infty}\frac{1}{b_{k_i}(j)-a_{k_i}(j)}\sum_{i=a_{k_i}(j)}^{b_{k_i}(j)-1}\delta_{T^ix}(U_j)\\&=\limsup_{i\to+\infty}\frac{|N(x,U_j)\cap\{a_{k_i}(j),a_{k_i}(j)+1,\cdots,b_{k_i}(j)-1\}|}{b_{k_i}(j)-a_{k_i}(j)}>0.\end{aligned}$$

设 $\mu=\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\mu^j/2^j$, 则 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 且 $\text{supp}(\mu)=X$. 因为 (X,T) 为传递的, 所以 (X,T) 为 E 系统. □

设 $S\subset\mathbb{Z}_+$, S 的下 Banach 密度为 1 是指对任意 $a<1$, 存在 N, 使得对 $\mathbb{Z}_+$ 满足 $|I|\geqslant N$ 的区间段 I 成立 $|S\cap I|\geqslant a|I|$. 记 $\mathbb{Z}_+$ 的全体下 Banach 密度为 1 的集合为 $\mathcal{F}_{\text{lbd1}}$. 对于一个传递的非 E 系统, 有

定理 2.6.3　设 (X,T) 为传递系统, $x \in \text{Trans}_T$. 则 (X,T) 不是 E 系统当且仅当存在一个闭不变子集 $A \neq X$, 使得对 A 的任意邻域 U, $N(x,U) \in \mathcal{F}_{\text{lbd1}}$.

证明　首先设 (X,T) 不是 E 系统. 令 $A = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}(X,T)} \text{supp}(\mu)}$ 且设 U 为 A 闭邻域. 易见 A 为闭不变的. 我们断言 $A \neq X$. 实际上, 如果 $A = X$, 那么存在 X 的可数稠密子集 $\{x_i\}$, 使得 $x_i \in \text{supp}(\mu_i)$, 其中 $\mu_i \in \mathcal{M}(X,T)$. 令 $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i/2^i$, 则 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ 且 $\text{supp}(\mu) = X$, 矛盾! 于是 $A \neq X$. 下面证明 $N(x,U)$ 的下 Banach 密度为 1.

否则, $N(x, X \setminus U)$ 具有正上 Banach 密度. 根据定理 2.6.2 的证明, 存在 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, 使得 $\mu(X \setminus U) > 0$. 这与 A 的选取矛盾, 从而 $N(x,U) \in \mathcal{F}_{\text{lbd1}}$.

反之, 设存在闭不变子集 $A \neq X$, 使得对任意 A 开邻域 U, $N(x,U) \in \mathcal{F}_{\text{lbd1}}$. 因为 $A \neq X$, 易见 $x \notin A$. 取 A 邻域 U, 使得 $x \notin \overline{U}$, 且取 x 邻域 V, 使得 $U \cap V = \varnothing$. 明显, $N(x,V)$ 的上 Banach 密度为 0. 于是 (X,T) 不是 E 系统. □

在第 1 章, 我们定义了极端扩散性与扩散性, 现在定义另一种扩散系统.

定义 2.6.4　一个系统如果弱不交与任意 E 系统, 那么称之为**强扩散**的.

由于 M 系统必为 E 系统, 任意强扩散系统为扩散的.

我们已经证明过, 弱混合系统为极端扩散的. 下面说明: 弱混合 ⇒ 极端扩散 ⇒ 强扩散 ⇒ 扩散. 由于极小系统自然为 E 系统, 仅需证

定理 2.6.5　任何 E 系统为拓扑遍历的.

证明　设 (X,T) 为传递系统且 U, V 为非空开集. 取 k 使得 $U \cap T^{-k}V \neq \varnothing$, 且设 $U_0 = U \cap T^{-k}V$. 于是 $N(U,V) \supset k + N(U_0, U_0)$. 于是仅需证明对任意开集 U, $N(U,U)$ 为 syndetic 的.

我们证明 $N(U,U)$ 与任意 thick 相交即可. 根据 Poincaré 回复定理, $N(U,U)$ 与任意 Δ_{inf} 中元相交. 因为任意 thick 集包含了一个 Δ_{inf} 中集合, 所以 $N(U,U)$ 为 syndetic 的. 证毕. □

习　题　2.6

1. 证明 (X,T) 为强扩散的当且仅当它弱不交于任何有全支撑遍历测度的传递系统.

2. 设 (X,T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ 具有全支撑. 证明: μ 的任意 generic 点为传递点. 于是如果 μ 为遍历的, 那么就有$\mu(\text{Trans}_T) = 1$. 提示: 假设 x 为 generic 点且 $A = \overline{\text{orb}(x,T)}$. 构造某 f 且运用 $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i x \to \int f \text{d}\mu$ 去得到 $\mu(A) = 1$.

3. 构造一个 E 系统 (X,T) 以 μ 为其全支撑且满足 $\mu(X \setminus \text{Trans}_T) = 1$. 提示: 构造一个周期点稠密的子转移系统.

§2.7 多重回复定理及 Szemerédi 定理

这一节论述遍历论中的一些在后文中将用到的基本结论. 例如, 我们将介绍 Lebesque 空间、遍历分解、Rohlin 关于遍历系统扩充的斜积分解定理、积分分解定理、条件期望以及著名的保测系统的 Furstenberg-Zimmer 结构定理等. 作为应用, 我们运用 Furstenberg-Zimmer 结构定理去证明多重回复定理, 并由此证明组合中著名的 Szemerédi 定理.

定理 2.7.1 (Szemerédi 定理) 设 S 为 $\mathbb{Z}_+$ 具有正上 Banach 密度的子集, 则 S 包含了任意长的算术级数.

易见, 前面提到的 Waerden 定理是此定理的一个直接推论. 在第 1 章我们运用拓扑的多重回复定理给出了 Waerden 定理的证明, 此处我们运用遍历论的方法证明 Szemerédi 定理[②].

2.7.1 Lebesgue 空间

测度论中的一个重要特点是可忽略掉测度为零的集合. 例如, 在两个系统同构的定义中便体现了这种想法. 下面的结论是有关同构的一个基本定理.

定理 2.7.2 设 X 为完备可分度量空间, $\mathcal{B}(X)$ 为其 Borel σ 代数并且 m 为 $\mathcal{B}(X)$ 上满足 $m(\{x\}) = 0$, $\forall x \in X$ 的概率测度. 记 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), l)$ 为闭区间上由 Borel σ 代数构成的测度空间, 其中 l 为 Lebesgue 测度. 则 $(X, \mathcal{B}(X), m)$ 与 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), l)$ 为同构的. 如果记 $(X, \mathcal{B}_m(X), m)$ 为 $(X, \mathcal{B}(X), m)$ 的完备化, 那么 $(X, \mathcal{B}_m(X), m)$ 同构于 $([0,1], \mathcal{L}, l)$, 其中 $\mathcal{L}$ 为由 Lebesgue 可测集构成的 σ 代数 (它为 $\mathcal{B}_l([0,1])$ 的完备化).

如果在定理 2.7.2 的条件中, 把 m 对任何独点集为零测的这个条件去掉, 那么结论应改为: 存在 X 至多可数个点 $\{x_n\}_1^\infty$, 它们具有正测度, 并且此时 $(X, \mathcal{B}(X), m)$ 同构于至多可数集 $\{y_n\}_1^\infty$ 与 $([0,s], \mathcal{B}([0,s]), l)$ 的无交并, 其中 $\{y_n\}$ 有测度 $\{m(x_n)\}$ 而 $s = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} m(x_n)$.

下面是另一种处理忽略零测集的方法, 在数学上看或许更为自然, 但在应用上不是特别方便. 这种方法就是运用测度代数.

设 $(X, \mathcal{B}, m)$ 为概率空间. 在 $\mathcal{B}$ 上定义等价关系: 称 A 和 B 为等价的 $(A \sim B)$ 当且仅当 $m(A \Delta B) = 0$. 令 $\tilde{\mathcal{B}}$ 为其等价类空间, 那么在由 $\mathcal{B}$ 的交、并、补运算诱导过

② 最近 Green 和 Tao(2006) 证明了: 素数集包含了任意长的算术级数. 这是 Erdos 猜想: 如果 $\{p_n\} \subset \mathbb{N}$ 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_n = \infty$, 那么 $\{p_n\}$ 包含了任意长的算术级数的一个最新进展. 这也是 Tao 获 2006 年 Fields 奖的主要工作之一.

来的算子下, $\tilde{\mathcal{B}}$ 成为 Borel σ 代数. 由测度 m 诱导的 $\tilde{\mathcal{B}}$ 上的测度 $\tilde{m}$ 为 $\tilde{m}(\tilde{B}) = m(B)$ (其中 $\tilde{B}$ 为 B 所在的等价类). 偶对 $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{m})$ 称为**测度代数**.

依据上面的观点, 称 $(X_1, \mathcal{B}_1, m_1)$ 与 $(X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$ 为 "等价的" 是指它们诱导的测度代数为同构的.

定义 2.7.3 设 $(X_1, \mathcal{B}_1, m_1)$ 和 $(X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$ 为测度空间, 而 $(\widetilde{\mathcal{B}_1}, \widetilde{m_1})$ 与 $(\widetilde{\mathcal{B}_2}, \widetilde{m_2})$ 为相应的测度代数. 两个测度代数为同构的是指存在双射 $\Phi : \widetilde{\mathcal{B}_2} \to \widetilde{\mathcal{B}_1}$, 它保持补、可数并和可数交运算且满足 $\widetilde{m_1}(\Phi(\widetilde{B})) = \widetilde{m_2}(\widetilde{B})$, $\forall \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}_2}$. 两个概率空间称为**共轭的**是指它们的测度代数为同构的.

一般地说, 共轭要比同构弱, 但在某些条件下二者是等价的.

定理 2.7.4 设 X_1, X_2 为完备可分的度量空间, 设 $\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)$ 为它们的 Borel σ 代数而 m_1, m_2 分别为 $\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)$ 上的概率测度. 令 $\Phi : \tilde{\mathcal{B}}(X_2) \to \tilde{\mathcal{B}}_1(X_1)$ 为它们测度代数间的同构. 那么存在 $M_1 \in \mathcal{B}(X_1)$, $M_2 \in \mathcal{B}(X_2)$ 满足 $m_1(M_1) = m_2(M_2) = 1$. 同时存在一个可逆保测映射 $\phi : M_1 \to M_2$, 使得 $\Phi(\tilde{B}) = \phi^{-1}\widetilde{(M_1)(B \cap M_2)}$, $\forall B \in \mathcal{B}(X_2)$. 如果 Ψ 为另一个从 $(X_1, \mathcal{B}(X_1), m_1)$ 到 $(X_2, \mathcal{B}(X_2), m_2)$ 诱导 Φ 的同构, 则

$$m_1(\{x \in X_1 : \phi(x) \neq \Psi(x)\}) = 0.$$

相应的结论对于保测同态也是成立的 (它们由保测变换诱导 (不必为可逆的)). 一般地, 在遍历论中我们假设所涉及到的概率空间均为 Lebesgue 空间:

定义 2.7.5 一个概率空间 $(X, \mathcal{B}, m)$ 为**Lebesgue 空间**是指它同构于至多可数集 (可能有限) $\{y_n\}_1^\infty$ 与 $([0,s], \mathcal{L}([0,s]), l)$ 的无交并, 其中 y_n 赋有正测度 p_n 而 $\mathcal{L}([0,s])$ 为 $[0,s]$ $\left(s = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n\right)$ 上 Lebesgue 可测集组成的 σ 代数, l 为 Lebesgue 测度.

2.7.2 条件期望

前面运用 Radon-Nikodym 定理定义了条件期望. 设 $(X, \mathcal{B}, m)$ 为概率空间, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数. 记条件期望为 $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{C}) : L^1(X, \mathcal{B}, m) \to L^1(X, \mathcal{C}, m)$.

前面定义条件期望的方式是常规的, 但是为了后面需要, 我们给出条件期望的另一种定义方式. 设 $\phi : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (Y, \mathcal{D}, \nu)$ 为一个保测映射, 可以将 $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ 上的可测函数通过 $f \to f \circ \phi = f^\phi$ 提升为 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上的可测函数. 通过映射 $f \to f^\phi$, 我们就把 $L^2(Y)$ 等同为闭子空间 $L^2(Y)^\phi \subset L^2(X)$. 如果记 P 为从 $L^2(X)$ 到 $L^2(Y)^\phi$ 的正交投影, 那么对 $f \in L^2(X)$, 定义 $\mathbb{E}(f|Y)$ 为

$$\mathbb{E}(f|Y) \in L^2(Y), \quad \mathbb{E}(f|Y)^\phi = Pf.$$

定理 2.7.6 在 $L^2(X)$ 上定义的条件期望算子 $f \to \mathbb{E}(f|Y)$ 可以延拓到 $L^1(X)$ 上且满足下面的性质：

(i) $f \to \mathbb{E}(f|Y)$ 为从 $L^1(X)$ 到 $L^1(Y)$ 的线性算子;

(ii) 如果 $f \geqslant 0$, 那么 $\mathbb{E}(f|Y) \geqslant 0$;

(iii) 如果 $f \in L^2(Y)$, 那么 $\mathbb{E}(f^\phi|Y) = f$. 尤其 $\mathbb{E}(1|Y) = 1$;

(iv) 如果 $g \in L^\infty(Y)$, 那么 $\mathbb{E}(g^\phi f|Y) = g(\mathbb{E}(f|Y))$;

(v) $\displaystyle\int f\mathrm{d}\mu = \int \mathbb{E}(f|Y)\mathrm{d}\nu$.

2.7.3 积分分解及相对积

一个测度 μ 相对于另一测度 ν 的积分分解是我们常用到的一个概念.

定义 2.7.7 一个概率空间 $(X, \mathcal{B}, m)$ 称为**正则的**是指 X 为紧致度量空间且 $\mathcal{B}$ 由 X 上 Borel 集生成. 一个保测系统 $(X, \mathcal{B}, m, T)$ 为**正则的**是指概率空间 $(X, \mathcal{B}, m)$ 为正则的.

设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为正则的概率空间, $\phi : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (Y, \mathcal{D}, \nu)$ 为其到另一个概率空间 $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ (不必为正则的) 的保测映射. 记 $\mathcal{M}(X)$ 为 X 上全体概率测度的集合.

定理 2.7.8 存在从 Y 到 $\mathcal{M}(X)$ 的可测映射, $y \to \mu_y$, 满足：

(i) 对每个 $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ 有, 对几乎所有 $y \in Y$, $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu_y)$, 并且 $\mathbb{E}(f|Y)(y) = \displaystyle\int f\mathrm{d}\mu_y$;

(ii) $\displaystyle\int \left\{\int f\mathrm{d}\mu_y\right\}\mathrm{d}\nu(y) = \int f\mathrm{d}\mu, \forall f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

我们以 $\mu = \displaystyle\int \mu_y \mathrm{d}\nu(y)$ 记μ **相对于 ν 的积分分解**.

设正则空间 $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ 和 $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ 均为空间 $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ 的扩充：

$$\phi_1 : (X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) \to (Y, \mathcal{D}, \nu), \quad \phi_2 : (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2) \to (Y, \mathcal{D}, \nu).$$

我们将定义它们相对于同一因子 $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ 的相对积：

定义 2.7.9 $X_1 \times X_2$ 上的测度 $\mu_1 \times_Y \mu_2$ 定义为

$$\mu_1 \times_Y \mu_2(A) = \int \mu_{1,y} \times \mu_{2,y}(A)\mathrm{d}\nu(y),$$

其中 $A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, $\mu_i = \displaystyle\int \mu_{i,y}\mathrm{d}\nu(y)$ 为 μ_i 相对于因子 $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ 的积分分解. 概率空间 $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2, \mu_1 \times_Y \mu_2)$ 称为空间 $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ 和 $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$**相对于** $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ **的积**, 记为 $X_1 \times_Y X_2$.

类似地, 设正则空间 $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 均为空间 $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ 的扩充：$\phi_i : (X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i) \to (Y, \mathcal{D}, \nu)$, 我们将空间 $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ **相对于** $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ **的积**

$\mu_1 \times_Y \mu_2 \times_Y \cdots \times_Y \mu_n$ 定义为

$$\mu_1 \times_Y \mu_2 \times_Y \cdots \times_Y \mu_n(A) = \int \mu_{1,y} \times \mu_{2,y} \times \cdots \times \mu_{n,y}(A)\mathrm{d}\nu(y),$$

其中 $A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$, $\mu_i = \int \mu_{i,y}\mathrm{d}\nu(y)$ 为 μ_i 相对于因子 $(Y,\mathcal{D},\nu)$ 的积分分解.

2.7.4 Rohlin 定理

设 $(Y,\mathcal{D},\nu,T)$ 为保测系统, $(Z,\mathcal{C},\theta)$ 为概率空间. 对每个 $y \in Y$, 设 $\sigma(T^i,y)$ 定义了 $(Z,\mathcal{C},\theta)$ 上满足下面条件的一个保测映射:

(1) $\sigma(T^i,y)(z)$ 为 $Y \times Z$ 到 Z 的可测映射;

(2) $\sigma(T^{i+j},y) = \sigma(T^i,T^j(y))\sigma(T^j,y)$.

那么 (由 σ 确定的) **斜积**是指 $(Y\times Z, \mathcal{D}\times\mathcal{C}, \nu\times\theta, T)$, 其中 $T(y,z) = (Ty, \sigma(T,y)z)$. 我们有

定理 2.7.10 (Rohlin 定理)　*设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为正则的遍历保测系统, $(Y,\mathcal{D},\nu,T)$ 为其因子. 那么 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 同构于 $(Y,\mathcal{D},\nu,T)$ 的一个斜积. 如果 $\mu = \int \mu_y\mathrm{d}\nu(y)$ 为 μ 的积分分解, 那么对几乎所有 $y \in Y$, 或者存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 μ_y 为 k 个点上的等分布测度, 或者 μ_y 为连续的, 即对任意 $x \in X$, 有 $\mu_y(\{x\}) = 0$.*

2.7.5 遍历分解

在定理 2.4.4 后面, 我们已经描述过遍历分解定理. 这里从另外一个角度来看这个结论.

如果 $\phi : (X,\mathcal{B},\mu) \to (Y,\mathcal{D},\nu)$ 为两个概率空间的保测映射, 那么 $\{\phi^{-1}(y) : y \in Y\}$ 为 X 的一个剖分. 反之, 设 ξ 为 X 的剖分. 那么可以定义 $Y = \{C : C \in \xi\}$ 以及投射 $\pi : X \to Y$. 定义 $B \subset Y$ 为可测的当且仅当 $\pi^{-1}B \in \mathcal{B}$, 并且对于可测集 $B \subset Y$ 定义测度 $\nu(B) = \mu(\pi^{-1}(B))$. 记全体可测集 $B \subset Y$ 为 $\mathcal{D}$, 易见此时 $(Y,\mathcal{D},\nu)$ 为概率空间, 并且通过映射 π 成为 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的因子.

设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为概率空间, ξ 为由 $\mathcal{B}$ 中元构成的 X 的剖分. 以 $\mathcal{B}(\xi)$ 记包含 ξ 中元素的最小的 σ 代数. 如果 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为 Lebesgue 空间, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数, 那么存在 X 的剖分 ξ, 使得 $\mathcal{B}(\xi) = \mathcal{C}$ (mod 0).

设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为一个保测系统, $\mathcal{C} = \{C : T^{-1}C = C\}$. 那么存在 X 的剖分 ξ, 使得 $\mathcal{B}(\xi) = \mathcal{C}$ (mod 0). 并且对每个 $C \in \xi$, $TC \subset C$. 于是 ξ 决定了 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的因子, 此时 μ 可以按这个因子积分分解. 可以证明, 对任意 $C \in \xi$, 变换 $T|_C$ 相对于 μ_C 是遍历的. 这称为 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的**遍历分解**. 尤其对每个 $f \in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$,

$$\int f\mathrm{d}\mu = \int \left(\int f\mathrm{d}\mu_y\right)\mathrm{d}\nu(y).$$

2.7.6 保测系统的结构定理

设 Γ 为与 $\mathbb{Z}^l$ 同构的群, 其中 $l \in \mathbb{N}$. 设 $X = (X, \mathcal{B}, \mu, \Gamma)$ 为保测系统, $Y = (Y, \mathcal{D}, \nu, \Gamma)$ 为其因子, 而 $\phi : (X, \mathcal{B}, \mu, \Gamma) \to (Y, \mathcal{D}, \nu, \Gamma)$ 为相应的因子映射.

定义 2.7.11 称系统 X 为 Y 相对于 $T \in \Gamma$ 的**遍历扩充**是指 $\mathcal{B}$ 的全体 T 不变子集恰为 $\mathcal{D}$ 的 T 不变子集在 ϕ^{-1} 下的像 (指模去零测集的意义下). 记为 $X \to Y$ 遍历 (rel. T).

定义 2.7.12 称系统 X 为 Y 相对于 $T \in \Gamma$ 的**弱混合扩充**是指 $X \times_Y X \to Y$ 为 Y 相对于 T 的遍历扩充. 记为 $X \to Y$ 弱混合 (rel. T). 如果 ϕ 相对于每个 $T \in \Gamma$ 为弱混合的, 那么称 X 为 Y 相对于 Γ 的弱混合扩充.

引理 2.7.13 如果系统 X 为 Y 相对于 $T \in \Gamma$ 的弱混合扩充, 则对每个 $n \in \mathbb{N}$, 系统 $X \times_Y X \times_Y \cdots \times_Y X (n$ 次) 也为 Y 相对于 T 的弱混合扩充. 如果还有 Y 相对于 T 为遍历的, 则 $X \times_Y X \times_Y \cdots \times_Y X (n$ 次) 也相对于 T 为遍历的.

定义 2.7.14 称 X 为 Y 的**紧扩充**是指存在稠密函数集族 $\mathcal{F} \subset L^2(X)$ 满足: 对任意 $f \in \mathcal{F}$ 及 $\delta > 0$, 存在有限个函数 $g_1, g_2, \cdots, g_k \in L^2(X)$, 使得对每个 $S \in \Gamma$, 不等式 $\min_{1 \leqslant j \leqslant k} ||Sf - g_j||_y < \delta$ 成立, 其中 $||f||_y$ 为 f 在 $L^2(X, \mathcal{B}, \mu_y)$ 中的模.

下面我们陈述著名的 Furstenberg-Zimmer 定理 (在后面将会用到这个结论). 系统 $X = (X, \mathcal{B}, \mu, \Gamma)$ 为其因子 $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$ 的**极限**是指 $\mathcal{B}$ 可以由 $\{\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{B}_\alpha) : \alpha \in A\}$ 生成.

定理 2.7.15 (Furstenberg-Zimmer 定理) 设 $X = (X, \mathcal{B}, \mu, \Gamma)$ 为可分的保测系统, 其中 Γ 为有限秩的自由交换群. 那么存在可数序数 η, 使得对任意序数 $\xi \leqslant \eta$, 存在 X 的因子 X_ξ, $\pi_\xi : X \to X_\xi$ 满足:

(i) X_0 为平凡系统, 而 $X_\eta = X$;

(ii) 如果 $\xi \leqslant \xi'$, 则存在同态 $\pi_\xi^{\xi'} : X_{\xi'} \to X_\xi$, 使得 $\pi_\xi = \pi_\xi^{\xi'} \pi_{\xi'}$;

(iii) 对每个 $\xi < \eta$, $X_{\xi+1} \to X_\xi$ 为本原的, 即 Γ 为两个子群的直积 $\Gamma = \Gamma_c \times \Gamma_w$, 其中 $X_{\xi+1} \to X_\xi$ 相对于 Γ_c 为紧扩充, 而 $X_{\xi+1} \to X_\xi$ 相对于 Γ_w 为弱混合扩充;

(iv) 如果 $\xi \leqslant \eta$ 为极限序数, 则 X_ξ 为因子 $\{X_{\xi'}, \xi' < \xi\}$ 的极限.

当 $T = \mathbb{Z}$ 时, 我们可以做到除最后一步 $X = X_\eta \to X_{\eta'} (\eta = \eta' + 1)$ 可能为弱混合扩充外其余各扩充均为紧扩充.

2.7.7 保测系统的多重回复定理

保测系统的多重回复定理为以下定理的推论:

定理 2.7.16 设 $T_1, T_2, \cdots, T_l$ 为概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上的相互可交换的保测变

换, $A \in \mathcal{B}$ 满足 $\mu(A) > 0$. 那么

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(T_1^{-n}A \cap T_2^{-n}A \cap \cdots \cap T_l^{-n}A) > 0. \tag{2.7.1}$$

证明定理 2.7.16 的基本思路为：先对 $(X,\mathcal{B},\mu,\Gamma)$ 为 $(Y,\mathcal{D},\nu,\Gamma)$ 的紧扩充和弱混合扩充时分别证明, 如果 $(Y,\mathcal{D},\nu,\Gamma)$ 满足 (2.7.1), 那么 $(X,\mathcal{B},\mu,\Gamma)$ 也满足 (2.7.1); 然后用结构定理归纳证明结论. 根据定理 2.7.16, 有

定理 2.7.17 设 $T_1, T_2, \cdots, T_l$ 为概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上的相互可交换的保测变换, $A \in \mathcal{B}$ 满足 $\mu(A) > 0$. 那么存在 $n \geqslant 1$, 使得

$$\mu(T_1^{-n}A \cap T_2^{-n}A \cap \cdots \cap T_l^{-n}A) > 0.$$

现在我们运用定理 2.7.17 来证明定理 2.7.1.

定理 2.7.1 的证明 设 $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, $\mathcal{B}$ 为其 Borel σ 代数. $T: X \to X$ 为转移, 即 $T(\omega)(n) = \omega(n+1)$, $\forall n \geqslant 0$.

设 S 为具有正上 Banach 密度的子集, 视 S 的特征函数 1_S 为 X 中点. 于是存在 $\delta > 0$ 以及区间列 $\{B_n\}$ 满足 $|S \cap B_n|/|B_n| > \delta > 0$, $\forall n$. 定义 X 上测度 μ_n 为

$$\mu_n = \frac{1}{|B_n|}\sum_{i \in B_n} \delta_{T^i 1_S}.$$

设 μ 为 μ_n 的极限点, 则 $T\mu = \mu$. 令 $A = \{\omega : \omega(0) = 1\}$, 则 A 为既开又闭的集合. 有

$$1_A(T^i 1_S) = 1 \Longleftrightarrow T^i 1_S(0) = 1 \Longleftrightarrow i \in S.$$

由于 $\mu_n(A) = |S \cap B_n|/|B_n| > \delta$, 所以 $\mu(A) \geqslant \delta > 0$. 运用定理 2.7.17 于 $T, T^2, \cdots, T^l$ $(l \in \mathbb{N})$ 及子集 $A \subset X$, 可得：对任意 l, 存在 $n = n(l) \geqslant 1$, 使得

$$\mu(T^{-n}A \cap T^{-2n}A \cap \cdots \cap T^{-ln}A) > 0.$$

于是对一个正 μ 测度的子集有 $T^n(\omega) \in A, T^{2n}(\omega) \in A, \cdots, T^{ln}(\omega) \in A$. 因为 A 为开集, 上式对 ω 的一个邻域也成立. 于是易见 μ 的支撑包含在 1_S 在转移下的闭包中. 由此存在 $a \in \mathbb{N}$, 使得 $T^{in+a}1_S \in A$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant l$. 于是 $in + a \in S$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant l$. 这样我们就完成了整个证明.

习 题 2.7

1. 一个遍历系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 具有**离散谱**指 $L^2(\mu)$ 中存在由 T 特征函数组成的一个正交基. 证明：T 具有离散谱当且仅当它共轭于某紧致度量群上的遍历旋转.

2. 设 $\phi : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (Y, \mathcal{D}, \nu)$ 为两个正则概率空间上的保测变换且 $\mu = \int \mu_y \mathrm{d}\nu(y)$ 为 μ 相对 ν 的分解. 证明对几乎所有 $y \in Y$, $\mu_y(\phi^{-1}(y)) = 1$.

3. 证明测度 $\mu_1 \times_Y \mu_2$ 可以由下等式刻画：

$$\int f_1 \otimes f_2 \ \mathrm{d}\mu_1 \times_Y \mu_2 = \int \mathbb{E}(f_1|Y)\mathbb{E}(f_2|Y) \ \mathrm{d}\nu,$$

其中 $f_1 \in L^2(X_1)$, $f_2 \in L^2(X_2)$, 且 $f_1 \otimes f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$.

4. 证明对任意 $f_1 \in L^2(X_1)$, $f_2 \in L^2(X_2)$,

$$\mathbb{E}(f_1 \otimes f_2|Y) = \mathbb{E}(f_1|Y)\mathbb{E}(f_2|Y),$$

并且 $\mu_1 \times_Y \mu_2$ 相对于 $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ 的积分分解为

$$(\mu_1 \times_Y \mu_2)_y = \mu_{1,y} \times \mu_{2,y},$$

其中 X_1, X_2 均为 Y 的扩充, 且 $\mu_i = \int \mu_{i,y} \mathrm{d}\nu(y)$ 为相对于 μ_i 的积分分解, $i = 1, 2$.

5. 证明：如果 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为类极小的, 那么它共轭于等分布的周期系统. 提示：设 $a = \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{B}\text{且}\mu(A) > 0\}$. 证明 $a > 0$ 且运用它去导出结论.

§2.8 注　记

本章主要来源为 Walters(1982) 和 Furstenberg(1981) 这两本专著. 定理 2.5.4 引自 Weiss(2000b). 定理 2.2.7 的证明源自 Glasner(2003) 的处理方式.

关于遍历理论有着众多非常优秀的著作, 如 Denker etc. (1976), Glasner(2003), Halmos(1953), Rudolph(1990), Walters(1982), Petersen(1983) 等. 其中 Walters(1982), Furstenberg(1981), Petersen(1983), Glasner(2003) 等都有相当多的篇幅介绍拓扑动力系统, 毕竟这两个分支有着千丝万缕的联系. 而两者兼顾的著作有 Furstenberg (1981), Weiss(2000b) 等, 也可参见综述性文章 Glasner-Weiss(2004).

关于遍历 Ramsey 理论, 自 Furstenberg(1977) 开创以来一直是动力系统十分活跃的一个分支, 参见 Bergelson(1996), Bergelson-Leibman(1996), Bergelson-McCutcheon(2000), Furstenberg(1981), Furstenberg(1977), Furstenberg-Katznelson(1978), Furstenberg-Katznelson(1985), Furstenberg-Katznelson(1991), Furstenberg etc. (1982), McCutcheon(1999) 等.

关于多重遍历定理, 一个很大的进展是 Host 和 Kra 的工作. 他们证明了 (Host-Kra, 2005)：如果 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, $k \geqslant 1$ 为整数以及 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 为有界函数, 那么式子

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \cdots f_k(T^{kn} x) \tag{2.8.1}$$

在 $L^2(\mu)$ 中收敛. 另外, Ziegler 独立地给出了这个定理的不同的证明 (Ziegler, 2005). 最近 Tao 证明了当 $T_1, \cdots, T_k$ 为 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上可交换的保测变换, 并且 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 为有界函数时,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T_1^n x) f_2(T_2^n x)\cdots f_k(T_k^n x) \tag{2.8.2}$$

在 $L^2(\mu)$ 中收敛, 从而彻底证明了多重遍历定理 (在 $L^2(\mu)$ 意义下). 有意思的是 Tao 的证明采用有限遍历理论 (finitary ergodic theory), 并没有用到遍历理论中的高深知识. 另外值得一提的是, 表达式 (2.8.2) 是否逐点收敛是目前遍历理论中的一个重要问题.

素数集包含了任意长的算术级数是 Tao 获 2006 年 Fields 奖的主要工作之一. 最近 Tao 和 Ziegler 又推广了这一工作. 他们证明了如果 $P_1, \cdots, P_k$ 为取值整数的多项式并且 $P_1(0) = \cdots = P_k(0) = 0$, 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在无限多个整数 x, m, 使得 $1 \leqslant m \leqslant x^{\varepsilon}$, 并且 $x + P_1(m), \cdots, x + P_k(m)$ 均为素数.

另外, 有关 Khintchine 定理的推广见文献 (Bergelson etc., 2005), 有关多重 Poincaré 序列的工作见文献 (Frantzikinakis etc., 2006).

第 3 章　等度连续性与 Ellis 半群理论

在动力系统中, 最简单的系统莫过于等度连续系统以及 distal 系统. §3.1 先讨论等度连续系统, 给出它的若干刻画. §3.2 详细论述了初值敏感与几乎等度连续的关系以及几乎等度连续系统的一些基本性质. 在讨论 distal 系统以及进一步研究等度连续系统时, Ellis 半群发挥了极大的作用. 所以在对 distal 系统讨论前, 我们在 §3.3 先介绍 Ellis 半群理论的一些基本知识, 作为应用我们证明了第 1 章中提到的 Hindman 定理. §3.4 运用 Ellis 半群理论研究了 distal、几乎 distal 和半 distal 系统, 而 §3.5 详细讨论 distal 系统以及它与等度连续系统的深刻联系. §3.6 给出 Furstenberg 关于极小 distal 流的结构定理的证明并简要介绍极小系统的结构理论. 作为本章的结束, 最后对几乎等度连续进行了更为深入的讨论.

§3.1　等度连续性

这一节研究等度连续系统. 在本章中, 我们总是假设对于系统 (X,T), 映射 T 为满射.

定义 3.1.1　*系统 (X,T) 称为***等度连续的***是指函数族 $\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 为等度连续的, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x_1,x_2) < \delta$ 时, $d(T^n x_1, T^n x_2) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ 成立.*

如果令 $d_T(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} d(T^n x, T^n y)$, 后面我们会说明当 (X,T) 为等度连续时, d_T 与 d 是等价的, 并且它为 T 不变的, 即 $d_T(Tx,Ty) = d_T(x,y), \forall x,y \in X$. 直观上讲, 等度连续系统中的任何两个不同点随着时间的推移将保持同样的差距, 即它们的轨道是“平行”的. 所以我们有理由认为等度连续性是最简单的一种动力学性状.

例 3.1.2　*(1) 设 S^1 为圆周, T 为圆周上的旋转映射, 则 (S^1,T) 为等度连续的;*
(2) 加法机器为等度连续的.

下面的定理说明, 等度连续系统中的每个点按一致的步调回复. 系统 (X,T) 称为**一致几乎周期的** 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 syndetic 集 A, 使得对任意 $x \in X, n \in A$, $d(x,T^n x) < \varepsilon$ 成立. 注意到, 我们用 $C(X,X)$ 表示从 X 到 X 的全体连续映射.

定理 3.1.3　*系统 (X,T) 为等度连续的当且仅当它为一致几乎周期的.*

证明　设 (X,T) 为等度连续的. 对任意 $\varepsilon > 0$, 根据 Ascoli 定理 $\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 在 $C(X,X)$(取一致拓扑) 中为相对紧的, 于是存在有限 ε 网 $\{T^n\}_{n=1}^k$. 即对任意

$n \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $1 \leqslant j \leqslant k$, 使得

$$\sup_{x\in X} d(T^n x, T^j x) < \varepsilon.$$

因 T 是满射, 易见 $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \sup_{x\in X} d(T^n x, x) < \varepsilon\}$ 为以 k 为间距的 syndetic 集, 从而 (X,T) 为一致几乎周期的.

反之, 设 (X,T) 为一致几乎周期的. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 syndetic 集 A, 使得对任意 $x \in X, n \in A$, $d(x, T^n x) < \frac{\varepsilon}{3}$ 成立. 设 A 间距为 k. 取 $\delta > 0$ 使得对任意满足 $d(x,y) < \delta$ 的 x, y, $d(T^i x, T^i y) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall i = 1, 2, \cdots, k$.

下证对满足 $d(x,y) < \delta$ 的 x, y, $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ 成立. 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $a \in A$ 及 $i \in [1,k]$, 使得 $n = a + i$. 于是

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant d(T^a(T^i x), T^i x) + d(T^i x, T^i y) + d(T^i y, T^a(T^i y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

所以 (X,T) 为等度连续的. □

从拓扑共轭的角度看, 等度连续系统相当于一个紧致交换群上的旋转. 为了说明这一点, 首先引入一些概念.

定义 3.1.4 设 (X,T) 为动力系统, 记 $C(X)$ 为全体复值连续函数的集合. 称非零函数 $f \in C(X)$ 为 T 的**特征函数**是指存在 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得 $f(Tx) = \lambda f(x)$. 此时称 λ 为相应于 f 的**特征值**.

命题 3.1.5 设 (X,T) 为传递系统, 则

(1) 如 $f \in C(X)$ 为以 λ 为特征值的非零特征函数, 则 $|\lambda| = 1$ 且 $|f| = c$, c 为常数;

(2) 如 f, g 为同一特征值的特征函数, 则 $f = cg$, 其中 c 为常数;

(3) 在 $C(X)$ 中, 相应于不同特征值的特征函数为线性无关的;

(4) T 的全体特征值形成 S^1 的一个可数子群.

证明留作习题.

定义 3.1.6 设 (X,T) 为动力系统, 称之有**拓扑离散谱**是指系统的特征函数张成了 $C(X)$.

由前命题可见, 如 (X,T) 为有拓扑离散谱的传递系统, 则存在可数个特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及线性无关组 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$, 使得 $\operatorname{span}\{f_n\} = C(X)$ 且 $f_n \circ T = \lambda_n f_n$. 对一个拓扑群 G, 我们用 $\hat{G}$ 表示从 G 到 S^1 的所有连续同态的集合. $\hat{G}$ 中的元素称为 G 的**特征**.

定理 3.1.7(Halmos-von Neumann) 设 (X,T) 为可逆动力系统, 则以下等价:

(1) T 为极小等度连续的;

(2) T 传递且存在 X 上的度量, 使得 T 在此度量下为等距的;

(3) T 拓扑共轭于紧致交换群上的一个极小旋转;

(4) T 极小且有拓扑离散谱;

(5) T 传递且有拓扑离散谱.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 易证.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 ρ 为等距度量, x_0 为传递点, 所以 $X = \overline{\mathrm{orb}(x_0)}$. 定义运算:

$$*: \mathrm{orb}(x_0) \times \mathrm{orb}(x_0) \to \mathrm{orb}(x_0), \quad T^n x_0 * T^m x_0 \mapsto T^{n+m} x_0.$$

因为

$$\begin{aligned}\rho(T^n x_0 * T^m x_0, T^p x_0 * T^q x_0) &= \rho(T^{n+m} x_0, T^{p+q} x_0) \\ &\leqslant \rho(T^{n+m} x_0, T^{p+m} x_0) + \rho(T^{p+m} x_0, T^{p+q} x_0) \\ &= \rho(T^n x_0, T^p x_0) + \rho(T^m x_0, T^q x_0).\end{aligned}$$

所以 $*$ 为一致连续的, 于是可以唯一扩充为 $*: X \times X \to X$.

另外, 因为 $\rho(T^{-n} x_0, T^{-m} x_0) = \rho(T^{m+n} T^{-n} x_0, T^{m+n} T^{-m} x_0) = \rho(T^m x_0, T^n x_0)$, 所以映射 $T^n x_0 \mapsto T^{-n} x_0$, $\mathrm{orb}(x_0) \to \mathrm{orb}(x_0)$ 为一致连续的, 于是可以唯一扩充到 $X \to X$ 上.

这样, 我们说明了 $(X, *)$ 为拓扑群. 因为 $\{T^n x_0 : n \in \mathbb{Z}\}$ 在 X 中稠密, 所以 $(X, *)$ 为交换的. 因为 $T(T^n x_0) = T x_0 * T^n x_0, \forall n \in \mathbb{Z}$, 所以 $Tx = T x_0 * x, \forall x \in X$. 这说明 (X, T) 为 T 在群 $(X, *)$ 上的 $T x_0$ 旋转.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 X 为紧交换群, 且 $Tx = ax$. 则 X 的每个特征为 X 的特征函数 (因为如果 $f \in \hat{X}$, 那么 $f(Tx) = f(ax) = f(a)f(x)$). 设 A 为由所有特征的线性组合生成的代数, 则 $A \subseteq C(X)$. 由于 A 包含常值函数、对共轭运算封闭并且分离点, 所以根据 Stone-Weierstrass 定理就有 $\overline{A} = C(X)$.

(4) $\Rightarrow$ (5) 显然.

(5) $\Rightarrow$ (2) 由前面分析, 存在可数个特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及线性无关组 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$, 使得 $|f_n| = 1$, $\mathrm{span}\{f_n\} = C(X)$ 且 $f_n \circ T = \lambda_n f_n$. 定义 $\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n}$, 它为 X 上的伪度量. 由于 $\mathrm{span}\{f_n\} = C(X)$, 所以 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分离 X 的点. 于是 $\rho(x, y) = 0$ 蕴含 $x = y$, 即 ρ 为度量.

因为 $|\lambda_n| = 1$, 所以有

$$\rho(Tx, Ty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n f_n(x) - \lambda_n f_n(y)|}{2^n} = \rho(x, y).$$

于是 (X, ρ) 为等距的.

设 d 为 X 的原始度量, 以下说明 (X,d) 与 (X,ρ) 等价. 我们仅需证明恒同映射 $\mathrm{id}:(X,d)\to(X,\rho)$ 连续即可.

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于 f_n 连续, 所以存在 $\delta>0$, 使得 $d(x,y)<\delta\Rightarrow|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{2},\forall 1\leqslant n\leqslant N$. 于是就有 $d(x,y)<\delta\Rightarrow\rho(x,y)<\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 所以 id 连续. □

习　题　3.1

1. 任何等度连续系统的因子仍为等度连续的.

2. 设 (X,T) 为等度连续的, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$, (X,T^n) 也为等度连续的.

3. 试不用 Ascoli 定理直接证明等度连续系统为一致几乎周期的. 提示: 先证对任意 $\varepsilon>0$ 以及有限点 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$, 存在 syndetic 集 A, 使得 $d(x_i,T^m x_i)$, $i=1,2,\cdots,n$; $m\in A$.

4. 证明命题 3.1.5.

§3.2　几乎等度连续与初值敏感

等度连续概念的一个自然的推广是"几乎等度连续".

定义 3.2.1　设 (X,T) 为动力系统, 点 $x\in X$ 称为**等度连续的**是指对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意满足 $d(x,y)<\delta$ 的 y, 成立 $d(T^n x,T^n y)<\varepsilon,\forall n\geqslant 0$. 系统称为**几乎等度连续的**是指它为传递的且至少有一个等度连续点.

如果系统每个点都是等度连续点, 那么由空间的紧性, 系统为等度连续的. 在 X 上定义新的度量:

$$d_T(x,y)=\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}d(T^n x,T^n y).$$

这样 x 为等度连续点等价于对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意满足 $d(x,y)<\delta$ 的 y, 有 $d_T(x,y)<\varepsilon$. 易见, (X,T) 为等度连续的当且仅当 d 与 d_T 为等价的.

由等度连续点的定义, 我们可以感觉到在等度连续点附近的点有"一致"的运动轨道, 所以可以想象它应该有一些特殊的性质. 令 $\Omega(x,T)=\{y\in X:\exists x_k\to x$ 及 $n_k\to\infty$, 使得 $T^{n_k}x_k\to y\}$, 有

命题 3.2.2　设 (X,T) 为动力系统. 如果 $x\in X$ 为等度连续点, 则

(1) $\omega(x,T)=\Omega(x,T)$;

(2) 如果 x 为非游荡点, 则它为回复点;

(3) 如果它为极小点的极限点, 则它也为极小点.

证明 (1) 首先, 易见 $\omega(x,T) \subseteq \Omega(x,T)$. 现设 $y \in \Omega(x,T)$, 那么 $\exists x_k \to x$ 及 $n_k \to \infty$, 使得 $T^{n_k}x_k \to y$. 因为 $x \in X$ 为等度连续点, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $d(x,y) < \delta$ 蕴含 $d(T^n x, T^n y) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{Z}_+$. 选取 k 使得 $d(x,x_k) < \delta$ 且 $d(T^{n_k}(x_k), y) < \frac{\varepsilon}{2}$. 则 $d(T^{n_k}x_k, T^{n_k}x) < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而 $d(T^{n_k}x, y) < \varepsilon$. 所以 $y \in \omega(x,T)$.

(2) 由 (1) 即得.

(3) 设 U 为 x 的邻域, 选取 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x, 3\varepsilon) \subseteq U$. 因为 $x \in X$ 为等度连续点, 所以存在 $\delta > 0$, 使得 $d(x,y) < \delta$ 蕴含 $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}_+$. 取极小点 $z \in B(x,\delta)$, 则 $N(z, B(z,\varepsilon))$ 为 syndetic 的. 又易证 $N(z, B(z,\varepsilon)) \subseteq N(x,U)$ (对任意 $k \in N(z, B(z,\varepsilon))$, 有 $d(x, T^k x) \leqslant d(x,z) + d(z, T^k z) + d(T^k z, T^k x) < 3\varepsilon$), 于是 x 为极小的. □

根据命题 3.2.2, 我们不难证明几乎等度连续的 M 系统为极小等度连续的 (留作习题).

与几乎等度连续对立的一个概念是“初值敏感性”. 首先我们介绍这个概念. 给定 $\varepsilon > 0$, T 称为在点 x 处 **Lyapunov** ε **不稳定的** 是指对 x 的任意邻域 U, 存在点 $y \in U$ 及 $n \geqslant 0$, 使得 $d(T^n x, T^n y) > \varepsilon$; T 称为在x **处不稳定**是指存在 $\varepsilon > 0$, 使得 T 在 x 处为 Lyapunov ε 不稳定的. 如果系统为处处不稳定的, 一般而言并不能保证存在一个 $\varepsilon > 0$, 使得所有点都是 ε 不稳定的. 但对于传递系统, 这是能得到保证的, 即此时系统如为处处不稳定的, 则存在一个 $\varepsilon > 0$, 使得所有点都是 ε 不稳定的. 这就是初值敏感的定义. 具体地讲

定义 3.2.3 *称动力系统 (X,T) 具有***初值敏感性***是指存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意 $\delta > 0$ 和 $x \in X$, 都能找到 $y \in B(x,\delta)$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $d(T^n x, T^n y) > \varepsilon$.*

我们将看到一个传递系统要么是初值敏感的, 要么就是几乎等度连续的. 这就是所谓的 Auslander-Yorke 二分定理. 首先刻画全体等度连续点的集合: 对 $k \in \mathbb{N}$, 令

$$G_k = \left\{ x \in X : \text{存在 } x \text{ 的邻域 } U, \text{使得对任意 } y \in U, \text{ 有 } d(T^n x, T^n y) < \frac{1}{k}, \forall n \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

则 G_k 为开集, 且 $T^{-1}G_k \subseteq G_k$. 根据定义易见, $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ 为全体等度连续点集.

定理 3.2.4 (Auslander-Yorke 二分定理) *设 (X,T) 为拓扑传递的系统. 如果 (X,T) 为几乎等度连续的, 则等度连续点集与传递点集吻合, 进而为稠密的 G_δ 集. 特别地, 极小几乎等度连续系统为等度连续的.*

如果 (X,T) 没有等度连续点, 则必为初值敏感的. 尤其, 极小系统如果不是等度连续的, 就是初值敏感的.

证明 设 (X,T) 为几乎等度连续的. 由 G_k 的定义, $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \neq \varnothing$ 为全体等度

连续点集. 因为 G_k 为非空开的以及 $T^{-1}G_k \subseteq G_k$, 根据传递性就有 G_k 为稠密的. 于是 $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ 为剩余的 (residual).

对任意 $x \in \mathrm{Trans}_T$, 设 $n_k \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{n_k}x \in G_k$. 于是 $x \in T^{-n_k}G_k \subseteq G_k$, 进而 $\mathrm{Trans}_T \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. 反之, 设 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. 由上述命题知 $\omega(x,T) = \Omega(x,T)$. 由于 X 传递, 所以 $\Omega(x,T) = X$. 于是 $\omega(x,T) = X$, 即 $x \in \mathrm{Trans}_T$.

其余结论不难说明, 请读者自证. □

1986 年, Devaney(1989) 以初值敏感性为核心定义了一类重要的混沌.

定义 3.2.5 称系统 (X,T) 为**Devaney 混沌的**, 如果它满足以下三条:

(1) (X,T) 是传递的;

(2) T 的周期点在 X 中稠密;

(3) (X,T) 具有初值敏感性.

事实上, 上面的条件并不是独立的. Banks, Glasner 和 Weiss 等人证明了 (1) + (2) ⇒ (3), 即传递的周期点稠密的非周期系统具有初值敏感性 (Banks etc., 1992; Glasner-Weiss, 1993); 事实上, Glasner 和 Weiss 证明了更强的结论: 他们说明传递的极小点稠密的非周期系统具有初值敏感性 (Glasner-Weiss, 1993; Akin etc., 1996). 下面我们将证明更强些的结论 (Huang-Ye, 2002b).

命题 3.2.6 (1) 上半 Banach 传递 ($N(U,V)$ 具有正上半 Banach 密度的传递系统) 的几乎等度连续系统为极小等度连续的;

(2) 几乎等度连续的拓扑遍历系统为极小等度连续的.

证明 设 (X,T) 为几乎等度连续的, 则存在几乎等度连续点 x_0. 对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $U = B(x_0,\varepsilon)$. 由定义, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x, y \in B(x_0,\delta)$, 有 $d(T^n x, T^n y) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{Z}_+$. 于是就有 $N(x_0,U) \supseteq N(B(x_0,\delta), B(x_0,\delta))$.

如果 (X,T) 为拓扑遍历的, 则 $N(x_0,U)$ 为 syndetic 的. 由于 ε 任意, 所以 x_0 为极小的. 因为 x_0 为传递点, 所以系统极小 (定理 1.3.5).

如果系统为上半 Banach 传递的, 则类似于上面分析, 选取 $\delta_1 > 0$, 使得 $N(x_0, B(x_0,\delta)) \supseteq N(B(x_0,\delta_1), B(x_0,\delta_1))$. 有

$$N(x_0,U) \supseteq N(B(x_0,\delta),B(x_0,\delta)) \supseteq N(B(x_0,\delta_1),B(x_0,\delta_1)) - N(B(x_0,\delta_1),B(x_0,\delta_1)),$$

于是 $N(x_0,U)$ 为 syndetic 的 (推论 2.5.5), 继而 x_0 为极小点. □

推论 3.2.7 非极小的 E 系统 (进而 M 系统、P 系统) 为初值敏感的.

证明 仅需证明 E 系统为拓扑遍历的, 即 syndetic 传递的. 见定理 2.6.5. 下面我们提供另一种证法.

设 U, V 为 X 的非空开集, μ 为 X 具有全支撑的不变测度. 令 $W = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} T^{-n}U$, 则 $\mu(W) = a > 0$. 由于 X 传递, 所以 $O = W \cap V \neq \varnothing$ 及 $\mu(O) = b > 0$.

选取 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\mu(\bigcup_{n\leqslant N} T^{-n}U) > a - \dfrac{b}{2}$. 由于 μ 为不变测度, 对任意 $j \in \mathbb{Z}_+$, 有

$$\mu\left(T^{-j}\left(\bigcup_{n\leqslant N} T^{-n}U\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\leqslant N} T^{-n}U\right) > a - \frac{b}{2}.$$

于是 $T^{-j}(\bigcup_{n\leqslant N} T^{-n}U) \cap V \neq \varnothing$. 这样 $N(V,U)$ 为以 N 为间距的 syndetic 集, 即 (X,T) 为拓扑遍历的. □

定理 3.1.3 说明等度连续系统的每个点会按一致的步调回复, 我们将说明对几乎等度连续系统也有类似现象. 首先我们介绍刚性的概念:

定义 3.2.8 设 $n \in \mathbb{N}$, 称系统 (X,T) 为n **刚性的**是指乘积系统 $(X^n, T^{(n)})$ 的每个点都是回复点; 称 (X,T) 为**弱刚性的**是指对任意自然数 n, 系统为 n 刚性的; 称 (X,T) 为**刚性的**是指存在 $n_i \to \infty$, 使得 T^{n_i} 逐点收敛于恒同映射 id; 而称 (X,T) 为**一致刚性的**是指存在 $n_i \to \infty$, 使得 T^{n_i} 一致收敛于恒同映射 id.

这几个概念是不一样的, 刚性但不是一致刚性的例子如下: 设 $X = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, r = 1 - 2^{-n}, n = 1, 2, \cdots$ 或 $r = 1\}$. 当 $|z| = 1 - 2^{-n}$ 时, 定义 $Tz = z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2^n}}$; 当 $|z| = 1$ 时, 定义 $Tz = z$. 取 $n_k = 2^k$, 易验证 (X,T) 为刚性但不是一致刚性的. 事实上, 存在极小的刚性但不是一致刚性的例子, 但这种例子比较困难 (Glasner-Maon, 1989).

设 X 为环面 $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $T : X \to X, (x,y) \mapsto (x+\alpha, y+x)$, 其中 α 为无理数. 可以验证它是极小弱刚性的 (留作习题), 但是它不是刚性的. 否则存在序列 $\{n_k\}$, 使得 T^{n_k} 逐点收敛于恒同映射 id. 根据 $T^n(x,y) = (x+n\alpha, y+nx+[n(n-1)/2]\alpha)$, 对每个 x, 有 $n_k x \to 0$. 这是不可能的, 所以 (X,T) 为极小弱刚性但不是刚性的系统.

对于从 X 到 X 上全体连续函数的集合 $C(X,X)$, 在其上取度量:

$$D(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)).$$

根据此定义, (X,T) 为一致刚性的当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $D(T^n, \mathrm{id}) < \varepsilon$.

引理 3.2.9 设 (X,T) 为 1 刚性的动力系统 (即每个点都是回复点), 则 T 为满射且每个不变集为负不变的和强不变的.

证明留作习题.

引理 3.2.10 设 (X,T) 为 2 刚性的动力系统, 则

(1) T 为同胚;

(2) 对任意 $x \in X$ 有 $\omega(x, T^{-1}) \subseteq \omega(x,T)$;

(3) 相对于度量 d_T, T 为等距的.

证明　(1) 首先由引理 3.2.9 知 T 为满射. 设 $T(x)=T(y)$, 由于 T 为 2 刚性的, 存在 $n_i\to+\infty$, 使得 $(T\times T)^{n_i}(x,y)\to(x,y)$. 因为 $T(x)=T(y)$, 所以 $(T\times T)^{n_i}(x,y)\subseteq\Delta$. 于是就有 $x=y$, 即 T 为单射.

(2) 设 $x\in X$, 则由 $\omega(x,T)$ 为正不变的以及引理 3.2.9 知它也为负不变的. 由于 $x\in\omega(x,T)$, 所以 $T^{-1}x\in T^{-1}\omega(x,T)\subseteq\omega(x,T)$, 进而 $\omega(x,T^{-1})\subseteq\omega(x,T)$.

(3) 设对 $x,y\in X$, 存在 $n_i\to+\infty$, 使得 $(T^{n_i}x,T^{n_i}y)\to(x,y)$. 于是易得 $d_T(Tx,Ty)\geqslant d(x,y)$. 又由于 $d_T(x,y)=\sup\{d(x,y),d_T(Tx,Ty)\}$, 所以就有 $d_T(x,y)=d_T(Tx,Ty)$. □

定理 3.2.11　设 (X,T) 为一致刚性的系统. 则

(1) T 限制在任意子系统上仍为一致刚性的; 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 系统 $(X^n,T^{(n)})$ 和 (X,T^n) 也是一致刚性的;

(2) T 为同胚并且系统 (X,T^{-1}) 也为一致刚性的. 事实上, 如果 $T^{n_i}\to\mathrm{id}$, 那么 $T^{-n_i}\to\mathrm{id}$;

(3) 对任意 $x\in X$, 有 $\omega(x,T)=\omega(x,T^{-1})$, 于是 $\mathrm{Trans}_T=\mathrm{Trans}_{T^{-1}}$;

(4) 度量 d_T 和 $d_{T^{-1}}$ 在 X 上一致, 并且相对于它们 T 为等距的.

证明　(1) 留作习题.

(2) 由引理 3.2.10 知 T 为同胚. 注意到对同胚有 $D(T^n,\mathrm{id})=D(T^{-n},\mathrm{id}),\forall n\in\mathbb{Z}_+$, 我们就有此结论.

(3) 由引理 3.2.10(2) 有 $\omega(x,T^{-1})\subseteq\omega(x,T)$. 由于 T^{-1} 也为一致刚性的, 所以同样有 $\omega(x,T)\subseteq\omega(x,T^{-1})$.

(4) 由引理 3.2.10(3), T 相对于 d_T 为等距的. 于是 T^{-1} 相对于 d_T 也是等距的. 对任意 $k\in\mathbb{Z}_+$, 有 $d_T(x,y)=d_T(T^{-k}x,T^{-k}y)$. 于是

$$d_T(x,y)=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}d_T(T^{-k}x,T^{-k}y)\geqslant\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}d(T^{-k}x,T^{-k}y)=d_{T^{-1}}(x,y),$$

即 $d_T\geqslant d_{T^{-1}}$. 因为 T^{-1} 为一致刚性的, 同理得到 $d_{T^{-1}}\geqslant d_T$. □

下面我们说明几乎等度连续系统为一致刚性的, 进而具有上面的所有性质. 先给出一个直接的证明, 然后在给出几乎等度连续性的一些等价命题的同时再给出另一个证明.

命题 3.2.12　如果 (X,T) 为几乎等度连续系统, 则 (X,T) 为一致刚性系统.

证明　设 x_0 为 X 的等度连续点. 给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $d(T^nx_0,T^ny)<\frac{\varepsilon}{2}$ 对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$ 和 $y\in B(x_0,\delta)$ 成立. 因 (X,T) 传递, 存在传递点 $x_1\in B(x_0,\delta)$. 设 $k\in\mathbb{Z}_+$ 满足 $T^kx_1\in B(x_0,\delta)$, 则对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$, 有

$$d(T^{n+k}x_1,T^nx_1)\leqslant d(T^n(T^kx_1),T^nx_0)+d(T^nx_0,T^nx_1)<\varepsilon.$$

因为 x_1 为传递点, 有 $d(T^k z, z) \leqslant \varepsilon$ 对每个 $z \in X$ 成立. 取正实数序列 $\varepsilon_i \to 0$, 通过上面的讨论, 能找到自然数序列 k_i, 使得 T^{k_i} 一致收敛于 X 上的恒同映射. □

引理 3.2.13 设 (X,T) 为传递系统且 $x \in \mathrm{Trans}_T$. 设 $\varepsilon, \delta > 0$, 以下各命题等价:

(1) 如果 $y \in X$ 满足 $d(x,y) < \delta$, 则 $d(T^k x, T^k y) \leqslant \varepsilon, \forall k \in \mathbb{Z}_+$;

(2) 如果 $n \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $d(x, T^n x) < \delta$, 则 $d(T^k x, T^{n+k} x) \leqslant \varepsilon, \forall k \in \mathbb{Z}_+$;

(3) 如果 $n \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $d(x, T^n x) < \delta$, 则 $d(y, T^n y) \leqslant \varepsilon, \forall y \in X$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 与 (3) $\Rightarrow$ (2) 易证. 下面说明 (2) $\Rightarrow$ (3) 与 (2) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3) 由 (2), $d(y, T^n y) \leqslant \varepsilon$ 对所有 $y = T^n x$ 成立. 根据连续性, 上不等式对所有 $y \in \omega(x,T) = X$ 成立.

(2) $\Rightarrow$ (1) 取定 $k \in \mathbb{Z}_+$. 由 (2), 对满足 $d(x,y) \leqslant \delta$ 的 $y = T^n x$, 有 $d(T^k x, T^k y) \leqslant \varepsilon$. 由于对任意满足 $d(x,y) < \delta$ 的 y 为某些满足 $d(x, T^{n_i} x) < \delta$ 的 $T^{n_i} x$ 的极限, 根据连续性就有 $d(T^k x, T^k y) \leqslant \varepsilon$. □

定理 3.2.14 设 (X,T) 为传递系统且 $x \in \mathrm{Trans}_T$. 则以下命题等价:

(1) (X,T) 为几乎等度连续的;

(2) x 为等度连续点;

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得如果对 $i \in Z_+$, 有 $d(T^i x, x) < \delta$, 那么就有 $d(T^{i+j} x, T^j x) \leqslant \varepsilon, \forall j \in \mathbb{Z}_+$;

(4) 如果序列 $\{i_k\} \subset \mathbb{Z}_+$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} T^{i_k} x = x$, 那么在 $C(X,X)$ 中就有 $\lim\limits_{k\to\infty} T^{i_k} = \mathrm{id}$ 成立;

(5) 度量 d 和 d_T 在 Trans_T 上诱导拓扑等价.

设 (X,T) 为几乎等度连续的系统. 则 T 在 (X, d_T) 上为等距的并且 (Trans_T, d_T) 为完备的. 此时系统为可逆的且 (X, T^{-1}) 也为几乎等度连续的, 并且 $\mathrm{Trans}_T = \mathrm{Trans}_{T^{-1}}$ 及 $d_T = d_{T^{-1}}$.

证明 第 (1) 条到第 (4) 条的相互等价由引理 3.2.13 得到. (1) $\Rightarrow$ (5) 由定义即得, 以下说明 (5) $\Rightarrow$ (3). 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 d, d_T 在 Trans_T 上等价, 存在 $\delta > 0$, 使得对满足 $d(x,y) < \delta$ 的 $y \in \mathrm{Trans}_T$, 有 $d_T(x,y) < \varepsilon$, 即 $d(T^k x, T^k y) < \varepsilon, \forall k \in \mathbb{Z}_+$. 特别地, 取 $y = T^n x$ 满足 $d(T^n x, x) < \delta$, 于是就有 $d(T^n x, T^{n+k} x) < \varepsilon, \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

根据第 (4) 条, 几乎等度连续系统为一致刚性的. 我们将证明 (Trans_T, d_T) 为完备的 (留作习题), 而剩下的结论由定理 3.2.11 即得. □

注记 3.2.15 一般而言, 一致刚性不是几乎等度连续系统特有的性质. WK 序列给出了一系列一致刚性的例子, 其中一些为几乎等度连续的, 一些为初值敏感的. 由于 WK 序列描述起来需要一定篇幅, 可参见 Akin etc. (1996). 另外需要特别指出的是, 实际上还存在极小的一致刚性的弱混合系统 (Glasner-Maon, 1989).

习　题　3.2

1. 证明：一个传递系统如果为处处不稳定的，则存在一个 $\varepsilon > 0$，使得所有点都是 ε 不稳定的.

2. 设 (X, T) 为动力系统，$x \in X$. 则以下命题等价：

(1) x 为等度连续点;

(2) (x, x) 为 $(X \times X, T \times T)$ 的等度连续点;

(3) $\omega((x, x), T \times T) = \Omega((x, x), T \times T)$;

(4) $\Omega((x, x), T \times T) \subseteq \Delta$.

3. 设 (X, T) 为几乎等度连续的动力系统. 则 (X, d_T) 为完备的并且 Trans_T 相对于 d_T 是闭集.

4. 试直接证明：如果 (X, T) 为几乎等度连续的 P 系统，则 (X, T) 为有限周期轨.

5. 试用命题 3.2.2(3) 证明：如果 (X, T) 为几乎等度连续的 M 系统，则 (X, T) 为极小等度连续的.

6. 动力系统 (X, T) 为传递的当且仅当对 $\forall x \in X$，都成立 $\Omega(x, T) = X$.

7. 设 X 为环面 $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $T : X \to X, (x, y) \mapsto (x + \alpha, y + x)$，其中 α 为无理数. 证明：(X, T) 是极小弱刚性的.

8. 证明引理 3.2.9.

9. 证明定理 3.2.11(1).

§3.3　Ellis 半群

本小节我们介绍拓扑动力系统的一个强有力的工具 ——Ellis 半群理论. Ellis 半群理论首先是由 Ellis(1960, 1969) 建立的，在 Ellis, Furstenberg, Veech, Auslander 和 Glasner 等人的参与下 Ellis 半群已经发展成为非常成熟的一套理论 (关于 Ellis 半群的知识可参看文献 (Auslander, 1988; Ellis, 1969; Glasner, 1976; Veech, 1977; Vries, 1993).

以下先给出 Ellis 半群的定义，虽然只给出作用半群为 $\mathbb{Z}_+$ 的情形，但对一般作用群 (半群)，讨论是完全类似的.

设 (X, T) 为动力系统. 考虑 $X^X = \{f | f : X \to X \text{为自映射}\}$，并赋予 X^X 乘积拓扑. 所有形如 $\mathcal{U}(x_1, x_2, \cdots, x_k; U_1, \cdots, U_k) = \{f \in X^X : f(x_1) \in U_1, \cdots, f(x_k) \in U_k\}$(其中 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ 为 X 的非空开子集) 的集合诱导了 X^X 的乘积拓扑. 由 Tychonoff 定理，在乘积拓扑下 X^X 为紧致 Hausdorff 空间. 对 $f, g \in X^X$，由 $fg(x) = f(g(x))$ 可以定义复合映射 $fg : X \to X$. 在复合运算下 X^X 为半群且满足：对固定的 $f_0 \in X^X$，映射 $f \to ff_0$ 为连续映射; 如果 $f_0 : X \to X$ 为连续映射，则映射 $f \to f_0f$ 为连续映射. 特别地，对于 T 而言，映射 $f \to Tf$ 是 X^X 上的连续自映射，为方便计，直接记此映射为 $T : X^X \to X^X$. 这样就可以将 (X^X, T) 视为一个动力

系统. 要注意的是, 即便 X 是紧度量空间, 一般情况下 X^X 也不为度量空间. 因此, X^X 的拓扑用网的概念 (Kelley, 1955) 表示更为方便.

给定动力系统 (X,T), 设 $G=\{T^n:n\in\mathbb{Z}_+\}$. 我们自然地可以将 G 视为 X^X 的子集. 令 $\mathcal{E}(X,T)$ 为 G 在 X^X 中的闭包, 称 $\mathcal{E}(X,T)$ 为 (X,T) 的**包络半群**(有时也称为**Ellis 半群**), 一般也记为 $\mathcal{E}(X)$. 易有

命题 3.3.1 $\mathcal{E}(X,T)$ 为 X^X 的紧致 Hausdorff 子半群且 $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 为动力系统 (X^X,T) 的子系统.

证明 由于 $G=\{T^n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ 在 T 作用下为不变的, 所以其闭包 $\mathcal{E}(X,T)$ 也是 T 作用下不变的. 于是 $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 为动力系统 (X^X,T) 的子系统.

设 $p,q\in\mathcal{E}(X,T)$, 则存在网 $T^{\alpha_i}\subseteq G$, 使得 $T^{\alpha_i}\to q$. 于是 $pT^{\alpha_i}\to pq$. 因为 $pT^{\alpha_i}\in\mathcal{E}(X,T)$ (如果网 $T^{\beta_j}\subseteq G$ 使得 $T^{\beta_j}\to p$. 因为 T^{α_i} 连续, 所以 $\lim_j T^{\beta_j}T^{\alpha_i}\to pT^{\alpha_i}\in\mathcal{E}(X,T)$) 以及 $\mathcal{E}(X,T)$ 为闭集, 所以 $pq\in\mathcal{E}(X,T)$. 从而 $\mathcal{E}(X,T)^2=\mathcal{E}(X,T)\mathcal{E}(X,T)\subseteq\mathcal{E}(X,T)$. 于是 $\mathcal{E}(X,T)$ 为 X^X 的紧 Hausdorff 子半群. □

动力系统 $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 是一个点传递的系统, 它以 id 为传递点:

$$\overline{\mathrm{orb}(\mathrm{id},T)}=\overline{\{T^n:n\in\mathbb{Z}_+\}}=\mathcal{E}(X,T).$$

一般而言 $\mathcal{E}(X,T)$ 不为传递的.

命题 3.3.2 设 (X,T) 为动力系统, I 为非空集合. 如果 (X^I,T) 为乘积空间, 那么 $(\mathcal{E}(X),T)$ 与 $(\mathcal{E}(X^I),T^I)$ 是同构的.

证明留作习题.

包络半群的一个优越性在于用等式代替了极限表达.

命题 3.3.3 设 (X,T) 为动力系统及 $x\in X$, 则 $\mathcal{E}(X,T)x=\overline{\mathrm{orb}(x,T)}$.

证明 设 $y\in\overline{\mathrm{orb}(x,T)}$, 则存在 $\{n_i\}\subseteq\mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{n_i}x\to y$. 不妨设网 $T^{n_i}\to\xi\in\mathcal{E}(X,T)$. 于是由逐点收敛定义 $T^{n_i}x\to\xi x$. 因为空间为 T_2 的, 所以 $y=\xi x\in\mathcal{E}(X,T)x$. 于是得到 $\overline{\mathrm{orb}(x,T)}\subseteq\mathcal{E}(X,T)x$. 反之类似可证. □

命题 3.3.4 设 (X,T), (Y,S) 为动力系统, $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为因子映射. 则存在唯一的一个半群同态 $\phi:\mathcal{E}(X,T)\to\mathcal{E}(Y,S)$, 使得对任意 $x\in X,p\in\mathcal{E}(X,T)$, 有 $\pi(px)=\phi(p)\pi(x)$.

证明 设 $\phi:\{T^n:n\in\mathbb{Z}_+\}\to\{S^n:n\in\mathbb{Z}_+\}$, $T^n\mapsto S^n$, 其中 $\{T^n:n\in\mathbb{Z}_+\},\{S^n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ 分别取从 X^X 和 Y^Y 诱导的拓扑. 于是 ϕ 为一致连续的, 从而可以连续扩张到从 $\mathcal{E}(X,T)$ 到 $\mathcal{E}(Y,S)$ 的连续映射. 仍记这个映射为 ϕ, 以下说明它即为所求.

由于 π 满足 $\pi(T^nx)=S^n(\pi(x))=\phi(T^n)\pi(x)$, $\forall n\in\mathbb{Z}_+$, 有 $\pi(px)=\phi(p)\pi(x)$, $\forall x\in X,p\in\mathcal{E}(X,T)$. 另外由 $\pi(pqx)=\phi(p)\pi(qx)=\phi(p)\phi(q)\pi(x)$ 及 $\pi(pqx)=$

$\phi(pq)\pi(x)$ 知 $\phi(p)\phi(q)\pi(x) = \phi(pq)\pi(x)$. 因为 π 为满射, 所以 $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$. 最后由 $\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 在 $\mathcal{E}(X,T)$ 中稠密知 ϕ 唯一. □

一般在不至于混淆的情况下, 我们在讨论时会省略 ϕ, 而直接将 $\mathcal{E}(X,T)$ 的元素作用在 (Y,S) 上.

在继续讨论之前, 我们先将上面包络半群的性质提炼出来, 在更为一般的前提下介绍一些概念与结论. 设 E 为一个半群, $u \in E$ 称为**幂等元**是指 $u^2 = u$. 用 $Id(E)$ 记 E 的全体幂等元组成的集合. E 的非空子集 L 称为 E 的**左理想** (**右理想**), 如果 $EL \subseteq L$ $(RE \subseteq R)$. 如果一个子集既为左理想又为右理想, 则称为**理想**. 对于 E 的左理想 L, 如果不存在 E 的非空左理想 J 满足 $J \subsetneq L$, 就称 L 为 E 的**极小左理想**. 同样定义**极小右理想**与**极小理想**.

定义 3.3.5　一个集合 E 如果满足以下条件, 则称之为**Ellis 半群**:

(1) E 为半群;

(2) E 为紧致 Hausdorff 空间;

(3) 对任意 $p \in E$, 映射 $R_p : E \longrightarrow E, q \longmapsto qp$ 为连续的.

设 (X,T) 为动力系统, 易见上面的包络半群 $\mathcal{E}(X,T)$ 为 Ellis 半群. 另一个常见的 Ellis 半群的例子为**粘附半群** $\mathcal{H}(X,T)$, 它定义为 $\{T^n\}$ 在 X^X 中的极限点全体, 亦即 $\mathcal{H}(X,T) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\{T^n : n \geqslant m\}}$.

命题 3.3.6　设 (X,T) 为动力系统, 则 $\mathcal{H}(X,T)$ 为 Ellis 半群并且 $(\mathcal{H}(X,T),T)$ 为动力系统. 又如 $x \in X$, 则 $\mathcal{H}(X,T)x = \omega(x,T)$.

下面为著名的 Ellis-Namakura 定理.

定理 3.3.7 (Ellis-Namakura 定理)　如果 E 为 Ellis 半群, 则在 E 中必有幂等元.

证明　令 $\mathcal{A} = \{N \subseteq E : N \neq \varnothing, \overline{N} = N, N \cdot N \subseteq N\}$. 容易看出, $\mathcal{A}$ 非空且满足 Zorn 引理的条件. 于是根据 Zorn 引理, 在包含关系这个半序下有极小元 $M \in \mathcal{A}$.

设 $w \in M$. 因为 $M \supseteq Mw = R_w(M) \in \mathcal{A}$ 及 M 为极小的, 所以有 $Mw = M$. 于是 $Q = R_w^{-1}(w) \cap M = \{q \in M : qw = w\} \neq \varnothing$. 又由 R_w 连续, $R_w^{-1}(w)$ 为闭集. 所以就有 $Q \in \mathcal{A}$. 但是 $Q \subseteq M$, 由 M 的极小性就有 $Q = M$. 于是 $w \in M = Q$, 这样就得到 $w^2 = w$. 综上, $Id(E)$ 不为空集. □

Ellis-Namakura 定理说明对 Ellis 半群 E, 其幂等元集合 $Id(E)$ 非空. 我们可以在 $Id(E)$ 中引入半序 (即自反, 传递的关系)$<_R$. 如果 $uv = v$, 则定义 $v <_R u$. 如果 $v <_R u$ 且 $u <_R v$, 那么称 u 和 v 为等价的, 记为 $u \sim_R v$. 同样, 可以定义半序 $<_L$ 为 $v <_L u$ 当且仅当 $vu = v$. 然后类似定义等价关系 $\sim_L$. 幂等元 $u \in Id(E)$ 称为**极小的**是指在半序 $<_R$ 下为极小, 即如有 $v \in Id(E)$, 使得 $v <_R u$, 那么必有 $u <_R v$. 同样定义**极大幂等元**.

引理 3.3.8 (1) 设 L 为 Ellis 半群 E 的左理想且 $u \in Id(E)$. 那么存在 Lu 中某幂等元 v, 使得 $v <_R u$ 且 $v <_L u$;

(2) 一个幂等元为极小的当且仅当它包含在某极小左理想中.

证明 (1) 首先注意到 Lu 仍为左理想, 进而为半群. 由 Ellis-Namakura 定理, 存在 $w \in Lu$ 为幂等元. 令 $v = uw$, 则有 $v \in uLu \subseteq Lu$ 及 $v^2 = uwuw = uww = uw = v$. 另外, 此时容易看出, 我们已有 $vu = v$ 及 $uv = v$, 即 $v <_R u$ 且 $v <_L u$.

(2) 设 u 为极小幂等元而 L 为极小左理想. 由 (1), 在 Lu 中存在幂等元 v, 使得 $v <_R u$. 由于 u 为极小的, 由定义有 $u <_R v$. 于是 $u = vu \in Lu$. 因为 Lu 就是极小左理想 (见习题), 所以我们已得结论.

反之, 设 L 为极小左理想且 $u \in Id(L)$, 下证 u 极小. 令 $v \in E$ 为任一满足 $v <_R u$ 的幂等元. 由 $(vu)(vu) = vvu = vu$, vu 也是 L 的幂等元. 因为 L 极小, 有 $L(vu) = L$. 于是存在 $p \in L$, 使得 $pvu = u$. 因此有 $vu = (uv)u = u(vu) = p(vu)(vu) = pvu = u$, 即 $u <_R v$. 根据极小的定义, u 为极小的. □

推论 3.3.9 设 L 为 Ellis 半群 E 的左理想且 $u \in Id(L)$. 那么存在 L 中极小幂等元 v, 使得 $v <_R u$ 且 $v <_L u$.

证明 设 H 为 E 中任意极小左理想, 由引理 3.3.8(1), 存在 Hu 中某幂等元 v, 使得 $v <_R u$ 且 $v <_L u$. 由于 H 极小, 所以 Hu 极小. 进而由引理 3.3.8(2), v 极小, 而且 $v \in Hu \subseteq EL \subseteq L$. □

定理 3.3.10 设 E 为 Ellis 半群且 $c \in Id(E)$. 那么存在极小与极大幂等元 u 和 v, 使得 $u <_R c <_R v$.

证明 由推理 3.3.9, 存在极小幂等元 u, 使得 $u <_R c$. 我们只需说明右边的关系. 设 $\{c_i\}$ 为 $Id(E)$ 中满足 $c <_R c_i$ 的全序子集. 视 $\{c_i\}$ 为网, 且不妨设 $c_i \to r \in E$. 则对固定的 i, 如 $c_i <_R c_j$, 即有 $c_j c_i = c_i$, 进而 $rc_i = c_i$. 设 $H = \{q \in E : \text{对所有 } c_i \text{ 有 } qc_i = c_i\}$. 由上, 我们知 H 为非空闭子半群, 于是, 由 Ellis-Namakura 定理, H 包含了幂等元 s. 易见有关系式 $c <_R c_i <_R s$. 从而根据 Zorn 引理, 存在极大幂等元 v, 使得 $c <_R v$. □

下面回到包络半群来. 我们对 $\mathcal{E}(X,T)$ 的左理想有很好的刻画:

命题 3.3.11 设 (X,T) 为动力系统. 则 $\mathcal{E}(X,T)$ 的非空子集 I 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的左闭理想当且仅当它为 $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 的子系统; 而 I 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的极小左理想当且仅当它为 $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 的极小子系统. 特别地, $\mathcal{E}(X,T)$ 的极小左理想为闭集.

证明 记 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X,T)$. 设 I 为 $(\mathcal{E},T)$ 的子系统, 则 I 为闭的且 $TI \subseteq I$. 那么

$$\mathcal{E}I = \overline{\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}}I \subseteq \overline{\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}I} \subseteq \overline{I} = I.$$

所以 I 为左理想. 如 I 为 $(\mathcal{E},T)$ 的极小集, 则它为左理想. 设 $K \subseteq I$ 为非空理想. 设 $p \in K$, $q \in I$, 则 $q \in I = \overline{\mathrm{orb}(p,T)} = \overline{\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}p}$. 取网 $\{T^{n_\alpha}\} \subset \{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$,

使得 $T^{n_\alpha}p \to q$. 不妨设 $T^{n_\alpha} \to \xi \in \mathcal{E}$, 则 $q = \xi p \in \mathcal{E}K \subseteq K$. 所以 $I \subseteq K$. 进而就有 $I = K$. 所以 I 为极小左理想.

如 I 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的左闭理想, 则易见它为 $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 的子系统. 下设 I 为极小左理想. 对任意 $p \in I$, 由 $\mathcal{E}p \subseteq \mathcal{E}I \subseteq I$ 及 $\mathcal{E}(\mathcal{E}p) \subseteq \mathcal{E}p$, 有 $\mathcal{E}p = I$. 根据 $\mathcal{E}$ 的定义 (R_p 连续), I 为闭的. 从而 $I = \mathcal{E}p = \overline{\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}p}$. 综上就得到 I 为 $(\mathcal{E},T)$ 的极小子系统. □

推论 3.3.12 设 F 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的闭左理想 (等价地, F 为 $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 的非空闭不变子集), 则 F 必包含极小左理想.

命题 3.3.13 设 (X,T) 为动力系统, 而 I 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的任一取定的极小左理想, 则

(1) 对任意 $x \in X$, Ix 为极小集;

(2) 对 $x \in X$, x 为极小点当且仅当存在 $u \in Id(I)$, 使得 $ux = x$.

证明 (1) 设 $\pi : (\mathcal{E}(X,T),T) \to (X,T)$, $p \mapsto px$, 则它为同态, 而 Ix 为 I 的同态像自然也为极小集.

(2) 设 x 为极小点, 则 Ix 为包含 x 的极小集. 由于 $x \in Ix$, $F = \{p \in I : px = x\} \neq \varnothing$. 又易见 F 为闭半群. 由 Ellis-Namakura 定理, 在 F 取幂等元 u, 则有 $ux = x$.

反之, 如存在 $u \in Id(I)$, 使得 $ux = x$, 则 $x \in Ix$. 而 Ix 是极小集, 所以 x 极小. □

设 (X,T) 为动力系统, d 为 X 的度量. 点对 $(x,y) \in X \times X$ 称为**proximal 的**是指 $\lim\limits_{n\to+\infty}\inf d(T^n x, T^n y) = 0$. 将全体 proximal 对的集合记为 $P(X,T)$.

命题 3.3.14 设 (X,T) 为动力系统, $x,y \in X$, 则以下等价:

(1) x, y 为 proximal 的;

(2) 存在某个 $p \in \mathcal{E}(X,T)$, 使得 $px = py$;

(3) 存在 $\mathcal{E}(X,T)$ 的某个极小左理想 I, 使得对任意 $p \in I$, $px = py$ 成立.

证明 (1) ⇒ (2) 由定义, 存在 $\{n_i\} \subseteq \mathbb{Z}_+$ 及 $z \in X$, 使得 $T^{n_i}x \to z$ 且 $T^{n_i}y \to z$. 不妨设网 $\{T^{n_i}\}$ 收敛, 且 $T^{n_i} \to p \in \mathcal{E}(X,T)$. 于是就有 $px = z = py$.

(2) ⇒ (1) 设存在 $p \in \mathcal{E}(X,T)$, 使得 $z = px = py$. 设网 $\{T^{n_\alpha}\}_{\alpha\in D}$, 使得 $T^{n_\alpha} \to p$. 由包络半群的定义, 存在序列 $\{n_i\} \subseteq \{n_\alpha\}$, 使得 $T^{n_i}x \to px = z$ 且 $T^{n_i}y \to py = z$. 于是 x 与 y 为 proximal 的.

(2) ⇒ (3) 令 $F = \{p \in \mathcal{E}(X,T) : px = py\}$. 由 (2), $F \neq \varnothing$. 又易见 F 为闭的左理想, 由推论 3.3.12 知 F 包含极小左理想 I. I 即为所求.

(3) ⇒ (2) 显然. □

命题 3.3.15 设 (X,T) 为动力系统, 则

(1) 如果 $x \in X$ 且 $u \in Id(\mathcal{E}(X))$, 则 x, ux 为 proximal 的;

(2) (Auslander-Ellis) 如果 $x \in X$, 则在其轨道闭包中存在极小点 x', 使得 x, x' 为 proximal 的;

(3) 如果 (X,T) 为极小的, 则 x, y 为 proximal 的当且仅当存在极小左理想 I 及 $u \in Id(I)$, 使得 $y = ux$.

证明 (1) 显然.

(2) 设 I 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的极小左理想. 取 $v \in Id(I)$, 则 $x' = vx \in Ix$ 即为所求.

(3) 设 x, y 为 proximal 的, 那么根据命题 3.3.14, 存在一个极小左理想 I, 使得对任意 $p \in I$ 有 $px = py$. 如果 X 为极小的, 则由 Iy 为极小的就有 $Iy = X$. 从而 $y \in Iy$. 于是 $F = \{p \in I : py = y\}$ 为非空半群. 所以存在 $v \in Id(I)$, 使得 $vy = y$. 于是有 $y = vy = vx$. □

命题 3.3.16 设 (X,T) 为动力系统, 则

(1) 对任何 $x \in X$, 它为回复点当且仅当存在幂等元 u, 使得 $x = ux$;

(2) 设 x 为回复点, 则在其轨道闭包中存在与 x proximal 的极小点 y, 且还满足 (x,y) 为 $(X \times X, T \times T)$ 的回复点.

证明 (1) 如 x 为回复点, 则存在 $p \in \mathcal{E}$, 使得 $px = x$. 于是 $F = \{p \in \mathcal{E} : px = x\}$ 为非空闭子半群. 于是其中存在幂等元 u 满足 $x = ux$. 反之显然.

(2) 由于 x 为回复点, 存在幂等元 u, 使得 $ux = x$. 取极小幂等元 v, 使得 $v <_R u$. 令 $y = vx$, 则

$$u(x,y) = (ux, uvx) = (x, vx) = (x,y),$$
$$v(x,y) = (vx, vy) = (y,y).$$ □

最后, 我们证明著名的 Hindman 定理来结束本小节.

一个集合 S 称为**中心集**是指存在系统 (X,T), 点 $x, y \in X$, 使得 x proximal 于极小点 y, 且存在 y 的邻域 U, 使得 $N(x,U) \subseteq S$.

定理 3.3.17 任何中心集包含了一个 IP 集.

证明 设 (X,T) 为动力系统, $x \in X$, $y \in X$ 极小并且 x, y 为 proximal 的. 又设 U 为 y 的邻域, 使得 $S \supseteq N(x,U)$. 下面我们归纳地定义 y 的邻域列 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以及 $p_i \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $\mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=1}^{\infty}) \subseteq S$. 首先看一个断言:

断言 对 y 的任意邻域 V, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^n x, T^n y \in V$.

断言证明 由命题 3.3.15, 存在 $\mathcal{E}(X,T)$ 的极小幂等元 u, 使得 $ux = uy = y$. 设网 $\{T^{n_\alpha}\}_{\alpha \in D}$, 使得 $T^{n_\alpha} \to u$. 由定义, 存在 $\alpha_0 \in D$, $\alpha > \alpha_0$, $T^{n_\alpha}x, T^{n_\alpha}y \in V$. 特别地, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^n x, T^n y \in V$.

令 $U_1 = U$, 由断言存在 p_1, 使得 $T^{p_1}x, T^{p_1}y \in U_1$. 令 $U_2 = U_1 \cap T^{-p_1}U_1$, 易见 U_2 为 y 的邻域, 根据断言存在 p_2, 使得 $T^{p_2}x, T^{p_2}y \in U_2$, 令 $U_3 = U_2 \cap T^{-p_2}U_2$. 归

纳地，得到 y 的邻域列 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以及 $p_i \in \mathbb{Z}_+$，使得 $U_{k+1} \subseteq U_k$，$T^{p_k}U_{k+1} \subseteq U_k$ 且 $T^{p_k}x, T^{p_k}y \in U_k$. 下面验证 $\mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=1}^{\infty}) \subseteq S$.

令 $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，则

$$T^{p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_n}}x \in T^{p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_{n-1}}}U_{i_n}$$
$$\subseteq T^{p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_{n-2}}}U_{i_{n-1}} \subseteq \cdots \subseteq T^{p_{i_1}}U_{i_2} \subseteq U_{i_1} \subseteq U.$$

于是 $p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_n} \in S$，进而 $\mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=1}^{\infty}) \subseteq S$. 所以 S 包含了一个 IP 集. □

现在我们可以证明 Hindman 定理：

定理 3.3.18 (Hindman 定理)　对 $\mathbb{Z}_+$ 的任意有限剖分，其中必有其一包含某个 IP 集.

证明　设 $\mathbb{Z}_+ = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$，由定理 3.3.17，仅需证明存在 B_j，使得它为中心集. 考虑 n 符号系统 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}^{\mathbb{Z}}$，对 $\omega \in \Omega$ 定义 $\sigma\omega(j) = \omega(j+1)$. 令 ξ 满足对 $n \geqslant 0$，有 $\xi(n) = i$ 当且仅当 $n \in B_i$. 取极小点 $\eta \in \Omega$ 与 ξ proximal. 设 $\eta(0) = j$，则 $U = \{\omega \in \Omega : \omega(0) = j\}$ 为 η 的邻域. 于是 $S = \{n : \sigma^n\xi \in U\}$ 为中心集. 由于 $\sigma^n\xi \in U$ 当且仅当 $\sigma^n\xi(0) = j$ 当且仅当 $\xi(n) = j$ 当且仅当 $n \in B_j$，所以 $S \subseteq B_j$. 于是 B_j 为中心集. □

习　题　3.3

1. 证明命题 3.3.2.

2. 证明命题 3.3.6.

3. 设 I 为 Ellis 半群 E 的极小左理想，则对任意 $p \in E$，Ip 仍为极小左理想.

4. 此习题体现了极小左理想的结构. 设 I 为 Ellis 半群 E 的极小左理想，则

(1) 对任意 $p \in I$，有 $Ip = I$;

(2) 对任意 $u \in Id(I), p \in I$，有 $pu = p$;

(3) 如果 $u \in Id(I), p \in I$ 满足 $up = u$，则 $p \in Id(I)$;

(4) 设 $u \in Id(I)$，则 uI 为以 u 为单位元的群;

(5) 对任意 $p \in I$，存在唯一 $u \in Id(I)$，使得 $up = p$;

(6) 设 $u, v \in Id(I)$ 且 $p \in uI$，则存在 $r \in I$，使得 $rp = v$ 与 $pr = u$ 成立;

(7) $I = \bigcup_{u \in Id(I)} uI$;

(8) 如果 $u, v \in Id(I)$ 且 $u \neq v$，则 $uI \cap vI = \varnothing$.

5. 对半群消去律一般不成立，但有：设 I 为 Ellis 半群 E 的极小左理想. 如果 $p \in E$ 和 $q, r \in I$ 满足 $qp = rp$，则 $q = r$. 提示：设 $s = pq \in EI \subseteq I$，则 $qs = qpq = rpq = rs$. 取 $v \in Id(I)$，使得 $vs = s$. 设 a 为 s 在群 vI 中逆，即 $sa = v$. 于是 $q = qv = qsa = rsa = rv = r$.

6. 设 I_1, I_2 为 Ellis 半群 E 的极小左理想. 如果 $u_1 \in Id(I_1)$，那么存在唯一的 $u_2 \in Id(I_2)$，使得 $u_1 \sim_R u_2$. 提示：由于 $EI_2u_1 \subseteq I_2u_1$ 及 $I_2u_1 \subseteq EI_1 \subseteq I_1$，可见 I_2u_1 为 I_1 的子理想. 但由 I_1 的极小性，有 $I_2u_1 = I_1$. 所以存在 $u_2 \in I_2$，使得 $u_2u_1 = u_1$. 运用习题 5 证明唯一性以及 $u_2 \in Id(I_2)$. 再验证 $u_1 \sim_R u_2$.

7. 设 (X,T) 为动力系统, 则 proximal 关系为等价关系当且仅当包络半群 $\mathcal{E}(X,T)$ 中包含了唯一一个极小左理想.

8. 设 (X,T) 为动力系统, 如果 proximal 关系 $P(X,T)$ 为闭的, 那么它为等价关系.

9. 动力系统 (X,T) 为弱刚性的当且仅当 $id \in \mathcal{H}(X,T)$.

10. 设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为因子映射. 证明对任意的 $y\in \mathrm{Rec}(S)$, 存在 $x\in\pi^{-1}(y)$, 使得 $x\in\mathrm{Rec}(T)$.

§3.4 distality 的概念

对于一个系统, 其中任何两个点随着时间的转移要么会在许多时候变得越来越接近, 要么将永远保持着一定的距离. 当它们属于前一种情况时, 又会有两种状态. 一种是它们是渐近的, 而另一种是它们在许多时候会越来越近但同时又总是能在任意长时间后保持一定距离. 下面我们在数学上给出上述运动行为的准确描述.

定义 3.4.1 设 (X,T) 为动力系统, d 为 X 上的度量. 点对 $(x,y)\in X\times X$ 称为**proximal 的**是指 $\lim\limits_{n\to+\infty}\inf d(T^nx,T^ny)=0$; 又如点对满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(T^nx,T^ny)=0$, 则称为**渐近 (asymptotic) 的**. 如果 $x\neq y$, 那么 (x,y) 称为**真的**. 将全体 proximal 对和渐近对的集合分别记为 $P(X,T)$ 和 $\mathrm{Asym}(X,T)$.

点对 $(x,y)\in X^2$ 如果不是 proximal 的, 那么就称为**distal 的**. 点对称为**Li-Yorke 对**是指它为 proximal 但不是渐近的; 而称为**强 Li-Yorke 对**是指它为 proximal 的并且为 X^2 中的回复点. 将全体 distal 对、Li-Yorke 对以及强 Li-Yorke 对全体记为 $D(X,T)$, $\mathrm{LY}(X,T)$ 及 $\mathrm{sLY}(X,T)$.

一个系统如果没有真的 proximal 对 (Li-Yorke 对、强 Li-Yorke 对), 就称为**distal 的** (**几乎 distal 的**、**半 distal 的**).

这样我们在本节开头提到的事实就可表示为

$$X\times X=P(X,T)\cup D(X,T)\ \text{及}\ P(X,T)=\mathrm{Asym}(X,T)\cup\mathrm{LY}(X,T).$$

易见一个强 Li-Yorke 对必为 Li-Yorke 对. 由定义, 一个 distal 系统必为几乎 distal 的, 而一个几乎 distal 的系统必为半 distal 的.

例 3.4.2 (1) Auslander-Floyd 系统为半 distal 的, 但它有 Li-Yorke 对 (Auslander, 1988).

(2) Morse 极小系统为几乎 distal 但不是 distal 的.

(3) Sturmian 系统 (见习题 1.3) 也是几乎 distal 但不是 distal 的.

这一节主要刻画 distal、几乎 distal 和半 distal 系统, 并且类比它们的异同. 关于 distal 系统的进一步性质, 我们将在下一节讨论.

设 $\Delta_n=\left\{(x,y)\in X\times X: d(x,y)<\dfrac{1}{n}\right\}$, 有以下事实:

引理 3.4.3 设 $A_{k,n}=\bigcap_{i=k}^{+\infty}(T\times T)^{-i}\overline{\Delta_n}$, 则

(1) $\mathrm{Asym}(X,T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k,n})$;

(2) $P(X,T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty}(T\times T)^{-k}\Delta_n)$.

注记 3.4.4 注意到每个 Δ_n 为开集, $P(X,T)$ 为 G_δ 集.

设 $\mathcal{E}(X,T)$ 为系统 (X,T) 的包络半群, 记 $J=Id(\mathcal{E}(X,T))$ 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的全体幂等元, 而 J_0 为全体极小幂等元的集合. 对 $A\subset X^2$ 和 $x\in X$, 令 $A(x)=\{y\in X:(x,y)\in A\}$. 有

命题 3.4.5 设 (X,T) 为动力系统, 对任意 $x\in X$, 有

$$J_0x\subseteq Jx\subseteq P(x).$$

如果 (X,T) 为半单的(X 中的点都是极小点), 则 $P(x)=Jx=J_0x$.

证明 由命题 3.3.15 易得. □

点 x 称为**distal 点**是指 $P(x)=\{x\}$. 如果系统 (X,T) 每个点都是 distal 点, 那么系统为 distal 的. 系统 (X,T) 称为**点 distal 的**是指系统中存在 distal 点. distal 和点 distal 系统有很好的结构, 我们将会在后面论述.

命题 3.4.6 设 (X,T) 为动力系统, $x\in X$. 对以下条件 (1) ⇒ (2) ⇒ (3):

(1) x 为 distal 点;

(2) $Jx=\{x\}$;

(3) $J_0x=\{x\}$.

特别地, distal 点为极小的. 如果 (X,T) 为半单的, 则以上三条命题等价.

由命题 3.4.5 易证.

定理 3.4.7 设 (X,T) 为动力系统, $x\in X$. 则以下命题等价:

(1) x 为 distal 的;

(2) x 为 IP* 回复的;

(3) 对任意幂等元 u, 有 $ux=x$;

(4) 对任意系统 (Y,S) 以及其中任意回复点 $y\in Y$, (x,y) 为 $(X\times Y,T\times S)$ 的回复点.

证明 由命题 3.4.6, (1) 与 (3) 等价. 下证 (3) ⇒ (4). 设 (Y,S) 为动力系统, 而 $y\in Y$ 为回复点. 据命题 3.3.16, 存在幂等元 u, 使得 $uy=y$. 由条件 (3), $ux=x$. 于是得到 $u(x,y)=(ux,uy)=(x,y)$, 从而 (x,y) 为乘积空间的回复点.

(4) ⇒ (2) 对任意 IP 集 F, 存在系统 (Y,S), 回复点 $y\in Y$ 以及它的邻域 V, 使得 $N(y,V)\subseteq F$. 对 x 的任意邻域 U, 因为 (x,y) 为 $(X\times Y,T\times S)$ 的回复点, 所以

$$N(x,U)\cap N(y,V)=N((x,y),U\times V)\neq\varnothing.$$

尤其 $N(x,U)\cap F\neq\varnothing$, 所以 $N(x,U)$ 为 IP* 集. 亦即 x 是 IP* 回复的.

(2) ⇒ (1) 如果 x 不是 distal 的, 那么在 x 的轨道闭包中存在极小点 $y\neq x$, 使得 x,y 为 proximal 的. 取邻域 U,V 分离点 x 和 y. 因为 $N(x,V)$ 为中心集, 根据定理 3.3.17, 它包含一个 IP 集. 又由条件 (2), $N(x,U)$ 为 IP* 集, 所以 $N(x,U)\cap N(x,V)\neq\varnothing$. 这与 $U\cap V=\varnothing$ 矛盾. 所以 x 为 distal 的. □

定理 3.4.8 设 (X,T) 为动力系统, 以下三条性质彼此等价:

(1) (X,T) 为 distal 系统;

(2) 乘积空间 $(X\times X,T\times T)$ 每一个点为极小点;

(3) $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 为极小系统.

证明 (1) ⇒ (3) 设 (X,T) 为 distal 系统, $I\subset\mathcal{E}(X,T)$ 为极小左理想. 取 $u\in I$ 为幂等元. 则对任意 $x\in X$, (x,ux) 为 proximal 对. 因 (X,T) 为 distal 系统, $x=ux$. 从而 $u=\mathrm{id}$. 进而 $\mathcal{E}(X,T)=\mathcal{E}(X,T)u=I$. 因此, $(\mathcal{E}(X,T),T)=(I,T)$ 为极小系统.

(3) ⇒ (2) 假设 $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 为极小系统. 对任意 $(x,y)\in X\times X$. 设 $\pi:\mathcal{E}(X,T)\to\overline{\mathrm{orb}((x,y),T\times T)}$ 满足 $\pi(p)=(px,py),\forall p\in\mathcal{E}(X,T)$, 则 π 为因子映射. 因此 $(\overline{\mathrm{orb}((x,y),T\times T)},T\times T)$ 为极小系统, 即 (x,y) 为极小点.

(2) ⇒ (1) 假设乘积空间 $(X\times X,T\times T)$ 每一个点为极小点. 任取 $x\neq y$, 则 $(\overline{\mathrm{orb}((x,y),T\times T)},T\times T)$ 为极小系统. 因 $\overline{\mathrm{orb}((x,y),T\times T)}\cap\Delta_X\neq\overline{\mathrm{orb}((x,y),T\times T)}$ 且 $\overline{\mathrm{orb}((x,y),T\times T)}\cap\Delta_X$ 为 $X\times X$ 闭的不变子集, 所以 $\overline{\mathrm{orb}((x,y),T\times T)}\cap\Delta_X=\varnothing$. 从而 (x,y) 为 distal 对. □

下面刻画几乎 distal 与半 distal 系统, 可以看出这三类系统的相似之处.

定理 3.4.9 设 (X,T) 为动力系统, 以下三条性质彼此等价:

(1) (X,T) 为几乎 distal 系统;

(2) 乘积空间 $(X\times X,T\times T)$ 中每个点的 ω 极限集为极小的;

(3) $(\mathcal{H}(X,T),T)$ 为极小的.

证明 (1) ⇒ (3) 设 (X,T) 为几乎 distal 的. 由于 $(H(X,T),T)$ 为动力系统, 所以其中存在极小集 $I\subseteq H(X,T)$. 设 $u\in I$ 为幂等元. 则对任意 $x\in X$, (x,ux) 为 proximal 的. 因为 (X,T) 为几乎 distal 的, 所以它们为渐近的, 即 $px=pux,\forall p\in H(X,T)$. 这样得到 $px=pux$ 对任意 $x\in X$ 成立. 于是, $p=pu\in H(X,T)I\subset I$. 从而 $H(X,T)=I$, 即 $(H(X,T),T)$ 为极小的.

(3) ⇒ (2) 假设 $(\mathcal{H}(X,T),T)$ 为极小系统. 对任意 $(x,y)\in X\times X$. 设 $\pi:\mathcal{H}(X,T)\to\omega((x,y),T\times T)$ 满足 $\pi(p)=(px,py),\forall p\in\mathcal{H}(X,T)$, 则 π 为因子映射 (命题 3.3.6). 因此 $(\omega((x,y),T\times T))$ 为极小系统, 即 (x,y) 为极小点.

(2) ⇒ (1) 设 (x,y) 为 proximal 的, 则 $\omega((x,y),T\times T)\cap\Delta_X\neq\varnothing$. 由于 $\omega((x,y),T\times T)$ 极小, $\omega((x,y),T\times T)\subseteq\Delta_X$. 即 (x,y) 为渐近的, 由定义它不为 Li-Yorke 对. 从而 (X,T) 为几乎 distal 的. □

定理 3.4.10　设 (X,T) 为动力系统, 以下三条性质彼此等价:

(1) (X,T) 为半 distal 系统;

(2) 乘积空间 $(X\times X, T\times T)$ 中每个回复点为极小的;

(3) $\mathcal{H}(X,T)$ 中每个幂等元为极小的.

证明　(1) ⇒ (3) 设 (X,T) 为半 distal 的. 令 $u\in H(X,T)$ 为幂等元. 由引理 3.3.8, 存在极小幂等元 $v\in H(X,T)$, 使得 $vu=uv=v$. 于是对任意 $x\in X$, 有

$$u(ux,vx)=(u^2x,uvx)=(ux,vx),$$

$$v(ux,vx)=(vux,v^2x)=(vx,vx).$$

即 (ux,vx) 为强 Li-Yorke 对. 由于 (X,T) 为半 distal 的, 所以 $ux=vx$. 由于 x 任意, $u=v$. 尤其有 u 为极小的.

(3) ⇒ (2) 假设 $(\mathcal{H}(X,T),T)$ 每个幂等元为极小的. 对任意 $(x,y)\in X\times X$, 如果它为回复点, 则存在幂等元 $u\in H(X,T)$, 使得 $u(x,y)=(x,y)$. 由假设, u 为极小的, 进而 (x,y) 也为极小的.

(2) ⇒ (1) 设 X^2 中每个回复点极小. 如 $(x,y)\in X^2$ 为强 Li-Yorke 对, 因为它为 proximal 的, 所以有 $\omega((x,y),T\times T)\cap\Delta_X\neq\varnothing$. 又由于 (x,y) 回复, $\omega((x,y),T\times T)$ 极小, 所以 $\omega((x,y),T\times T)\subset\Delta_X$. 于是 $x=y$, 由定义, (X,T) 为半 distal 的. □

推论 3.4.11　设 (X,T) 为动力系统, 则

(1) 如果 (X,T) 为 distal 的, 那么 (X,T) 每个点为极小的;

(2) 如果 (X,T) 为几乎 distal 的, 那么 (X,T) 中每个点的 ω 极限集为极小的;

(3) 如果 (X,T) 为半 distal 的, 那么 (X,T) 中每个回复点为极小的.

推论 3.4.12　任何传递半 distal 系统 (进而传递几乎 distal 系统) 为极小的.

习　题　3.4

1. 证明 $\mathrm{sLY}(X,T)\subseteq \mathrm{LY}(X,T)$.

2. 设 P 为性质 distal、几乎 distal 和半 distal 之一, 则

(1) 系统 (X,T) 具有性质 P, 则其任意因子以及子系统也具有性质 P;

(2) 系统 (X,T) 具有性质 P, 则其任意阶乘积系统以及逆极限系统也具有性质 P.

3. 设 (X,T) 为动力系统. 则以下等价:

(1) (X,T) 为 distal 的;

(2) 对所有基数 $n\geqslant 1$, $(X^n,T^{(n)})$ 为 distal 的;

(3) 存在基数 $n\geqslant 1$, 使得 $(X^n,T^{(n)})$ 为 distal 的;

(4) 对所有基数 $n\geqslant 1$, $(X^n,T^{(n)})$ 为半单的;

(5) 存在基数 $n\geqslant 2$, 使得 $(X^n,T^{(n)})$ 为半单的;

(6) 包络半群 $\mathcal{E}(X,T)$ 为群.

4. 任何 distal 系统为弱刚性的.

§3.5 distality 与等度连续性

上一节讨论了 distal 的概念与一些刻画，这一节将更为深入地研究 distal 系统与等度连续系统. distal 这个名称是由 Gottschalk 引入的，但是这个概念最早是由 Hilbert 在试图给刚性群一个拓扑刻画时提出的. 从定义我们容易推导出等度连续系统一定是 distal 的. 一个简单的 distal 非等度连续的例子是圆盘上的不等速旋转. 设 D 为平面上单位圆盘，在平面上取极坐标 (r,θ). 定义 $T:D\to D, T(r,\theta)=(r,\theta+r)$. 则 (D,T) 为 distal 的但不是等度连续的. 但是要举一个极小的 distal 但不是等度连续的例子要困难一些，于是当时人们提出了一个猜想，认为极小的紧度量 distal 系统必为等度连续的. 但是后来 Furstenberg(1963) 否定了这个猜想，而且他十分本质地分析了二者的区别，给出了极小 distal 系统的结构定理. 首先我们来看一个例子.

设 $X=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}:|\xi_n|=1, \forall n\in\mathbb{N}\}$ 为无限维环面，而 $X_n=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):|\xi_i|=1, \forall 1\leqslant i\leqslant n\}$ n 维环面. 定义 $T:X\to X, (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\mapsto(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\xi_1,\xi_1\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}\xi_n,\cdots)$ 以及 $T_n:X_n\to X_n$, $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\mapsto(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\xi_1,\xi_1\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}\xi_n)$，其中 α 为 π 的无理倍数.

容易验证 (X,T) 与 (X_n,T_n), $n\geqslant 2$ 都是极小 distal 但不是等度连续的系统. 对 $n\geqslant 2$，设 $\pi^n_{n-1}:X_n\to X_{n-1}$, $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\mapsto(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})$. 则 (X_{n-1},T_{n-1}) 为 (X_n,T_n) 的极大 distal 因子，即 π^n_{n-1} 为极大等度连续扩充. 这样我们得到 X 的结构：

$$\{pt\}\leftarrow X_1\xleftarrow{\pi_1^2}X_2\xleftarrow{\pi_2^3}X_3\cdots\xleftarrow{\pi_{n-1}^n}X_n\xleftarrow{\pi_n^{n+1}}X_{n+1}\xleftarrow{\pi_{n+1}^{n+2}}\cdots\leftarrow X.$$

这样的一个结构并不是偶然的，Furstenberg 证明了任何极小 distal 系统都具有这样的一个结构. 我们将在下一节详细讨论这个结论. 下面讨论 distal 系统以及等度连续系统的其他一些刻画以及关于极大 distal 和等度连续因子存在性的结论.

定理 3.5.1 设 (X,T) 为动力系统.

(a) 以下各命题等价：

(1) (X,T) 为 distal 的；

(2) $\mathcal{E}(X,T)$ 的每个幂等元为 X 上的恒同映射；

(3) 存在极小幂等元 u 为 X 上的恒同映射；

(4) $\mathcal{E}(X,T)$ 为群.

如果 (X,T) 为 distal 的，那么它可逆，并且 $\mathcal{E}(X,T)=\mathcal{E}(X,T^{-1})$，于是逆系统也是 distal 的.

(b) 以下各命题等价：

(1) (X,T) 为等度连续的；

(2) $\{T^i : i \in \mathbb{Z}_+\}$ 在 $C(X,X)$ 中有紧闭包;

(3) $\mathcal{E}(X,T)$ 为由同胚元组成的群, 且由 $C(X,X)$ 诱导的拓扑与由 X^X 诱导的一致.

如果 (X,T) 为等度连续的, 那么它为 distal 的且可逆的. 此时 $\mathcal{E}(X,T) = \mathcal{E}(X, T^{-1})$ 且其逆系统也是等度连续的.

证明 (a) 设 u 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的幂等元, 那么就有 $u(x) = u(u(x)), \forall x \in X$. 于是 u 在 $u(X)$ 上作用为恒同的. 所以一旦 u 为单射或满射, 那么它就成为在 X 上的恒同映射 id. 由定义 X 为 distal 的, 其实是说 $\mathcal{E}(X,T)$ 中每个元素在 X 上的作用为单射, 于是就有 (4) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 下证 (3) $\Rightarrow$ (4). 设 id 为极小幂等元, 那么由 $\mathcal{E}(X,T) = \mathcal{E}(X,T)\mathrm{id}$ 知 $\mathcal{E}(X,T)$ 为极小左理想. 于是 $(\mathcal{E}(X,T),T)$ 为极小系统. 这样对任意 $p \in \mathcal{E}(X,T)$, 存在 $q \in \mathcal{E}(X,T)$, 使得 $qp = \mathrm{id}$. 这样 $\mathcal{E}(X,T)$ 中任意元素都有左逆, 进而它为群.

设 (X,T) 为 distal 的, 则对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, 元素 $T^n \in \mathcal{E}(X,T)$ 有逆元. 特别地, 有 T 可逆并且 $\mathcal{E}(X,T^{-1}) \subseteq \mathcal{E}(X,T)$. 因为 $\mathcal{E}(X,T^{-1})$ 每个元素为双射, 所以由定义, T^{-1} 为 distal 的. 对系统 (X,T^{-1}) 同上分析就有 $\mathcal{E}(X,T) \subseteq \mathcal{E}(X,T^{-1})$, 于是 $\mathcal{E}(X,T) = \mathcal{E}(X,T^{-1})$.

(b) 根据 Ascoli 定理, (1) 与 (2) 等价. (3) $\Rightarrow$ (2) 是显然的, 下证 (2) $\Rightarrow$ (3). 设 Λ_T 为 $\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 在 $C(X,X)$ 中的闭包, 由假设它为紧的. 这样连续的包含映射 $j : C(X,X) \to X^X$ 在 Λ_T 上的限制为它到 X^X 中的同胚. 由于 $j(\Lambda_T)$ 紧, 故闭, 进而 $j(\Lambda_T) = \mathcal{E}(X,T)$. 于是 $\mathcal{E}(X,T) \subseteq C(X,X)$ 并且两个拓扑在其上一致. 由于等度连续系统为 distal 的, 所以由 (a), $\mathcal{E}(X,T)$ 为群并且每个元素为同胚. □

注记 3.5.2 事实上 Ellis 证明了 (X,T) 为等度连续的当且仅当 $\mathcal{E}(X,T)$ 为由同胚组成的群. 但是这个结论的证明要深刻得多, 在这里我们不再给出, 感兴趣的读者可参见文献 (Ellis, 1969; Auslander, 1988).

设 (X,T) 为动力系统, 称使得商系统 $(X/S,T)$ 为 distal(等度连续) 的最小的闭不变等价关系 S 为X **的 distal(等度连续) 结构关系**, 记为 S_d (S_{eq}).

命题 3.5.3 设 $\pi : (X,T) \to (Y,T)$ 为扩充, 则以下命题等价:

(1) (Y,T) 为 distal 的 (等度连续的);

(2) $S_d \subseteq R_\pi$ $(S_{\mathrm{eq}} \subseteq R_\pi)$.

证明留作习题.

定理 3.5.4 设 $\pi : (X,T) \to (Y,T)$ 为扩充, 则以下命题等价:

(1) (Y,T) 为 distal 的;

(2) $P(X) \subseteq R_\pi$.

即 S_d 实际上就是包含 $P(X)$ 的最小的闭不变等价关系.

证明 (1) ⇒ (2) 首先有 $\pi\times\pi(P(X))\subseteq P(Y)$. 因为 (Y,T) 为 distal 的, 所以 $P(Y)=\Delta_Y$. 于是就有 $P(X)\subseteq(\pi\times\pi)^{-1}(\Delta_Y)=R_\pi$.

(2) ⇒ (1) 要证 (Y,T) 为 distal 的, 我们证明 $\mathcal{E}(Y,T)$ 任意幂等元 u 为恒同映射. 将 u 视为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的幂等元, 则对任意 $x\in X$, $(x,ux)\in P(X)$. 于是

$$u\pi(x)=\pi(ux)=\pi(x).$$

因为 x 任意以及 π 为满射, 所以 $u=\mathrm{id}_Y$. 所以由定理 3.5.1, (Y,T) 为 distal 的. □

对等度连续结构关系也有类似的结论, 但是这时证明将困难得多. 首先我们需要将 proximal 关系的概念推广.

定义**局部 proximal 关系**为

$$Q(X,T)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}(T\times T)^{-n}\Delta_{\frac{1}{k}}}.$$

易见 $(x,y)\in Q(X,T)$ 当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 存在 $x'\in U$, $y'\in V$ 及 $n\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $(T\times T)^n(x',y')\in\Delta_\varepsilon$. 一般而言, $Q(X,T)$ 为闭的、对称的但不传递的关系, 即不为等价关系. 但在 (X,T) 极小时, $Q(X,T)$ 的确为等价关系, 这个事实的现有的证明都十分困难, 我们将在第 9 章给出一个测度方法的证明. 有关这个问题的讨论, 感兴趣的读者可以参阅文献 (Auslander, 1988; Auslander-Guerin, 1997; McMahon, 1978; Veech, 1977; Vries, 1993).

Petersen(1970) 证明了一个动力系统 (X,T) 不为弱混合的当且仅当存在 X 的非空开集 U, V, 使得不存在 $n\in\mathbb{Z}_+$ 同时满足 $U\cap T^{-n}U\neq\varnothing$, $U\cap T^{-n}V\neq\varnothing$(参见定理 1.4.5). 受上述性质的启发, 我们局部化弱混合这一概念.

定义 3.5.5 设 (X,T) 为动力系统, $(x_1,x_2)\in X\times X\setminus\Delta_X$. 如果对 $x_i, i=1,2$ 的任意非空开邻域 U_i, 有 $N(U_1,U_1)\cap N(U_1,U_2)\neq\varnothing$, 则称 (x_1,x_2) 为**弱混合对**. 用 $\mathrm{WM}(X,T)$ 表示 (X,T) 全体弱混合对.

注记 3.5.6 (1) 由定义易见, 系统为弱混合的当且仅当 $\mathrm{WM}(X,T)=X\times X\setminus\Delta_X$;

(2) $\mathrm{WM}(X,T)$ 一般不具有对称性. 例如, 设 (X,T) 为几乎等度连续的系统, x_1 为传递点以及 p 为不动点. 对 p 的每个邻域 U_1, 有 $N(U_1,U_1)=\mathbb{Z}_+$, 因此 $(p,x_1)\in\mathrm{WM}(X,T)$. 但是由于 T 为几乎等度连续的, 所以 $(x_1,p)\notin\mathrm{WM}(X,T)$. 因此, 即使对传递系统, $\mathrm{WM}(X,T)$ 也不一定具有对称性.

命题 3.5.7 设 (X,T) 为可逆的动力系统, 则 $\mathrm{WM}(X,T)\subset Q(X,T^{-1})$.

证明 设 $(x_1,x_2)\in\mathrm{WM}(X,T)$, T 为同胚. 则对 $x_i, i=1,2$ 的任意开邻域 U_i, 有 $N(U_1,U_1)\cap N(U_1,U_2)\neq\varnothing$. 因此存在 $n\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $U_1\cap T^{-n}U_1\neq\varnothing$, $U_1\cap T^{-n}U_2\neq\varnothing$. 这说明存在 $x_1'\in U_1$, $x_2'\in U_2$ 满足 $T^{-n}x_1', T^{-n}x_2'\in U_1$. 从而 $(x_1,x_2)\in Q(X,T^{-1})\setminus\Delta_X$. □

设 (X,T) 为动力系统, $x_1,x_2\in X$. 定义 $L(x_1,x_2)$ 为 X 的子集, 使得对在该子集的每个 x_3 以及 $x_i, i=1,2,3$ 的每个邻域 U_i, 存在 $x,y\in U_3$, $n\in\mathbb{Z}_+$ 满足 $T^nx\in U_1$, $T^ny\in U_2$. 易见 $L(x_1,x_2)$ 为 T 不变的闭子集. 如果 T 为同胚且 $(x_1,x_2)\in Q(X,T^{-1})$, 则 $L(x_1,x_2)$ 为非空的 T 不变的闭子集. 首先我们有如下的简单结论:

命题 3.5.8 设 (X,T) 为动力系统, $x_1\neq x_2\in X$. 则 $(x_1,x_2)\in \mathrm{WM}(X,T)$ 当且仅当 $x_1\in L(x_1,x_2)$.

定理 3.5.9 设 (X,T) 为可逆的极小系统. 则

$$\mathrm{WM}(X,T)=Q(X,T^{-1})\setminus\Delta_X=Q(X,T)\setminus\Delta_X.$$

证明 首先说明 $Q(X,T)=Q(X,T^{-1})$. 设 $(x_1,x_2)\in Q(X,T^{-1})$. 则对 $\varepsilon>0$, 存在 $x\in B(x_1,\varepsilon), y\in B(x_2,\varepsilon)$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $d(T^{-n}x,T^{-n}y)<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 可以假设 (x,y) 为 $T\times T$ 的回复点, 那么存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $d(T^mx,T^{-n}x)<\dfrac{\varepsilon}{3}, d(T^my,T^{-n}y)<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 从而 $d(T^mx,T^my)<\varepsilon$. 这就说明 $(x_1,x_2)\in Q(X,T)$. 因此 $Q(X,T^{-1})\subset Q(X,T)$. 因 (X,T^{-1}) 也为极小系统, 类似以上讨论可得 $Q(X,T)\subset Q(X,T^{-1})$.

设 $(x_1,x_2)\in \mathrm{WM}(X,T)$, 由命题 3.5.7 知 $(x_1,x_2)\in Q(X,T^{-1})\setminus\Delta_X$. 设 $(x_1,x_2)\in Q(X,T^{-1})\setminus\Delta_X$, 则存在 $x\in L(x_1,x_2)$. 由于 (X,T) 为极小系统, $X=L(x_1,x_2)$. 特别地, $x_1\in L(x_1,x_2)$. 进而 $(x_1,x_2)\in \mathrm{WM}(X,T)$. □

注记 3.5.10 一般情况下, 即使 T 为同胚, $\mathrm{WM}(X,T)=Q(X,T^{-1})\setminus\Delta_X$ 也并不一定成立. 例如, 设 $X=\{x_\infty\}\cup\{x_i:i\in\mathbb{Z}\}$, 其中 $x_i\neq x_j$, $i\neq j$. 定义映射 $T:X\to X$, 使得 x_∞ 为不动点且 $T(x_i)=x_{i+1}$, $i\in\mathbb{Z}$. 易见 $Q(X,T^{-1})=X\times X$. 但如果 $i\neq j$, 则 $(x_i,x_j)\notin \mathrm{WM}(X,T)$.

推论 3.5.11 设 (X,T) 为极小系统. 如果 $Q(X,T)=X\times X$, 则 (X,T) 是弱混合系统.

证明 设 $(\hat{X},\hat{T})$ 为 (X,T) 的自然扩充. 则 $(\hat{X},\hat{T})$ 为极小系统且 $Q(\hat{X},\hat{T})=\hat{X}\times\hat{X}$. 由定理 3.5.9 知 $\mathrm{WM}(\hat{X},\hat{T})=\hat{X}\times\hat{X}\setminus\Delta_{\hat{X}}$. 这样, 由定义即知 $(\hat{X},\hat{T})$ 为弱混合系统. 因此 (X,T) 为弱混合系统. □

对于等度连续我们在下面将会经常用到这样一个结论:

引理 3.5.12 设 (X,T) 为动力系统. 则 (X,T) 不为等度连续系统当且仅当存在 $x\in X$, $x_i\to x$ 以及 $n_i\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{n_i}x\to x'$, $T^{n_i}x_i\to x''$, $x'\neq x''$.

证明 “$\Rightarrow$” 假设 (X,T) 不为等度连续系统, 那么存在 $\varepsilon>0$, 使得对每个 $i\in\mathbb{N}$, 能找到 $d(z_i,y_i)<\dfrac{1}{n}$, $n_i\in\mathbb{Z}_+$ 满足 $d(T^{n_1}z_i,T^{n_i}y_i)\geqslant 2\varepsilon$. 不妨设 $\lim z_i=x=\lim y_i$(必要时取其子列). 则有 $d(T^{n_i}x,T^{n_i}x_i)\geqslant\varepsilon$, 其中 $x_i=z_i$ 或 y_i. 必要时通过取其子列可以假设 $T^{n_i}x\to x'$, $T^{n_i}x_i\to x''$. 显然 $x'\neq x''$.

"$\Leftarrow$" 这是明显的. □

一般来说, 局部 proximal 对不具有提升性质, 但对于引理 3.5.12 中特殊的点对具有提升性质. 这是下面证明的关键所在.

推论 3.5.13 (1) 等度连续系统的因子系统为等度连续系统;

(2) 设 (X,T) 为可逆的动力系统. 则 (X,T) 由包含 $Q(X,T^{-1})$ 的最小的闭的不变的等价关系所诱导的因子系统 (Y,S) 为 (X,T) 的最大等度连续因子, 即 S_{eq} 就是包含 $Q(X,T^{-1})$ 的最小闭不变等价关系.

证明 (1) 设 (X,T) 为等度连续系统, $\pi:(X,T)\to(Y,T)$ 为因子映射. 如果 (Y,T) 不为等度连续系统, 则由引理 3.5.12 知, 存在 $y\in Y$, $y_i\to y$ 以及 $n_i\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{n_i}y\to y'$, $T^{n_i}y_i\to y''$ 且 $y'\neq y''$. 取 $x_i\in X$ 满足 $\pi(x_i)=y_i$. 不妨设 $x_i\to x$, $T^{n_i}x\to x'$ 以及 $T^{n_i}x_i\to x''$(必要时取其子列). 显然 $\pi(x)=y$, $\pi(x')=y'$ 和 $\pi(x'')=y''$. 进而 $x'\neq x''$. 这说明 (X,T) 不为等度连续的, 矛盾.

(2) 首先容易看出, 对一个可逆的动力系统 (Z,R), (Z,R) 为等度连续的当且仅当 $Q(Z,R^{-1})=\Delta_Z$. 所以仅需说明 (Y,S) 为等度连续系统. 设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为因子映射. 若 (Y,S) 不为等度连续系统, 则类似于 (1) 的讨论, 存在 $y\in Y$, $y_i\to y$ 以及 $n_i\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $S^{n_i}y\to y'$, $S^{n_i}y_i\to y''$ 且 $y'\neq y''$. 取 $x_i\in X$ 满足 $\pi(x_i)=y_i$. 不妨设 $x_i\to x$, $T^{n_i}x\to x'$ 和 $T^{n_i}x_i\to x''$(必要时取其子列). 则 $\pi(x)=y$, $\pi(x')=y'$ 和 $\pi(x'')=y''$. 显然 $x'\neq x''$ 且 $(x',x'')\in Q(X,T^{-1})$. 由 π 的定义知 $y'=\pi(x')=\pi(x'')=y''$, 矛盾. □

注记 3.5.14 对于定理 3.5.13(2), 原有的证明都要用到"一个系统为等度连续系统当且仅当它的 Ellis 半群为同胚群"这一事实 (Ellis, 1969; Auslander, 1988). 证明巧妙地运用了引理 3.5.12, 从而避开了上面这个深刻的结论.

利用引理 3.5.12 可以证明

定理 3.5.15 设 (X,T) 为动力系统. 则

(1) (X,T) 为等度连续的当且仅当 $\mathrm{WM}(X,T)=\varnothing$;

(2) (X,T) 由包含 $\mathrm{WM}(X,T)$ 的最小的闭的不变的等价关系所诱导的因子系统 (Y,S) 为 (X,T) 的最大等度连续因子.

证明 (1) 我们只需说明如果 $\mathrm{WM}(X,T)=\varnothing$, 则 (X,T) 为等度连续的. 假设 (X,T) 不为等度连续的, 则由引理 3.5.12 知, 存在 $x\in X$, $x_i\to x$ 以及 $n_i\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{n_i}x\to x'$, $T^{n_i}x_i\to x''$, $x'\neq x''$. 易见 $x\in L(x',x'')$. 因 x' 在 x 的轨道闭包中, $x'\in L(x',x'')$. 这说明 $(x',x'')\in\mathrm{WM}(X,T)$, 矛盾. 这就完成了 (1) 的证明.

(2) 设 $\pi:X\to Y$ 为因子映射. 假设 (Y,T) 不为等度连续的. 则由引理 3.5.12 知, 存在 $y\in Y$, $y_i\to y$ 以及 $n_i\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{n_i}y\to y'$, $T^{n_i}y_i\to y''$ 且 $y'\neq y''$. 取 $x_i\in X$ 满足 $\pi(x_i)=y_i$. 不妨设 $x_i\to x$, $T^{n_i}x\to x'$ 以及 $T^{n_i}x_i\to x''$(必要时取其子列). 则 $\pi(x)=y$, $\pi(x')=y'$ 且 $\pi(x'')=y''$. 显然 $x'\neq x''$. 类似于 (1) 的讨论, 有

$(x', x'') \in \mathrm{WM}(X, T)$. 由 π 的定义知 $y' = \pi(x') = \pi(x'') = y''$, 矛盾. 这说明 (Y, T) 为等度连续系统. □

观察了这么多结论, 一个自然的问题就是假如极大等度连续因子是平凡的, 那么将会得到什么结果?

定理 3.5.16 一个极小系统为弱混合的当且仅当它没有非平凡的等度连续因子.

我们将在第 9 章给出这个定理的证明.

习 题 3.5

1. 举例说明: 在不是满射的情况下, 存在 distal 但不是等度连续的系统. 设 (X, T) 为动力系统, 证明: 如果 T 为满射, 那么等度连续蕴含 distal.

2. 验证本节开始的几个例子 (D, T), (X, T) 以及 $(X_n, T_n), n \geqslant 2$ 为 distal 但不是等度连续的.

3. 证明命题 3.5.3.

4. 如果 T 为同胚且 $(x_1, x_2) \in Q(X, T^{-1})$, 则 $L(x_1, x_2)$ 为非空的 T 不变的闭子集.

5. 设 $\mathcal{E}$ 为一族动力系统的集合.

(1) 如果 $\mathcal{E}$ 中元都是极小的且满足条件: 对任意 $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, 任意 $\prod\{(X', T) : (X', T) \in \mathcal{E}'\}$ 的极小子集 N, 有 $N \in \mathcal{E}$. 那么 $\mathcal{E}$ 中存在唯一的 "万有 $\mathcal{E}$ 系统" (X_0, T), 即对任意 $\mathcal{E}$ 中元为 X_0 的因子.

(2) 如果 $\mathcal{E}$ 满足下面条件:

(i) 平凡系统在 $\mathcal{E}$ 中;

(ii) 任意多个 $\mathcal{E}$ 中元的乘积系统仍在 $\mathcal{E}$ 中;

(iii) $\mathcal{E}$ 任意元素的子系统仍在 $\mathcal{E}$ 中.

那么对于任意的动力系统 (X, T), 存在 "极大 $\mathcal{E}$ 因子", 即存在一个极小闭不变等价关系 R, 使得 $(X/R, T) \in \mathcal{E}$.

(3) 运用 (1) 和 (2) 分别对等度连续性与 distal 性进行分析.

§3.6 Furstenberg 极小 distal 流的结构定理及极小流的一般结构定理

在分析动力系统 (X, T) 的结构的时候, 我们有两种可行的方案: 一种是研究系统的全体子系统 (即系统的全体闭不变子集), 并且弄清楚系统 (X, T) 是由怎样的方式由子系统构造出来的; 另一种途径就是考虑系统的所有因子系统. 在遍历理论中, 第一种方案是十分成功的. 对任何保测系统都能经过遍历分解分解为若干遍历子系统, 于是对作为 "不可分解元" 的遍历系统的研究就显得分外重要. 不幸的是, 在拓扑动力系统中没有类似的分解定理, 因而也没有一种具有一般性的 "不可分解元". 于是我们不得不根据需要寻求一些好的替代物. 两种比较自然的替代物

是传递子系统以及极小子系统, 其中极小系统的研究在拓扑动力系统中占有十分重要的地位. 虽然对一般拓扑动力系统的研究不能归结于其极小子集的研究, 但是如果对极小系统这一结构最为简单的系统都不能分析清楚, 那就更不用说能准确地理解一般系统的结构了. 到现在, 对极小系统的研究已经相对成熟, 相关内容可参见文献 (Auslander, 1988; Ellis, 1969; Glasner, 1976; Veech, 1977; Vries, 1993).

在本节中, 我们首先将证明著名的 Furstenberg 极小 distal 系统结构定理. 然后给出任意极小系统的结构定理的描述以及其他一些重要系统的结构定理. 本节涉及的所有概念与结论都可以推广到更为一般的群作用, 但是为了简单起见, 我们只给出 $\mathbb{Z}$ 作用的情况. 仅讨论 $\mathbb{Z}$ 作用的理由, 一为极小映射为满射, 所以可通过自然扩充转换为同胚; 另一个更为重要的原因是, 对于一般极小系统的结构定理的证明需要群作用这个前提, 所以需要 $\mathbb{Z}$ 作用这个假设.

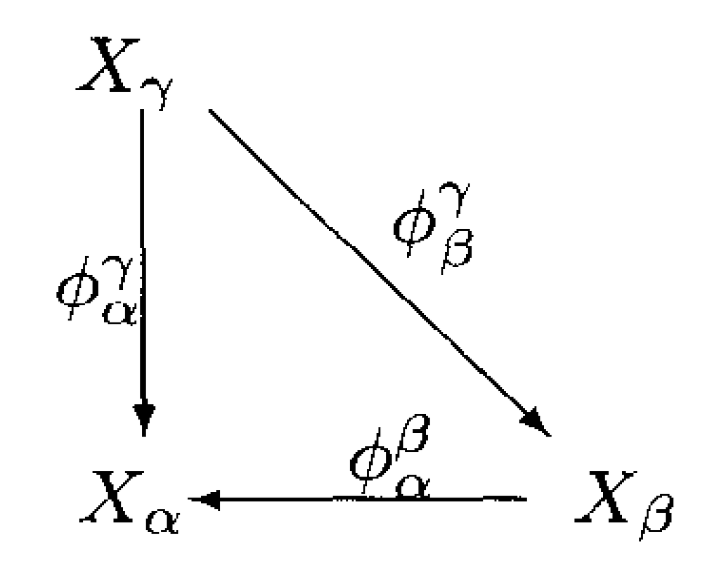
因为极小系统没有非空真子系统, 于是在极小系统的研究中因子的概念也就显得尤其重要. 所以在深入讨论之前, 先给出各种扩充的定义.

设 (X,T) 为动力系统, 其中 T 为同胚. 前面已经介绍过 $\mathbb{Z}_+$ 作用下的 proximal, distal 和渐近等概念. 这些概念很容易可以平移到 $\mathbb{Z}$ 作用的情况. 例如, 点对 x,y 称为 proximal 是指 $\lim\limits_{|n|\to\infty}\inf d(T^nx,T^ny)=0$. 其他概念可以类似定义.

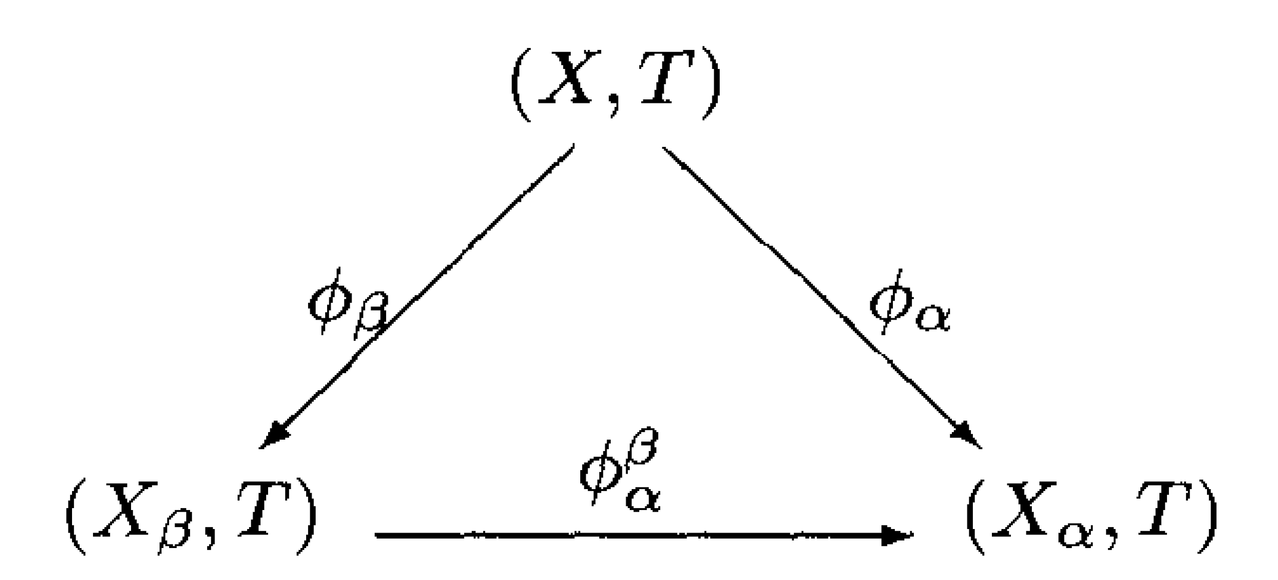
给定 $\mathbb{Z}$ 系统 $(X,T),(Y,S)$, 设 $\pi:X\to Y$ 为扩充. $\pi:X\to Y$ 称为**proximal** (相应地, **distal**) 是指如 $\pi(x_1)=\pi(x_2)$ 则 x_1 与 x_2 为 proximal 的 (相应地为 distal 的). 扩充称为**等度连续的**是指对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对满足 $\pi(x_1)=\pi(x_2)$ 及 $d(x_1,x_2)<\delta$ 的 x_1,x_2 成立 $d(T^n(x_1),T^n(x_2))<\varepsilon,\forall n\in\mathbb{Z}$. 等度连续扩充也称为**等距扩充**. 扩充 π 称为**几乎一对一的**是指存在稠密的 G_δ 集 $X_0\subset X$, 使得对任意 $x\in X_0$, 都有 $\pi^{-1}\pi(x)=\{x\}$. 扩充称为**弱混合的**是指乘积系统的子系统 $(R_\pi,T\times T)$ 为拓扑传递的, 其中 $R_\pi=\{(x_1,x_2):\pi(x_1)=\pi(x_2)\}$. 对于 $\mathbb{Z}_+$ 作用下各种扩充的定义是完全雷同的.

下面介绍逆极限系统. 设 η 为一个序数, 对每个 $\lambda\leqslant\eta$, (X_λ,T) 为动力系统. 设 $\{\phi_\alpha^\beta:\alpha\leqslant\beta\leqslant\eta\}$ 为一族满同态: $\phi_\alpha^\beta:X_\beta\to X_\alpha$, 且满足 $\phi_\alpha^\beta\circ\phi_\beta^\gamma=\phi_\alpha^\gamma,\forall\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\eta$(见下图).

$$X=\varprojlim\{X_\lambda:\lambda<\eta\}=\left\{(x_\lambda)_{\lambda<\eta}\in\prod_{\lambda<\eta}X_\lambda:\phi_\alpha^\beta(x_\beta)=x_\alpha,\forall\alpha\leqslant\beta\leqslant\eta\right\}. \quad (3.6.1)$$



记投射为 $\phi_\lambda : X \to X_\lambda, \forall \lambda \leqslant \eta$. 于是如下图表交换:



$\{\phi_\lambda^{-1}(U) : U为X_\lambda的开集,\ \lambda \leqslant \eta\}$ 组成 X 的一组拓扑基. 易见 X 为紧致 T_2 的, 且 (X,T) 为动力系统. 称 (X,T) 为 $\{\phi_\alpha^\beta : \alpha \leqslant \beta \leqslant \eta\}$ 的**逆极限**.

逆极限系统的一个等价的看法是利用等价关系. 设 $X = X_\eta$, 而 $\{R_\lambda\}_{\lambda\leqslant\eta}$ 为 X_η 上的闭不变等价关系族. 设 $\{R_\lambda\}_{\lambda\leqslant\eta}$ 满足:

(1) $R_\eta = \Delta_X$;

(2) 如果 $\nu < \lambda \leqslant \eta$, 则 $R_\nu \supseteq R_\lambda$;

(3) 如果 λ 为极限序数, 那么 $R_\lambda = \bigcap_{\nu<\lambda} R_\nu$.

此时, 如果令 $X_\lambda = X/R_\lambda$, 而 $\phi_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha, \alpha < \beta \leqslant \eta$ 为投射. 那么容易看出, 此时 (X,T) 就是 $\{\phi_\alpha^\beta : \alpha \leqslant \beta < \eta\}$ 的逆极限系统.

首先证明 Furstenberg 的极小 distal 系统结构定理. 我们证明其中困难的一半, 另外简单的部分请读者完成. 虽然下面定理的讨论是对 $\mathbb{Z}_+$ 作用进行的, 但是因为对 distal 系统 (X,T), T 必为同胚 (定理 3.5.1), 所以所有讨论可以平行地改为 $\mathbb{Z}$ 作用, 甚至任意群作用.

定理 3.6.1 (Furstenberg, 1963) *一个极小流为 distal 的当且仅当它为等度连续扩充的逆极限, 即存在如下图表:*

$$\{pt\} \leftarrow X_0 \xleftarrow{\pi_0} X_1 \xleftarrow{\pi_1} X_2 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} X_n \xleftarrow{\pi_n} X_{n+1} \xleftarrow{\pi_{n+1}} \cdots \longleftarrow X_\theta \xleftarrow{\pi_\theta} X,$$

其中 $\{pt\}$ 指平凡系统, 而每个 π_i 为等度连续扩充.

引理 3.6.2 *设 (X,T) 为极小 distal 系统. 那么对任意 $x \in X$, 映射 $\pi : \mathcal{E}(X,T) \to X, p \mapsto px$ 为开的, 其中 $\mathcal{E}(X,T)$ 为 Ellis 半群.*

证明 设 $G_x = \{p \in \mathcal{E}(X,T) : px = x\}$, 则 G_x 为群 $\mathcal{E}(X,T)$ 的闭子群且商映射 $q_x : \mathcal{E}(X,T) \to \mathcal{E}(X,T)/G_x$ 为开的. 另外, 映射 $\phi : \mathcal{E}(X,T)/G_x \to X, [p]_{G_x} \mapsto px$ 为同胚, 所以 $\pi = \phi \circ q_x$ 为开的. □

前面已经定义了局部 proximal 关系, 现在定义它的相对化概念. 设 $R \subseteq X \times X$ 为闭的不变等价关系, 定义相对于 R 的局部 proximal 关系为

$$Q(R) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (T\times T)^{-n} \Delta_{\frac{1}{k}} \cap R}.$$

易见 $(x,y)\in Q(R)$ 当且仅当 $(x,y)\in R$ 且对任意 $\varepsilon>0$, x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 存在 $x'\in U$, $y'\in V$ 及 $n\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $(x',y')\in R$ 以及 $(T\times T)^n(x',y')\in\Delta_\varepsilon$. 易见 $Q(R)$ 为闭的且不变的. 但是一般而言, 即使 R 为闭的不变的等价关系, $Q(R)$ 也不一定为等价关系. 不过, 对于 distal 扩充, 可以证明:

定理 3.6.3 设 (X,T) 为极小 distal 流, R 为 X 上一个闭的不变的等价关系. 则 $Q(R)$ 也是闭的不变的等价关系.

证明 由于 $Q(R)$ 闭不变是明显的, 所以仅需证明传递性. 设 $(x,y),(y,z)\in Q(R)$, 证明 $(x,z)\in Q(R)$ 即可. 设 U,W 分别为 x,z 的邻域. 令 $O=\{p\in\mathcal{E}(X,T): pz\in W\}$, 则 O 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的开集且 $\mathrm{id}\in O$. 设 $V=Oy$, 则由引理 3.6.2, V 为 y 的开邻域.

对任意 $\varepsilon>0$, 由于 $(x,y)\in Q(R)$, 存在 $x_1\in U, y_1\in V, n_1\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $(x_1,y_1)\in R$ 且

$$d(T^{n_1}x_1,T^{n_1}y_1)<\varepsilon. \tag{3.6.2}$$

由于 X 为 distal 的, 所以 $X\times X$ 为半单的. 于是 $N=\overline{\mathrm{orb}((x_1,y_1),T\times T)}$ 为极小集. 因为 N 极小, 存在 $s\in\mathbb{N}$, 使得 $\{(T\times T)^{-k}((T\times T)^{n_1}(x_1,y_1)):1\leqslant k\leqslant s\}$ 在 N 中 ε 稠. 即对任意 $\xi\in\mathcal{E}(X,T)$, 存在 $k\in\{1,2,\cdots,s\}$, 使得

$$d(T^k\xi x_1,T^{n_1}x_1)<\varepsilon \text{ 且 } d(T^k\xi y_1,T^{n_1}y_1)<\varepsilon. \tag{3.6.3}$$

取 $\delta>0$, 使得如果 $d(x',y')<\delta$, 则

$$d(T^kx',T^ky')<\varepsilon,\quad \forall 1\leqslant k\leqslant s. \tag{3.6.4}$$

取 id 在 $\mathcal{E}(X,T)$ 中邻域 O', 使得 $O'x_1\subseteq U, O'y_1\subseteq V$, 由于 $\mathcal{E}(X,T)\to X$ 为开的, $O'x_1,O'y_1$ 仍为 x_1,y_1 之邻域. 由 V 的定义, 存在 $p_1\in\mathcal{E}(X,T)$, 使得 $y_1=p_1y$, 令 $z_1=p_1z$. 则 $z_1\in W$ 且 $(y_1,z_1)=p_1(y,z)\in Q(R)$. 于是存在 $y_2\in O'y_1, z_2\in W, n_2\in\mathbb{N}$, 使得 $(y_2,z_2)\in R$ 且 $d(T^{n_2}y_2,T^{n_2}z_2)<\delta$. 由 (3.6.4), 对任意 $k\in\{1,2,\cdots,s\}$,

$$d(T^{k+n_2}y_2,T^{k+n_2}z_2)<\varepsilon. \tag{3.6.5}$$

因为 $y_2\in O'y_1$, 存在 $p_2\in\mathcal{E}(X,T)$, 使得 $y_2=p_2y_1$. 令 $x_2=p_2x_1\in O'x_1\subseteq U$, 则 $(x_2,y_2)\in N$. 根据 (3.6.3), 存在 $k_0\in\{1,2,\cdots,s\}$, 使得

$$d(T^{k_0}T^{n_2}x_2,T^{n_1}x_1)<\varepsilon \text{ 且 } d(T^{k_0}T^{n_2}y_2,T^{n_1}y_1)<\varepsilon. \tag{3.6.6}$$

由 (3.6.2), (3.6.5), (3.6.6), 得到

$$d(T^{k_0+n_2}x_2,T^{k_0+n_2}x_2)<4\varepsilon.$$

另外, 由于 $(x_2,y_2),(y_2,z_2)\in R$, 有 $(x_2,z_2)\in R$. 这样就有 $(x,z)\in Q(R)$. □

引理 3.6.4　设 (X,T) 为极小系统, R,S 为其上的两个闭不变等价关系且 $S \subseteq R$. 那么商空间系统诱导的同态 $\eta: X/S \to X/R$ 为等度连续的当且仅当 $S \supseteq Q(R)$.

证明留作习题.

引理 3.6.5　设 (X,T) 为极小 distal 系统, R 为其上闭不变等价关系. 那么 $\eta: X/Q(R) \to X/R$ 为等度连续扩充.

设 (X,T) 为极小 distal 系统, 对每个序数 λ, 我们归纳定义 X 上的闭不变等价关系 Q_λ. 首先设 $Q_0 = Q(X \times X)$, 那么由引理 3.6.4, $X_0 = X/Q_0$ 为 X 的最大等度连续因子. 现在设对任意 $\mu < \lambda$, 我们已经定义好 Q_μ. 如果 λ 为后继序数, 即存在 ξ, 使得 $\lambda = \xi + 1$, 那么定义 $Q_\lambda = Q_{\xi+1} = Q(Q_\xi)$; 如果 λ 为极限序数, 那么定义 $Q_\lambda = \bigcap_{\mu<\lambda} Q_\mu$.

于是对 $\mu < \lambda$, 有 $Q_\lambda \subseteq Q_\mu$. 由于每个 Q_λ 为闭集, 于是存在序数 θ, 使得 $Q_{\theta+1} = Q_\theta$, 进而对于每个 $\lambda > \theta$, 有 $Q_\lambda = Q_\theta$. 对 $\lambda \geqslant 0$, 设 $X_\lambda = X/Q_\lambda$, 且设 $\pi_\lambda : X_{\lambda+1} = X/Q_{\lambda+1} \to X_\lambda = X/Q_\lambda$ 为商映射诱导的同态. 则 π_λ 为等度连续扩充. 这样得到

$$\{pt\} \leftarrow X_0 \xleftarrow{\pi_0} X_1 \xleftarrow{\pi_1} X_2 \cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} X_n \xleftarrow{\pi_n} X_{n+1} \xleftarrow{\pi_{n+1}} \cdots X_\theta \xleftarrow{\pi_\theta} X.$$

如果我们能说明 $X = X_\theta$, 那么就得到了所要的结论. 即需要证明 $Q_\theta = \Delta_X$. 令 $\Delta_{1/n} = \{(x,y) : d(x,y) < 1/n\}, n = 1,2,3,\cdots$. 那么就有

$$Q_\theta = Q_{\theta+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} (T \times T)^{-k}(\Delta_{1/n} \cap Q_\theta)}.$$

于是对每个 n, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(T \times T)^{-k}(\Delta_{1/n} \cap Q_\theta)$ 为 Q_θ 的稠密开集. 由 Baire 定理, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(T \times T)^{-k}(\Delta_{1/n} \cap Q_\theta)$ 在 Q_θ 中稠密. 于是有

$$Q_\theta = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(T \times T)^{-k}(\Delta_{1/n} \cap Q_\theta)} \subseteq \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}(T \times T)^{-k}(\Delta_{1/n})} = \overline{P(X,T)} = \overline{\Delta_X} = \Delta_X.$$

这样就得到了 Furstenberg 结构定理.

现在我们回顾一下 distal 结构定理的证明的基本思路. 对于极小 distal 系统 (X,T), 由于局部 proximal 关系 $Q_0 = Q(X,T)$ 为等价关系, 所以 $X_0 = X/Q_0$ 为 X 极大等度连续因子, 而 $\phi_0 : X \to X_0$ 为 distal 扩充. 因为对 distal 扩充, $Q(\phi_0) = Q(R_{\phi_0})$ 仍为等价关系, 于是可以在 ϕ_0 中插入等度连续扩充 π_0, 即 $X_0 \xleftarrow{\pi_0} X_1 \xleftarrow{\phi_1} X$, 其中 $X_1 = X/Q(\phi_0)$. 同样, 由于此时 ϕ_1 仍为 distal, 而 $Q(\phi_1)$ 仍为等价关系, 进而可以继续插入等度连续因子 π_1: $X_0 \xleftarrow{\pi_0} X_1 \xleftarrow{\pi_1} X_2 \xleftarrow{\phi_2} X$. 如此不断重复这个过程, 由于空间为紧度量, 终归会在某一步后变成平凡扩充, 而此时也就得到了所追求的结构.

一个自然的问题是：对于任意的极小系统 (X,T), 运用同样的做法是否可以得到它也具有类似的结构定理? 首先, 对于极小系统 (X,T), 可以证明局部 proximal 关系 $Q_0 = Q(X,T)$ 为等价关系, 所以 $X_0 = X/Q_0$ 为 X 极大等度连续因子, 而 $\phi_0 : X \to X_0$ 为一个扩充. 到这里, 跟上面分析没有多大区别. 但是接下去是否仍然类似呢? 对于 distal 系统, 此时 ϕ_0 为 distal 扩充, 从而 $Q(\phi_0)$ 为等价关系, 我们就可以直接在 ϕ_0 中插入一个等度连续因子. 但是对于一般的极小系统, ϕ_0 没有任何特殊性质, 而 $Q(\phi_0)$ 也不一定为等价关系, 从而不一定能插入等度连续因子. 幸运的是, 我们可以对任何扩充进行一个"小的调整", 使它的局部 proximal 关系为等价关系, 进而可以插入等度连续因子. 之后再进行同样的"小的调整"使之可以插入等度连续因子. 如此不断重复就可以得到任何极小系统的一个结构定理. 具体描述如下 (其中 proximal 扩充 ϕ_ν 及 ψ_ν 就是上面讲的"小的调整", 使得 π_ν 能插入等度连续因子 $\rho_{\nu+1}$).

定理 3.6.6 设 (X,T) 为紧度量极小 $\mathbb{Z}$ 系统. 那么存在可数序数 η 及如下交换图表 (称为 PI 塔):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
X = X_0 & \xleftarrow{\ \phi_1\ } & & X_1 & \leftarrow & \cdots\ X_\nu & \xleftarrow{\ \phi_{\nu+1}\ } & & X_{\nu+1}\cdots & \leftarrow & X_\eta = X_\infty \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_0} & \searrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\nu} & \searrow{\scriptstyle \sigma_{\nu+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\nu+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\infty} \\
Y_0 = \{pt\} & \xleftarrow[\ \rho_1\ ]{} & Z_1 & \xleftarrow[\ \psi_1\ ]{} Y_1 & \leftarrow & \cdots\ Y_\nu & \xleftarrow[\ \rho_{\nu+1}\ ]{} & Z_{\nu+1} & \xleftarrow[\ \psi_{\nu+1}\ ]{} Y_{\nu+1}\cdots & \leftarrow & Y_\eta = Y_\infty
\end{array}
$$

其中对每个 $\nu \leqslant \eta$, ρ_ν 为等度连续的, ϕ_ν 及 ψ_ν 为 proximal 的, 而 π_∞ 为弱混合的. 对极限序数 ν, X_ν, Y_ν, π_ν 等为 $X_\lambda, Y_\lambda, \pi_\lambda$, $\lambda < \nu$ 等的逆极限.

极小 $\mathbb{Z}$ 系统 (X,T) 称为**严格 proximal 同距**或**严格 PI**是指它具有 PI 塔中 (Y_∞, T) 的结构, 即它可从平凡系统经过 (可数) 超限步 proximal 或等度连续扩充得到. 称 (X,T) 为**proximal 同距**或**PI**是指在 PI 塔中 π_∞ 为同胚, 即它为严格 PI 系统的 proximal 因子.

在上面定义中, 将 proximal 换为几乎一对一我们就得到**严格 HPI 系统**和**HPI 系统**的定义. 在度量的情况, 也称 HPI 系统为 **AI** 的. 如果在 PI 流定义中所有 proximal 扩充为恒同的, 则称为 **I 流**. 这样, Furstenberg 定理就是说：极小系统为 distal 的当且仅当它为 I 流.

从上面分析可见, 所谓 PI 和 HPI 系统就是具有相对简单结构的系统. 但是如果按照定义去判别一个系统是否为 PI 或 HPI 将是十分困难的事. 幸运的是, 我们有下面十分有用的判别定理：

定理 3.6.7 (Woude, 1985) 设 (X,T) 为极小 $\mathbb{Z}$ 系统. 则

(1) X 为 PI 的当且仅当 $X \times X$ 中任意极小点稠密的传递子系统为极小的;

(2) X 为 HPI 当且仅当任意满足投射 $\pi_i : Y \to X, i = 1, 2$ 为半开的 (即非空开集的像有非空内部) 传递系统 $Y \subseteq X \times X$ 为极小的.

最后我们以两个重要的结构定理结束本节. 它们分别是点 distal 系统和几乎自守系统 (注 4.2.6) 的结构定理, 在这里就不再给出证明了.

定理 3.6.8 (Veech, 1970; Ellis, 1973) 一个极小流为点 distal 的当且仅当它为 AI 流.

定理 3.6.9 (Veech, 1965) 一个极小流为几乎自守的当且仅当它为等度连续系统的几乎一对一扩充.

习 题 3.6

1. 证明 Furstenberg 定理的另外一半：任何 I 流为 distal 系统.
2. 证明引理 3.6.4.

§3.7 几乎等度连续与单生群

在这一节, 我们将更为深入地讨论几乎等度连续系统. 对度量空间 X, 由于 $C(X, X)$ 中复合运算为联合连续的, 所以它为可度量拓扑半群, 其中所有同胚元组成了它的一个拓扑子群. 定义赋值映射为

$$ev : C(X, X) \times X \to X, \quad ev(f, x) = f(x).$$

易见它为连续的. 对取定的 $x \in X$, 映射 $ev_x : C(X, X) \to X$, $ev_x(f) = f(x)$ 为一致连续的.

定理 3.7.1 设 (X, T) 为几乎等度连续的系统且 $x \in \mathrm{Trans}_T$. 设 Λ_T 为 $\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 在 $C(X, X)$ 中的闭包. 那么 Λ_T 为 $C(X, X)$ 的一个交换子群, 并且循环子群 $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ 在 Λ_T 中稠密. 赋值映射在 Λ_T 上的限制映射 $ev_x : (\Lambda_T, D) \to (\mathrm{Trans}_T, d_T)$ 为等距映射, 即

$$D(g_1, g_2) = d_T(g_1 x, g_2 x), \quad \forall g_1, g_2 \in \Lambda_T. \tag{3.7.1}$$

证明 中心化子 $\mathrm{Cent}_T = \{g \in C(X, X) : g \circ T = T \circ g\}$ 为 $C(X, X)$ 的闭子半群, 且包含了 Λ_T. 设 $g_1, g_2 \in \mathrm{Cent}_T$, 由于 $\{T^i x : i \in \mathbb{Z}_+\}$ 在 X 中稠密, 有

$$d_T(g_1 x, g_2 x) = \sup_{i \in \mathbb{Z}_+} \{d(T^i(g_1 x), T^i(g_2 x))\} = \sup_{i \in \mathbb{Z}_+} \{d(g_1(T^i x), g_2(T^i x))\} = D(g_1, g_2).$$

于是 Λ_T 为闭交换子半群且 (3.7.1) 成立.

因为系统为几乎等度连续的, 如果 $x_1 \in \mathrm{Trans}_T$, 那么存在 $\{i_k\} \subseteq \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{i_k} x \to x_1$(在 X 中). 由定理 3.2.14(5) 知, 此时 $\{T^{i_k} x\}$ 在 Trans_T 中相对于 d_T 收敛

于 x_1. 由 (3.7.1), $\{T^{i_k}\}$ 为 Λ_T 中的 Cauchy 列, 根据 Λ_T 为完备空间 $C(X,X)$ 的闭子集, 存在 $g \in \Lambda_T$ 使得 T^{i_k} 收敛于 g. 因为 ev_x 连续, 所以 $gx = x_1$. 类似地, 因为 (Trans_T, d_T) 完备, 所以 ev_x 将 Λ_T 映到 Trans_T. 于是 ev_x 为 Λ_T 到 Trans_T 上的等距映射.

将以上结论用到 $x_1 = gx \in \text{Trans}_T$ 上. 由于 $ev_x(\Lambda_T) = \text{Trans}_T$, 于是存在 $\bar{g} \in \Lambda_T$, 使得 $\bar{g}(x_1) = x$. 即

$$ev_x(\bar{g}g) = \bar{g}(x_1) = x = ev_x(\text{id}).$$

由 (3.7.1) 得到 $\bar{g}g = \text{id}$. 所以 Λ_T 为由同胚组成的群, 并且循环子群 $\{T^i : i \in \mathbb{Z}\}$ 在其中稠密.

最后, 由于

$$D(g_1, g_2) = D(g_1 {g_2}^{-1}, \text{id}) = D({g_2}^{-1} g_1, \text{id}) = D(g_2^{-1}, g_1^{-1}).$$

逆运算是等距的, 进而 Λ_T 为拓扑群. □

二元组 (Γ, g) 称为**单生群**是指 Λ 为一个赋予了不变度量 (即如 ρ 为度量, 则 $\rho(hg_1, hg_2) = \rho(g_1, g_2)$) 的拓扑群, 并且 $g \in \Gamma$ 生成的循环子群 $\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ 在 Γ 中稠密. 由定义即知 Γ 必须为交换群. 例如 $\mathbb{Z}$ 赋予离散拓扑, 则 $(\mathbb{Z}, 1)$ 就是单生群. 设 e 为 Γ 的单位元, 那么单生群 (Γ, g) 称为**回复的**是指存在 $\{i_k\} \subseteq \mathbb{Z}_+$, 使得 $i_k \to \infty$ 且 $g^{i_k} \to e$.

称动力系统 (X,T)**能延伸为单生群** (Γ, g) **的作用**是指存在从 Γ 到 $C(X,X)$ 连续同态, 并且将 g 映为 T. 易见此时同态为唯一的, 并且 T 为可逆的. 如果一个系统能延伸为某个回复的单生群的作用, 那么它为一致刚性的. 反之, 如果一个系统 (X,T) 为一致刚性的, 那么 (Λ_T, T) 为一个回复的单生群, 并且通过包含映射 (X,T) 能延伸为 (Λ_T, T) 的作用.

引理 3.7.2 *设 (Γ, g) 为一个单生群. 一个可逆度量系统 (X,T) 能延伸为 (Γ, g) 的作用当且仅当对任意 $\{i_k\} \subseteq \mathbb{Z}_+$,*

$$g^{i_k} \to e \Rightarrow T^{i_k} \to \text{id}. \tag{3.7.2}$$

证明 必要性显然, 下证充分性. 设 (3.7.2) 成立, 由于 $D(T, \text{id}) = D(\text{id}, T^{-1})$ 所以 T^{-i_k} 也收敛于 id. 这样由 $g^i \mapsto T^i$ 定义了一个从循环子群 $\{g^i : i \in \mathbb{Z}\}$ 到 $C(X,X)$ 的同态. 由 (3.7.2), 这个同态在 e 处连续, 进而也为一致连续的 (由在 e 处连续, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\rho(g^n, e) < \delta$ 蕴含 $D(T^n, \text{id}) < \varepsilon$. 但是对于任意 $\rho(g^i, g^j) < \delta$, 有 $\rho(g^{i-j}, e) = \rho(g^i, g^j) < \delta$, 所以 $D(T^i, T^j) = D(T^{i-j}, \text{id}) < \varepsilon$. 亦即映射为一致连续的). 因为 $\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ 在 Γ 中稠密且 $C(X,X)$ 为完备的, 所以这个同态可以扩充到 Γ 上. □

设 (X,T) 为一个几乎等度连续系统, 定理 3.7.1 说明 T 在 Trans_T 上的限制同胚于 Λ_T 由 T 产生的转移. 如果把 (Λ_T,T) 也视为由 T 产生的转移系统, 那么上面分析说明 (X,T) 为单生群系统 (Λ_T,T) 的一个紧化系统. 这里一个系统 (X,T) 为另一个系统 (Y,S) 的**紧化**是指, X 为紧的并且存在一个 (Y,S) 到 (X,T) 的一个同态 h, 使得 $h:Y\to h(Y)$ 为同胚且 $h(Y)$ 在 X 中稠密.

反之, 如果 (Γ,g) 为一个回复的单生群, 那么下面将证明能够找到一个几乎等度连续的系统为它的紧化. 下面在一个更为一般性的条件下讨论这个问题. 由于 Γ 的度量为不变的, 所以 g 在 Γ 上的转移作用为等距的.

引理 3.7.3 设 (X_0,d_0) 为度量空间, T_0 为其上传递的等距映射. 那么

(1) T_0 在 X_0 上为极小的, 即对任意 $y\in X_0$ 成立 $\omega(y,T_0)=X_0$;

(2) 设 d_1 为 X_0 上另一个与 d_0 拓扑等价的度量并且 T_0 相对于 d_1 仍然为等距的, 那么 d_1 与 d_0 为一致等价的.

证明留作习题.

命题 3.7.4 设 (X_0,d_0) 为度量空间, T_0 为其上传递的等距映射. 如果 $h:(X_0,T_0)\to(X,T)$ 为一致连续的紧化, 那么 (X,T) 为几乎等度连续的. 进一步有 $h(X_0)\subseteq\mathrm{Trans}_T$, 其中等号在 (X_0,d_0) 完备时取到.

证明 因为 T_0 在 X_0 上极小并且 $h(X_0)$ 在 X 中稠密, 所以 $h(X_0)\subseteq\mathrm{Trans}_T$ 并且 (X,T) 为传递的. 取定 $y\in X_0$, 设 $x=h(y)$, 下面我们说明定理 3.2.14(3) 成立.

对于任意 $\varepsilon>0$, 由 h 一致连续知, 存在 $\varepsilon_0>0$, 使得 $d_0(y_1,y_2)<\varepsilon_0$ 蕴含 $d(hy_1,hy_2)<\varepsilon$. 由于 $h^{-1}:h(X_0)\to X_0$ 在 x 处连续, 所以存在 $\delta>0$, 使得 $d(x,hy_1)=d(hy,hy_1)<\delta$ 蕴含 $d_0(y,y_1)<\varepsilon_0$. 因为 $T^ix=T^i(hy)=h(T_0^iy)$, 所以一旦 $d(x,T^ix)<\delta$, 就有 $d_0(y,T_0^iy)<\varepsilon_0$. 由于 T_0 为等距的, 所以 $d_0(T_0^jy,T_0^{i+j}y)<\varepsilon_0,\forall j$. 进而 $d(T^jx,T^{i+j}x)<\varepsilon,\forall j$.

这样根据定理 3.2.14(3), (X,T) 为几乎等度连续的, 并且 d_T 为与 d 等价的在 Trans_T 上完备的度量. 而且 T 相对于 d_T 为等距的.

由引理 3.7.3(2), $h:(X_0,d_0)\to(h(X_0),d_T)$ 为一致同构的. 所以如果 (X_0,d_0) 完备, 那么 $(h(X_0),d_T)$ 也是完备的. 因为 $h(X_0)$ 在 Trans_T 中稠密, 所以如果 d_0 完备, 就有 $h(X_0)=\mathrm{Trans}_T$ 成立. □

定理 3.7.5 如果 (X_0,d_0) 为度量空间, 并且 T_0 为其上传递的等距映射, 那么存在一致连续的紧化 $h:(X_0,T_0)\to(X,T)$, 其中 (X,T) 为几乎等度连续的.

证明 不妨设 d_0 以 1 为界 (否则用 $\min\{d_0,1\}$ 替代 d_0). 设 $I=[0,1]$, 在双向序列空间 $I^{\mathbb{Z}}$ 上定义度量

$$d(a,b)=\sup\left\{\frac{|a_i-b_i|}{2^{|i|}}:i\in\mathbb{Z}\right\}.$$

在此度量下 $I^{\mathbb{Z}}$ 为紧空间. 设 T 为其上的转移映射, 即 $T(a)_i = a_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}$. 不难看出此时 $d_T(a,b) = \sup\{|a_i - b_i| : i \in \mathbb{Z}\}$.

取定点 $y_0 \in X_0$, 定义 $h : X_0 \to I^{\mathbb{Z}}$ 为

$$h(y)_i = d_0(T_0^i y, y_0) = d_0(y, T_0^{-i}(y_0)), \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

由三角不等式有 $|h(y_1)_i - h(y_2)_i| \leqslant d_0(y_1, y_2), \forall y_1, y_2 \in X_0, i \in \mathbb{Z}$. 另一方面, 取序列 $\{i_n\} \subseteq \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{i_n}(y_2) \to y_0$, 于是就有 $|h(y_1)_{i_n} - h(y_2)_{i_n}| \to d_0(y_1, y_2)$. 这样就说明了 $d_T(hy_1, hy_2) = d_0(y_1, y_2)$.

从而 h 为 X_0 到 $I^{\mathbb{Z}}$ 的一致连续嵌入. 设 X 为 $h(X_0)$ 在 $I^{\mathbb{Z}}$ 中的轨道闭包. 因为 $hT_0 = Th$, 所以 X 为不变的并且 $h : (X, T_0) \to (X, T)$ 为所要求的紧化. 根据命题 3.7.4, 它为几乎等度连续的. □

推论 3.7.6 设 (Γ, g) 为回复的单生群, 并且我们也直接将之视为以 g 为旋转的系统. 那么存在一致连续的紧化 $h : (\Gamma, g) \to (X, T)$, 其中 (X, T) 为几乎等度连续的.

此时 (X, T) 可以延伸为 (Γ, g) 的作用, 并且诱导了一个从 (Γ, g) 到 (Λ_T, T) 的同态. 在此同态下, Γ 嵌入 Λ_T 作为一个稠密的子群, 进而 Λ_T 可以视为 Γ 的一个紧化. 如果 Γ 为完备的, 那么上面从 (Γ, g) 到 (Λ_T, T) 的同态为同构.

请读者根据上面的各条结论补出证明.

命题 3.7.7 设 (X, T) 为几乎等度连续的系统, (Λ_T, T) 为其在 $C(X, X)$ 中的单生群. 设 (X_1, T_1) 是可以延伸为 (Λ_T, T) 的作用的系统, 而 $h : (X_1, T_1) \to (X, T)$ 为同态, 那么此同态为几乎一对一的, 且

$$h^{-1}(\mathrm{Trans}_T) = \mathrm{Trans}_{T_1} \subseteq \{x \in X_1 : h^{-1}(h(x)) = \{x\}\}.$$

并且 (X_1, T_1) 也是几乎等度连续的, 而 h 诱导了一个从单生群 (Λ_{T_1}, T_1) 到单生群 (Λ_T, T) 的同构.

证明 设 x_1 为 T_1 的传递点, 则由 h 为同态知, $x = h(x_1) \in \mathrm{Trans}_T$. 设 $h(x_2) = x$, 因为 $x_1 \in \mathrm{Trans}_{T_1}$, 所以存在 $i_k \to +\infty$, 使得 $T_1^{i_k} x_1 \to x_2$. 于是也有 $T^{i_k} x \to x$. 根据定理 3.2.14(4), 在 Λ_T 中 $T^{i_k} \to \mathrm{id}_X$. 因为 (X_1, T_1) 可延伸为 (Λ_T, T) 的作用, 所以由 3.7.2, 就有 $T_1^{i_k} \to \mathrm{id}_{X_1}$. 从而 $T_1^{i_k} x_1 \to x_1$, 自然就有 $x_1 = x_2$. 于是 $h^{-1}(\mathrm{Trans}_T) = \mathrm{Trans}_{T_1} \subseteq \{x \in X_1 : h^{-1}(h(x)) = \{x\}\}$. 尤其 h 为几乎一对一的.

其实在上面我们已经得到 (X_1, T_1) 满足 3.2.14 条件 (4), 所以 (X_1, T_1) 为几乎等度连续的. 从生成元映射 $T_1 \mapsto T$ 得到 (Λ_{T_1}, T_1) 到 (Λ_T, T) 的连续同态, 并且其逆为同态 $\Lambda_T \to C(X_1, X_1)$, 它使得 (X_1, T_1) 可以延伸为 (Λ_T, T) 的作用. □

推论 3.7.8 (Akin-Glasner) 设 (X, T) 为一致刚性的传递系统, (Λ_T, T) 为其对应的单生群. 那么存在一个几乎等度连续的系统 (X_1, T_1), 它可以延伸为 (Λ_T, T) 的

作用, 并且存在同态 $h:(X_1,T_1)\to(X,T)$, 使得它诱导了一个从单生群 (Λ_{T_1},T_1) 到单生群 (Λ_T,T) 的同构.

证明 由推论 3.7.6, 存在几乎等度连续系统 $(\tilde{X},\tilde{T})$, 它对应的单生群为 (Λ_T,T)(严格上讲, 是指在同构的意义下). 于是 $(X\times\tilde{X},T\times\tilde{T})$ 可以延伸为 (Λ_T,T) 的作用. 由于 (X,T) 为一致刚性的, 所以 (Λ_T,T) 为回复的单生群, 于是 $(X\times\tilde{X},T\times\tilde{T})$ 为一致刚性的. 取 $(x,\tilde{x})\in \mathrm{Trans}_T\times\mathrm{Trans}_{\tilde{T}}$, 设 $X_1=\omega(T\times\tilde{T})(x,\tilde{x})$, 而 T_1 为 $T\times\tilde{T}$ 在 X_1 上的限制. 于是 (X_1,T_1) 为传递的度量系统, 并且 $(x,\tilde{x})\in\mathrm{Trans}_{T_1}$. 易见, 到各坐标的投影映射在 (X_1,T_1) 上的限制映射 $\tilde{h}:(X_1,T_1)\to(\tilde{X},\tilde{T})$ 以及 $h:(X_1,T_1)\to(X,T)$ 为同态. 所以根据命题 3.7.7, h 为几乎一对一的且 (X_1,T_1) 为几乎等度连续的. h 诱导的从 (Λ_{T_1},T_1) 到 (Λ_T,T) 的同态的逆由 (X_1,T_1) 到 (Λ_T,T) 的作用给出. □

注记 3.7.9 由于存在非平凡的、一致刚性的极小弱混合系统 (Glasner-Maon, 1989), 它必非几乎等度连续的, 所以由以上结论知, 几乎等度连续的因子系统不一定为几乎等度连续的.

继续讨论之前, 先复习一下超空间与伪因子的知识. 设 X 为紧度量空间, 2^X 为它的全体闭子集全体. 对 $A,B\in 2^X$, 其 Hausdoff 度量定义为

$$d(A,B)=\inf\{\varepsilon: B_\varepsilon(A)\supseteq B\text{且}B_\varepsilon(B)\supseteq A\},$$

其中 $B_\varepsilon(A)=\{x\in X:d(x,A)<\varepsilon\}$. 在此度量下 2^X 成为紧度量空间. 设 $i_X:X\to 2^X$, $x\mapsto\{x\}$ 为一个嵌入映射.

对 2^X 的闭子集 H, 设

$$\bigvee(H)=\bigcup\{A\in H\}$$

为 X 的一个闭子集.

设 $g:X_1\to X_2$ 为连续映射, 则映射 $A\mapsto g(A)$ 定义了一个连续映射 $g_*:2^{X_1}\to 2^{X_2}$. 如果 g 为满射, 那么由于 $g(g^{-1}B)=B$, g_* 也是满射. 可以证明 (留作习题) $*:C(X_1,X_2)\to C(2^{X_1},2^{X_2})$ 为等距的, 即

$$D(g_1,g_2)=D(g_{1*},g_{2*}).$$

这样, 对紧度量系统 (X,T), 我们得到诱导的超空间系统 $(2^X,T_*)$. 如果 (X,T) 可以延伸为单生群 (Γ,g) 的作用, 那么由同态 $\Gamma\to C(X,X)$ 与同态 $*:C(X,X)\to C(2^X,2^X)$ 的复合得到 (Γ,g) 在 $(2^X,T_*)$ 上的作用.

对系统 (X,T), 设 H 为 2^X 闭 T_* 不变子集. 如果 $\varnothing\notin H$ 且 $\bigvee(H)=X$, 那么称 (H,T_*) 为 (X,T) 的**伪因子**. 独点集全体 $i_X(X)=\{\{x\}:x\in X\}$ 定义了一个与 (X,T) 同构的伪因子. 而 $\{X\}$ 称为**平凡的伪因子**.

如果 $h:(X_1,T_1)\to(X_2,T_2)$ 为扩充, 那么 $h_*:(2^{X_1},T_{1*})\to(2^{X_2},T_{2*})$ 也是扩充. 如果 H_1 为 (X_1,T_1) 伪因子, 那么易见 $h_*(H_1)$ 也为 (X_2,T_2) 的伪因子.

定理 3.7.10 设 $h:(X_1,T_1)\to(X_2,T_2)$ 为因子映射, 其中 (X_2,T_2) 可逆. 那么存在 2^{X_1} 的一个闭不变子集 H 以及一个几乎一对一扩充 $\hat{h}:(H,T_{1*})\to(X_2,T_2)$, 使得对任意 $A\in H$, 有

$$\varnothing\neq A\subseteq h^{-1}(\hat{h}(A)),\tag{3.7.3}$$

其中等号对 H 的一个稠密 G_δ 集成立. 如果 h 为极小的, 那么 $\bigvee(H)=X_1$, 于是 H 为 (X_1,T_1) 的一个伪因子.

证明 因为 h 连续, 所以 $h^{-1}:X_2\to2^{X_1}$ 为上半连续的. 由于 h 为满射, 所以对任意 $y\in X_2$, $h^{-1}(y)\neq\varnothing$. 又因为 T_2 为单射, 所以不难验证 $h^{-1}\circ T_2=T_1\circ h^{-1}$ 成立, 或等价地, $h^{-1}\subseteq X_2\times2^{X_1}$ 为 $T_2\times T_{1*}$ 不变的.

因为 h^{-1} 为上半连续的, 所以全体连续点集 D_0 为 X_2 的稠密 G_δ 集. 因为 T_2 为同胚, $D=\bigcap_{i\in\mathbb{Z}}T_2^i(D_0)$ 也是稠密的 G_δ 集. 令

$$\hat{X}_2=\overline{\{(y,h^{-1}(y)):y\in D\}}\subseteq X_2\times2^{X_1}.$$

设 $p_1:\hat{X}_2\to X_2$ 为投射, 则 p_1 为几乎一对一的, 尤其 $D\subseteq\{x:p_1^{-1}(p_1(x))=\{x\}\}$.

设 $p_2:\hat{X}_2\to2^{X_1}$ 为第二坐标投射, 令 $H=p_2(\hat{X}_2)$. 子集 $\{(y,A)\in X_2\times2^{X_1}:\varnothing\neq A\subseteq h^{-1}(y)\}$ 为包含 h^{-1} 的闭子集, 于是也包含了 $\hat{X}_2$. 由于 p_2 为单射, 所以 p_2 成为 $\hat{X}_2$ 到 H 的同胚. 设 $\hat{h}=p_1\circ(p_2^{-1}):H\to X_2$. 它为连续的满射且满足式子 3.7.3, 当 A 在稠密的 G_δ 的 $p_2(D)$ 中时取等号.

最后, 由于 D 为 T_2 不变的, h^{-1} 为 $T_2\times T_{1*}$ 不变的, 所以 $\hat{X}_2$ 以及它的像 H 为不变的. 闭子集 $\bigvee(H)$ 为 X_1 不变的且由 h 映满 X_2. 于是, 如果 h 为极小的, 那么 $\bigvee(H)=X_1$ 且 H 为伪因子. □

定义 3.7.11 一个性质 P 称为**通有的**是指它在因子映射、几乎一对一扩充以及逆极限下得到保持.

定理 3.7.12 设 P 为强于传递性的通有性质. 设 (X,T) 为几乎等度连续的系统, (Λ_T,T) 为其在 $C(X,X)$ 中的单生群. 那么以下命题等价:

(1) $(X,T)\in P^{\curlywedge}$, 即 (X,T) 弱不交于任意具有性质 P 的系统;

(2) 任何可以延伸为 (Λ_T,T) 的作用的系统与具有性质 P 的系统弱不交;

(3) 任何具有性质 P 且可以延伸为 (Λ_T,T) 作用的系统为平凡的.

证明 (2) $\Rightarrow$ (1) 显然.

(1) $\Rightarrow$ (3) 设 (X_1,T_1) 满足 P 且可延伸为 (Λ_T,T) 的作用. 下证 (X_1,T_1) 平凡. 由 (1), $(X\times X_1,T\times T_1)$ 为传递的, 并且可延伸为 (Λ_T,T) 的作用. 根据命题 3.7.7, 投射 $\pi_1:(X\times X_1,T\times T_1)\to(X,T)$ 为几乎一对一的, 于是 (X_1,T_1) 为平凡的.

(3) ⇒ (2) 用反证法. 设 (X_1,T_1) 为传递的且可延伸为 (Λ_T,T) 作用的系统. 设 (X_2,T_2) 满足 P, 但是 $(X_1\times X_2,T_1\times T_2)$ 不是传递的. 我们将构造一个 (X_1,T_1) 的非平凡的伪因子且满足性质 P, 由于任何伪因子可延伸为 (Λ_T,T) 的作用, 所以 (3) 不成立.

因为 $(X_1\times X_2,T_1\times T_2)$ 不是传递的, 所以存在 $X_1\times X_2$ 的一个包含某非空开集 $U_1\times U_2$ 的真闭不变子集 X'. 设 T' 为 $T_1\times T_2$ 在 X' 上的限制映射. 设 $q:X'\to X_1$ 与 $h:X'\to X_2$ 为投影映射在 X' 上的限制. 由于 $h(X')$ 为闭不变的且包含 U_2, 由 (X_2,T_2) 传递 (因为它满足 P) 知 h 为扩充.

设 H' 为定理 3.7.10 中构造的 $2^{X'}$ 的闭不变子集, 且 $\hat{h}:(H',T'_*)\to(X_2,T_2)$ 为对应的几乎一对一扩充. 由于 P 为通有性质, 所以 (H',T'_*) 也具有性质 P. 令 $H=q_*(H')$, 则它为 2^{X_1} 的闭不变子集. 下证它为伪因子. 因为对任意 $A\in H'$, $A\neq\varnothing$, 所以对任意 $B\in H$, $B\neq\varnothing$. 存在 $y\in U_2$, 使得 $A=h^{-1}(y)\in H'$, 于是 $A\supseteq U_1\times\{y\}$ 且 $B=q(A)\supseteq U_1$. 这样 $\bigvee(H)$ 为 X_1 包含 U_1 的闭不变子集. 由于 (X_1,T_1) 传递, 所以 $\bigvee(H)=X_1$, 即 H 为伪因子. 因为 (H,T_{1*}) 为 (H',T'_*) 因子以及 P 为通有性质, 它也具有性质 P.

最后, 只需说明 H 非平凡即可. 否则就有对任意 $A\in H'$, 成立 $q(A)=X_1$. 设 $x_2\in \mathrm{Trans}_{T_2}$, 存在 $A\in H'$, 使得 $\hat{h}(A)=x_2$. 根据引理 3.7.3, 有 $A\subseteq h^{-1}(x_2)$, 即 $A\subseteq X_1\times\{x_2\}$. 由假设, $A=X_1\times\{x_2\}$. 因为 x_2 为 T_2 的传递点, 所以包含 A 的最小的 $T_1\times T_2$ 不变的子集就是 $X_1\times X_2$ 本身. 因为 $A\subseteq X'$, 所以 X' 包含 $X_1\times X_2$, 矛盾! □

推论 3.7.13 设 (Γ,g) 为一个回复的单生群, (X,T) 为一个使得 (Λ_T,T) 与 (Γ,g) 同构的几乎等度连续系统.

(a) 以下各命题等价, 并且存在满足下面命题的单生群 (Γ,g):

(1) 任何可以延伸为 (Γ,g) 作用的极小系统为平凡的;

(2) 任何可以延伸为 (Γ,g) 作用的系统具有不动点;

(3) 系统 (X,T) 为扩散的;

(4) 任何可以延伸为 (Γ,g) 作用的传递系统为扩散的.

(b) 以下各命题等价, 并且满足 (a) 的系统一定满足下面命题:

(1) 任何可以延伸为 (Γ,g) 作用的有限系统为平凡的;

(2) 任何 (Γ,g) 到有限群的连续同态为平凡的;

(3) 任何可以延伸为 (Γ,g) 作用的系统的周期点为不动点;

(4) 系统 (X,T) 为完全传递的;

(5) 任何可以延伸为 (Γ,g) 作用的传递系统为完全传递的.

各条命题的等价性由以上命题不难得到, 请读者自证. 满足 (a) 的单生群的存在性由 Glasner(1998) 得到.

推论 3.7.14 *存在扩散但不是弱混合的系统.*

证明 因为几乎等度连续的弱混合系统必平凡 (习题), 所以由推论 3.7.13 就有结论. □

习 题 3.7

1. 补证引理 3.7.3.
2. 补证推论 3.7.6.
3. 证明: $* : C(X_1, X_2) \to C(2^{X_1}, 2^{X_2})$ 为等距的.
4. 证明: 不存在非平凡的弱混合且几乎等度连续的系统.

§3.8 注　记

对于等度连续性与 distal 的研究, 最早有所突破的是 Ellis 的一系列工作 (Ellis, 1953, 1957, 1958, 1960, 1969; Ellis-Gottschalk, 1960). 在此过程中, Ellis 首次在拓扑动力系统研究中引入了代数的方法, 建立了 Ellis 半群理论. 更为本质地指出等度连续与 distal 联系的是 Furstenberg(1963) 的工作. 他指出, 极小 distal 系统实际上是由平凡系统的若干等度连续扩充得到的, 这也是关于极小流的第一个结构定理, 它的出现最终引发了关于极小流结构定理一系列研究 (Ellis, 1969, 1973, 1978; Ellis etc., 1975; Glasner, 1976; Glasner, 2000; McMahon, 1976; Veech, 1977; Woude, 1982; Vries, 1993), 这些内容成为抽象动力系统中最为深刻的部分.

几乎等度连续是伴随着近年来对于初值敏感深入研究而出现的. 这方面的进展主要归功于 Auslander, Akin, Berg, Glasner 和 Weiss 等人的工作 (Akin etc., 1996; Akin etc., 1998; Akin-Glasner, 2001; Auslander-Yorke, 1980; Glasner-Weiss, 1993). 几乎 distal 的概念是 Blanchard(2002) 等人中提出的, 而半 distal 由 Akin 等提出.

本章中关于几乎等度连续的处理主要取材于 Akin etc.(1996), Akine-Glasner (2001) 等的工作; 关于各类 distal 性的刻画取材于文献 (Akin etc.). 关于 Ellis 半群的内容可以参见上面提到的文献, §3.5 中的处理方式取自文献 (Huang etc., 2003). §3.6 中 Furstenberg 的结构定理, 我们在这里给出的是由 Bronstein 给出的简化证明.

值得一提的是, 最近, Glasner, Megrelishvili 和 Uspenskij 给出了 Ellis 半群可度量化的充分必要条件 (Glasner etc.). 这个条件与几乎等度连续性密切相关.

第 4 章　族与弱不交

在第 1 章与第 2 章中, 我们已经接触了许多重要的 $\mathbb{Z}_+$ 的子集组成的族. 本章首先系统地给出有关族的一些概念, 并且指出它与动力系统的关联, 然后运用它对弱不交性进行研究. §4.1 给出关于族的一些基本概念与符号. §4.2 详细论述了族在动力系统中的应用. §4.3 运用族的观点给出一些重要定理的构造性证明. §4.4 引入族意义下的传递和混合的概念, 给出它们的一些刻画. §4.5 讨论族混合及对偶性, 给出族传递的一个重要定理：Weiss-Akin-Glasner 引理.

§4.1　Furstenberg 族

设 (X,T) 为动力系统. 在前面我们已经看到, (X,T) 为拓扑传递的当且仅当对 X 的任意非空开集 U,V 回复时间集 $N(U,V)$ 为无限集; (X,T) 为弱混合的当且仅当对 X 的任意非空开集 U,V 回复时间集 $N(U,V)$ 为 thick 集; (X,T) 为强混合的当且仅当对 X 的任意非空开集 U,V 回复时间集 $N(U,V)$ 为有限余集. 由此可以看出, 对 $\{N(U,V): U,V$ 为 X 的非空开集 $\}$ 这一 $\mathbb{Z}_+$ 的子集族的描述可以将上述概念建立在统一的观点之下. 另外, 在刻画点的回复性的时候, 我们看到, 对任意回复点 x 及其任意邻域 U, 时间集 $N(x,U)$ 与 IP 集密切相关. 而实际上这个时间集 $N(x,U)$ 的性质也反映了回复点的回复程度. 例如, 当它为 syndetic 集时, 回复点实际上已经成为了极小点. 一般地, 对于研究动力系统而言, 如果能十分精确地把握集合与集合、点与集合之间的关系, 将对充分了解系统的动力学性状有极大帮助. 而在这之中, 族的方法起了至关重要的作用.

族的概念最早可以追述到在一般拓扑学与数理逻辑中滤子的使用. 但这种用族的观点来研究系统的动力学性质的思想首先由 Gottschalk 和 Hedlund(1955) 引入的. 之后有许多数学工作者沿着这一思路进行了有意义的讨论, 但真正得到发扬光大是在 Furstenberg 及其合作者手中. 他在其经典著作中将这一思想进行了深刻而漂亮的阐述 (Furstenberg, 1981). 他的工作将拓扑动力系统与遍历论的应用深刻地植入组合数论与 Ramsey 理论之中, 对相应的数学分支有着广泛而深远的影响. 在最近几十年中, Furstenberg 的追随者们根据这一想法在各个相关领域进行了富有成效的研究 (Akin, 1997; Bergelson, 1996; Bergelson-McCutcheon, 2000; Hindman, 1979). 特别地, Akin 在拓扑动力系统这一范畴下, 在其专著中系统总结和发展了 Furstenberg 族的方法 (Akin, 1997). 他的工作不同于前人的主要之处在于极度的一

般性、抽象性与系统性. 以下使用的概念和记号也主要借鉴 Akin 的这本专著.

由于本章大多情况下只涉及离散动力系统, 即我们的作用半群是 $\mathbb{Z}_+$, 所以为方便与利于理解, 只讨论 $\mathbb{Z}_+$ 上的子集族, 而将 $\mathbb{Z}_+$ 换为一般作用群或半群 G 时, 以下的讨论均是类似的. 本节首先介绍一些最基本的概念与性质, 然后分别讨论一些常见的族以及它们的相互关系, 最后证明 $\mathcal{F}_{\rm ip}$ 等族为滤子. 本节基本没有涉及任何动力系统的内容, 族与动力系统的关系将在下一节开始展开.

设 $\mathcal{P}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的全体子集构成的集合. 如果 $\mathcal{P}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 具有遗传向上性, 即若 $F_1 \subset F_2$ 且 $F_1 \in \mathcal{F}$, 则 $F_2 \in \mathcal{F}$, 那么就称 $\mathcal{F}$ 为 **Furstenberg 族**或直接简称为**族**. 族 $\mathcal{F}$ 称为**真族**, 如果它是 $\mathcal{P}$ 的真子集, 即它既非空集又不为 $\mathcal{P}$. 由遗传向上性, $\mathcal{F}$ 为真族当且仅当 $\varnothing \notin \mathcal{P}$ 且 $\mathbb{Z}_+ \in \mathcal{F}$.

一个真族 $\mathcal{F}$ 如果对集合的交运算封闭, 则称之为**滤子**, 即如 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, 则有 $F_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \mathcal{F}$. 每个 $\mathcal{P}$ 的子集 $\mathcal{A}$ 均可生成一个族:

$$[\mathcal{A}] = \{F \in \mathcal{P} : \exists A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } A \subseteq F\}.$$

易见, $[\mathcal{A}]$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小的族. 如果 $[\mathcal{A}]$ 为滤子, 那么称 $\mathcal{A}$ 为**滤子基**.

如果 $\mathcal{F}$ 为族, 则它的**对偶**

$$k\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P} : F \cap F_1 \neq \varnothing \text{ 对所有的} F_1 \in \mathcal{F} \text{成立}\}$$

也为族, 且若 $\mathcal{F}$ 为真子族, 则 $k\mathcal{F}$ 也为真子族. 不难证明:

$$k\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P} : \mathbb{Z}_+ \setminus F \notin \mathcal{F}\}.$$

$\mathcal{P}$ 的最大的真子族为由 $\mathbb{Z}_+$ 的所有非空子集构成的族 $\mathcal{P}_+$, 它的对偶族 $k\mathcal{P}_+$ 为最小的真子族 $\{\mathbb{Z}_+\}$. 本书主要是用 $\mathcal{F}^*$ 来表示族 $\mathcal{F}$ 的对偶族, 但是由于本节要考虑关于族的各种运算, 此时用符号 $k\mathcal{F}$ 要更清楚些.

性质 4.1.1 设 $\mathcal{F}, \mathcal{F}_\alpha$ 为真族, 则

(1) $k(k\mathcal{F}) = \mathcal{F}$;

(2) $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \Rightarrow k\mathcal{F}_2 \subset k\mathcal{F}_1$;

(3) $k(\bigcup_\alpha \mathcal{F}_\alpha) = \bigcap_\alpha k\mathcal{F}_\alpha$; $k(\bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha) = \bigcup_\alpha k\mathcal{F}_\alpha$.

证明不难, 请读者自证.

设 $\mathcal{F}_1$ 与 $\mathcal{F}_2$ 为族, 定义运算 $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = \{F_1 \cap F_2 : F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\}$. 由定义易见 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$; $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2 \cdot \mathcal{F}_1$; $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_2 \cdot \mathcal{F}$ 等.

命题 4.1.2 设 $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 为族, 则

(1) $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$ 为真的当且仅当 $\mathcal{F}_2 \subset k\mathcal{F}_1$. 一般地, 有 $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ 当且仅当 $\mathcal{F}_1 \cdot k\mathcal{F} \subseteq k\mathcal{F}_2$;

(2) $\mathcal{F}$ 是滤子当且仅当 $\mathcal{F}=\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}$, 且如 $\mathcal{F}$ 是滤子, 则 $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F}=k\mathcal{F}$;

(3) 如 $\mathcal{F}$ 为真子族, 则 $k(\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F})$ 为包含在 $\mathcal{F}\cap k\mathcal{F}$ 中的滤子, 且此滤子为满足关系 $\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}$ 的所有 $\mathcal{F}_1$ 中最大的族.

证明 (1) 首先, 明显有 $\mathbb{Z}_+\in\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2$, 于是 $\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2$ 为真的当且仅当 $\varnothing\notin\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2$. 即有对任意 $F_1\in\mathcal{F}_1$ 及任意 $F_2\in\mathcal{F}_2$, $F_1\cap F_2\neq\varnothing$ 成立. 由此式及对偶的定义, 就有 $\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2$ 为真的当且仅当 $\mathcal{F}_1\subseteq k\mathcal{F}_2$ 当且仅当 $\mathcal{F}_2\subseteq k\mathcal{F}_1$.

如果 $\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2\subseteq\mathcal{F}$, 则

$$(\mathcal{F}_1\cdot k\mathcal{F})\cdot\mathcal{F}_2=(\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2)\cdot k\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F}.$$

于是 $(\mathcal{F}_1\cdot k\mathcal{F})\cdot\mathcal{F}_2$ 为真的, 由以上已证结论就有 $\mathcal{F}_1\cdot k\mathcal{F}\subseteq k\mathcal{F}_2$. 反之设 $\mathcal{F}_1\cdot k\mathcal{F}\subseteq k\mathcal{F}_2$, 由以上已证结论就有 $(\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2)\cdot k\mathcal{F}$ 为真的, 继而再用一次上结论就有 $\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2\subseteq k(k\mathcal{F})=\mathcal{F}$.

(2) 首先注意到 $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}$ 等价于 $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}=\mathcal{F}$. 如 $\mathcal{F}$ 为滤子, 则 $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}=\mathcal{F}$. 由 (1), 就得到 $\mathcal{F}\subseteq k\mathcal{F}$ 以及 $\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F}\subseteq k\mathcal{F}$.

(3) 令 $\tilde{\mathcal{F}}=k(\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F})$, 则 $\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F}=k\tilde{\mathcal{F}}$. 由 (1), $\mathcal{F}\cdot\tilde{\mathcal{F}}\subseteq\mathcal{F}$.

设族 $\mathcal{F}_1$ 满足 $\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}$, 则 $\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F}$. 又由 (1), 得到 $\mathcal{F}_1\cdot\tilde{\mathcal{F}}\subseteq\tilde{\mathcal{F}}$. 所以 $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_1\cdot\tilde{\mathcal{F}}\subseteq\tilde{\mathcal{F}}$. 尤其当 $\mathcal{F}_1=\tilde{\mathcal{F}}$ 时, 有 $\tilde{\mathcal{F}}\cdot\tilde{\mathcal{F}}\subseteq\tilde{\mathcal{F}}$. 所以 $\tilde{\mathcal{F}}$ 为滤子.

由于 $\mathcal{F}\cup k\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F}$, 所以 $k(\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F})\subseteq k(\mathcal{F}\cup k\mathcal{F})=k\mathcal{F}\cap\mathcal{F}$. □

令 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的全体无限子集组成的族, 那么易见它的对偶族 $k\mathcal{F}_{\text{inf}}=\mathcal{F}_{\text{cf}}$为全体有限余集组成的族. 族 $\mathcal{F}$ 称为**满的**是指它为真的并且满足 $\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}_{\text{inf}}$. 由命题 4.1.2(1) 知, 上式等价于 $\mathcal{F}_{\text{cf}}\cdot\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}$. 由定义, $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 和 $\mathcal{F}_{\text{cf}}$ 为满的, 并且 $\mathcal{F}$ 为满的当且仅当 $k\mathcal{F}$ 为满的. 一个满的族 $\mathcal{F}$ 满足:

$$\mathcal{F}_{\text{cf}}\subseteq\mathcal{F}_{\text{cf}}\cdot\mathcal{F}=\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}\cdot k\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}_{\text{inf}}. \tag{4.1.1}$$

如果 $\mathcal{F}$ 为滤子且满足 $\mathcal{F}_{\text{cf}}\subseteq\mathcal{F}$, 则由 $\mathcal{F}_{\text{cf}}\cdot\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}$ 知, 此时 $\mathcal{F}$ 为满的.

对 $i\in\mathbb{Z}_+$, 定义 $g^i:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$, 使得 $g^i(j)=i+j$. 对 $F\in\mathcal{P}$, 定义 $g^{-i}(F)=\{j\in\mathbb{Z}_+:i+j\in F\}$. 称族 $\mathcal{F}$ 为**正平移不变的**, 如果对每个 $i\in\mathbb{Z}_+$, 有 $g^i(\mathcal{F})\subseteq\mathcal{F}$; 称族 $\mathcal{F}$ 为**负平移不变的**, 如果对每个 $i\in\mathbb{Z}_+$, $g^{-i}(\mathcal{F})\subseteq\mathcal{F}$; 称族 $\mathcal{F}$ 为**平移不变的**, 如果对每个 $i\in\mathbb{Z}_+$, 有 $F\in\mathcal{F}\Leftrightarrow g^{-i}(F)\in\mathcal{F}$.

称族 $\mathcal{F}$ 为**thick 族**是指对任意 $F\in\mathcal{F}$ 及有限集 $i_1,i_2,\cdots,i_k\in\mathbb{Z}_+$, 有 $g^{-i_1}(F)\cap g^{-i_2}(F)\cap\cdots\cap g^{-i_k}(F)\in\mathcal{F}$. 而对族 $\mathcal{F}$, 我们能定义一个与 $\mathcal{F}$ 相关的 thick 族 $\tau\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}\tau\mathcal{F}=\{F\in\mathcal{F}:&\text{对任一有限集}i_1,i_2,\cdots,i_k\in\mathbb{Z}_+,\\&\text{有}g^{-i_1}(F)\cap g^{-i_2}(F)\cap\cdots\cap g^{-i_k}(F)\in\mathcal{F}\}.\end{aligned}$$

族 $\tau\mathcal{F}$ 为包含于族 $\mathcal{F}$ 中的最大的 thick 族. 由定义知, 族 $\mathcal{F}$ 为 thick 族当且仅当 $\tau\mathcal{F}=\mathcal{F}$.

如果 $k\mathcal{F}$ 为滤子, 那么族 $\mathcal{F}$ 称为**滤子对偶**. 对于滤子对偶, 其重要性在于它有 Ramsey 性质:

命题 4.1.3 *族 $\mathcal{F}$ 为滤子对偶当且仅当它有 Ramsey 性质, 即如 $F_1\cup F_2\in\mathcal{F}$, 则有 $F_1\in\mathcal{F}$ 或 $F_2\in\mathcal{F}$ 成立.*

证明 设 $\mathcal{F}$ 为滤子对偶. 如果 $F_1\notin\mathcal{F}$ 且 $F_2\notin\mathcal{F}$, 则 $F_1^c\in k\mathcal{F}$ 且 $F_2^c\in k\mathcal{F}$. 于是 $F_1^c\cap F_2^c\in k\mathcal{F}$, 所以 $(F_1\cup F_2)^c\in k\mathcal{F}$, 继而 $F_1\cup F_2\notin\mathcal{F}$.

反之, 对任意 $F_1,F_2\in k\mathcal{F}$, 由定义有 $F_1^c\notin\mathcal{F}$ 及 $F_2^c\notin\mathcal{F}$. 所以 $F_1^c\cup F_2^c\notin\mathcal{F}$, 即 $(F_1\cap F_2)^c\notin\mathcal{F}$. 从而 $F_1\cap F_2\in k\mathcal{F}$. □

滤子对偶是一条重要的性质, 正是由于这条性质使得族在 Ramsey 理论中有着特殊的作用.

以下介绍一些重要的族. 首先用 k 与 τ 两个算子从 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 出发构造一些常见的族.

(1) 首先是 $k\mathcal{F}_{\text{inf}}=\mathcal{F}_{\text{cf}}$, 根据定义即知它是所有有限余集的全体. 易见 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 为最大的真平移不变族, 而 $\mathcal{F}_{\text{cf}}$ 为最小的真平移不变族.

(2) 由定义分析易知, 集合 F 在 $\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 中当且仅当它包含了任意长的区间段, 即对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $a_n\in F$, 使得 $[a_n,a_n+n]\subseteq F$. 所以 F 为 thick 的, 即 $\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}=\mathcal{F}_{\text{t}}$. 而子集 F' 在其对偶 $k\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 中当且仅当存在自然数 N, 使得对任意 $i\in\mathbb{Z}_+$, 成立 $\{i,i+1,\cdots,i+N\}\cap F'\neq\varnothing$, N 称为 F 的间距. 所以 F' 为 syndetic 的, 即 $k\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}=\mathcal{F}_{\text{s}}$.

(3) $\tau k\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 中元称为 **replete 的**或 **thickly syndetic 的**. $F\in\tau k\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 当且仅当对任意正数 N, $\{n:[n,n+N]\subseteq F\}$ 为 syndetic 的. 其对偶集 $k\tau k\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 中元称为**大的**或 **piecewise syndetic 的**. $F\in k\tau k\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 当且仅当它为某个 thick 集和某个 syndetic 集的交集. 为方便, 记 $\mathcal{F}_{\text{ts}}=\tau k\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}$, $\mathcal{F}_{\text{ps}}=k\tau k\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}$.

以上各集为用 k 与 τ 两个算子从 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 出发所能构造的所有族, 它们都是平移不变的, 且 $\mathcal{F}_{\text{cf}}$ 与 $\mathcal{F}_{\text{ts}}$ 为滤子 (留作习题).

另一类重要的族与密度有关, 首先我们回忆一些定义. 设 A 为 $\mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{Z}$ 的子集. 它的**上半 Banach 密度**定义为: $BD^*(A)=\lim\limits_{|I|\to\infty}\sup\dfrac{|A\cap I|}{|I|}$, 其中 I 为 $\mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{Z}$ 的区间段, 而 $|\cdot|$ 表示集合的基数. 集合 A 的**上密度**定义为 $\bar{d}(A)=\lim\limits_{N\to\infty}\sup\dfrac{|A\cap\{0,1,\cdots,N-1\}|}{N}$(如 A 为 $\mathbb{Z}$ 子集, 则定义改为 $\bar{d}(A)=\lim\limits_{N\to\infty}\sup\dfrac{|A\cap\{-N,-N+1,\cdots,N\}|}{2N+1}$). 同理, 定义**下半 Banach 密度** $BD_*(A)$ 和

下密度 $\underline{d}(A)$. 如果 $\bar{d}(A) = \underline{d}(A)$, 那么称 A 有**密度**$d(A)$.

性质 4.1.4 设 E, F 为 $\mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{Z}$ 子集. 则

(1) $BD_*(E) \leqslant \underline{d}(E) \leqslant \bar{d}(E) \leqslant BD^*(E)$;

(2) $BD^*(E \cup F) \leqslant BD^*(E) + BD^*(F)$; 如果 $E \cap F = \varnothing$, 则 $BD_*(E \cup F) \geqslant BD_*(E) + BD_*(F)$; 将 BD^*, BD_* 换为 $\bar{d}, \underline{d}$ 结论仍成立;

(3) $\bar{d}(E) = 1 - \underline{d}(E^c)$; $BD^*(E) = 1 - BD_*(E^c)$.

证明留作习题.

记 $\mathcal{F}_{\rm d1} = \{A : d(A) = 1\} = \{A : \underline{d}(A) = 1\}$ 及 $\mathcal{F}_{\rm lbd1} = \{A : BD_*(A) = 1\}$, 它们为滤子. 并且有

$$\mathcal{F}_{\rm d1}^* = k\mathcal{F}_{\rm d1} = \{A : A^c \notin \mathcal{F}_{\rm d1}\} = \{A : \underline{d}(A^c) < 1\} = \{A : \bar{d}(A) > 0\}.$$

同理得到 $\mathcal{F}_{\rm lbd1}^* = k\mathcal{F}_{\rm lbd1} = \{A : BD^*(A) > 0\}$. 也记 $\mathcal{F}_{\rm pubd} = \mathcal{F}_{\rm lbd1}^*$ 及 $\mathcal{F}_{\rm pud} = \mathcal{F}_{\rm d1}^*$. 另外注意 $\mathcal{F}_{\rm t} = \{A : BD^*(A) = 1\}$.

设 $E \subseteq \mathbb{Z}_+$, 记 $E - E = \{a - b : a \geqslant b, a, b \in E\}$, 称之为 **E 的差集**或 **$\Delta$ 集**. 对 $\mathcal{F}$, 定义族的差集为 $\Delta(\mathcal{F}) = [\{F - F : F \in \mathcal{F}\}]$, 并记其对偶为 $\Delta^*(\mathcal{F}) = k(\Delta(\mathcal{F}))$. 易见 $\Delta(\mathcal{F}_{\rm lbd1}^*) = \Delta(\mathcal{F}_{\rm d1}^*)$; $\Delta(\mathcal{F}_{\rm s}) = \Delta(\mathcal{F}_{\rm ps})$; $\Delta(\mathcal{F}_{\rm t}) = \{\mathbb{Z}_+\}$ 等. 当 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\rm inf}$ 时, 省略记号 $\mathcal{F}$, 记其为 $\Delta_{\rm inf}$, 而称 $\Delta_{\rm inf}^*$ 中元素为**Δ^* 集**.

命题 4.1.5 每个 thick 集为 IP 集, 而每个 IP 集包含了某个差集. 从而每个 Δ^* 集为 IP* 集, 而每个 IP* 集为 syndetic 的.

证明 设 S 为 thick 集, 我们将归纳地定义序列 $\{p_n\} \subseteq S$, 使 $\mathrm{FS}(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}) \subseteq S$.

首先任意取 $p_1 \in S$. 由于 S 为 thick, 存在长度大于 p_1 的区间段. 在此区间段中取 p_2, 使得 $p_1 + p_2$ 也在此区间段中. 假设已经取好 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 使得 $\mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=1}^{n}) \subseteq S$. 由于 S 为 thick 的, 所以存在长度大于 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ 的区间段. 取 p_{n+1} 为此区间段最小的那个数, 则因为 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n + p_{n+1}$ 仍在此区间段中, 有 $p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k} + p_{n+1}, \forall 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ 在此区间段中. 于是就有 $\mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=1}^{n+1}) \subseteq S$. 由此归纳定义了 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\mathrm{FS}(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}) \subseteq S$.

设 $F = \mathrm{FS}(\{p_n\}_{n=1}^{\infty})$ 为 IP 集, 令 $s_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. 则 $s_n - s_m \in F, \forall n > m$, 即 F 包含了一个差集. □

以上包含关系为真包含 (请读者给出具体的反例), 即

$$\mathcal{F}_{\rm t} \subsetneqq \mathcal{F}_{\rm ip} \subsetneqq \Delta, \quad \text{且 } \Delta^* \subsetneqq \mathcal{F}_{\rm ip}^* \subsetneqq \mathcal{F}_{\rm s}.$$

下面说明全体 IP* 集组成的族 $\mathcal{F}_{\rm ip}^*$ 是滤子.

记 $\mathcal{G}$ 为 $\mathbb{N}$ 全体非空有限子集组成的集合, 则 $(\mathcal{G}, \cup)$ 为半群. 对 $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$, 如果 $\max\{i : i \in \alpha\} < \min\{i : i \in \beta\}$, 则定义 $\alpha < \beta$. 对互不相交的序列 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}$, 定

义

$$\mathrm{FU}(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty})=\Big\{\bigcup_{i\in\beta}\alpha_i:\beta\in\mathcal{G}\Big\}.$$

称为 **IP 环**.

对 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以及 $\alpha\in\mathcal{G}$, 令 $p_\alpha=\sum_{i\in\alpha}p_i$. 则 $\mathrm{FS}(\{p_n\}_{n=1}^{\infty})=\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{G}}$.

引理 4.1.6 *设 F 为 IP 集. 对任意 $m\in\mathbb{N}$, 存在 F 的 IP 子集 F', 使得 $F'\subseteq m\mathbb{N}$.*

证明 设 $F=\mathrm{FS}(\{p_n\}_{n=1}^{\infty})$. 因为模 m 的同余类有限, 所以不妨设 $p_n\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$. 设 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{G}$ 为互不相交的一个序列, 并且每个 α_n 为由 m 个元集组成的集合. 这样 $F'=\mathrm{FS}(\{p_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty})$ 为所求的 IP 子集. □

定理 4.1.7 *设 $\mathcal{G}=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_r$, 则存在 C_j 包含了一个 IP 环.*

证明 对 $\alpha=\{l_1,l_2,\cdots,l_k\}\in\mathcal{F}$, 定义 $\phi(\alpha)=2^{l_1-1}+2^{l_2-1}+\cdots+2^{l_k-1}$. 则 ϕ 建立了 $\mathcal{G}$ 与 $\mathbb{N}$ 的一一对应, 进而得到了剖分 $\mathbb{N}=\phi(C_1)\cup\phi(C_2)\cup\cdots\cup\phi(C_r)$. 根据 Hindman 定理, 存在 $1\leqslant j\leqslant r$, 使得 $\phi(C_j)$ 包含了一个 IP 集 Q.

首先注意到下面的结论：对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_t$, $Q(x_1,x_2,\cdots,x_t)=\{y:x_i+y\in Q,i=1,2,\cdots,t\}$ 包含了一个 IP 集. 下面开始构造 IP 环. 首先任取 $\alpha_1\in C_j$ 及 $m_1=2^{n_1}>\phi(\alpha_1)$. 取 α_2 使得 $\phi(\alpha_2)\in Q(\phi(\alpha_1))\cap m_1\mathbb{N}$, 则 $\alpha_2\cap\alpha_1=\varnothing$, $\alpha_2\in\phi^{-1}(Q)\subseteq C_j$ 以及 $\alpha_1\cup\alpha_2\in C_j$(因为 $\alpha_1\cap\alpha_2=\varnothing$, 所以 $\phi(\alpha_1\cup\alpha_2)=\phi(\alpha_1)+\phi(\alpha_2)\in Q$. 进而 $\alpha_1\cup\alpha_2\in C_j$). 归纳地, 假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 已经取定. 取 α_n 使得 $\phi(\alpha_n)$ 可以被 2 的足够大次幂整除, 进而使得 α_n 不交于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$. 并且可以要求 $\phi(\alpha_n)\in Q(\mathrm{FU}(\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}))$, 进而使得对任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-1$, 有 $\phi(\alpha_{i_1}\cup\alpha_{i_2}\cup\cdots\cup\alpha_{i_k}\cup\alpha_n)=\phi(\alpha_{i_1}\cup\alpha_{i_2}\cup\cdots\cup\alpha_{i_k})+\phi(\alpha_n)\in Q$. 这样得到不交序列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\mathrm{FU}(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty})\subseteq C_j$. □

定理 4.1.8 *设 Q 为 IP 集, 且 $Q=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_r$, 则存在 C_j 仍包含了一个 IP 集.*

证明 设 $Q=\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{G}}$, 则由 $Q=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_r$ 得到 $\mathcal{G}$ 的剖分 $\mathcal{G}=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_r$, 其中 $D_i=\{\alpha:p_\alpha\in C_i\}$. 由定理 4.1.7, 存在 D_j 包含了一个 IP 环 $\mathrm{FU}(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty})$. 则 $\mathrm{FS}(\{p_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty})$ 为包含在 C_j 中的 IP 集. □

根据这个推论以及命题 4.1.3, 有

命题 4.1.9 *族 $\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}^*$ 为滤子.*

族 Δ^* 也是滤子, 它的证明依赖于 **Ramsey 定理**：设 A 为无限集合, 则对任意给定的 r,k 及 A^r 的任意 k 染色, A 中必存在无限子集 B, 使得 B^r 在 A^r 的染色下为同色的.

命题 4.1.10 *Δ^* 为滤子.*

证明　仅需证明 Δ 具有 Ramsey 性即可. 设 $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为递增的且 $S=\{s_i-s_j: 1\leqslant j<i<\infty\}$. 令 $S=S_1\cup S_2$ 及

$$P_l=\{(i,j):s_j-s_i\in S_l\},\quad l=1,2.$$

于是由 P_1,P_2 得到集合 $P=\{(i,j):1\leqslant j<i<\infty\}$ 的一个剖分. 根据 Ramsey 定理, 存在 $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得所有 (i_m,i_n), $m<n$ 或都在 P_1 中, 或都在 P_2 中. 于是 $\{s_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}-\{s_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 包含在 S_1 或 S_2 中. 即 Δ 具有 Ramsey 性. □

习　题　4.1

1. 设 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ 为真子族, 则

(1) $\tau\tau\mathcal{F}=\tau\mathcal{F}$;

(2) $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\Rightarrow\tau\mathcal{F}_1\subseteq\tau\mathcal{F}_2$;

(3) $(\tau\mathcal{F}_1)\cdot(\tau\mathcal{F}_2)=\tau((\tau\mathcal{F}_1)\cdot(\tau\mathcal{F}_2))\subseteq\tau(\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2)$. 尤其, 如果 $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ 为 thick 族, 则 $\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2$ 也为 thick 的.

2. 设 $\mathcal{F}$ 为滤子, 则

(1) $\mathcal{F}$ 为负平移不变的当且仅当 $\mathcal{F}$ 为 thick 的;

(2) $\tau\mathcal{F}$ 与 $\tau k\tau k\tau\mathcal{F}$ 均为滤子, 且 $\tau\mathcal{F}\subseteq\tau k\tau k\tau\mathcal{F}$. 进一步还有

$$\tau k\tau k\tau k\tau\mathcal{F}=\tau k\tau\mathcal{F}.$$

(3) 如果 $\mathcal{F}$ 还为平移不变的, 则它为 thick 的, 且由 (2) 有 $\mathcal{F}\subseteq\tau k\tau k\mathcal{F}$. 另外还成立:

$$\tau k\tau k\mathcal{F}\cdot\tau k\mathcal{F}=\tau k\mathcal{F},$$

$$\tau k\tau k\mathcal{F}=k(\tau k\mathcal{F}\cdot k\tau k\mathcal{F}).$$

3. 证明 $\mathcal{F}_{\mathrm{ts}}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{d1}}$ 与 $\mathcal{F}_{\mathrm{lbd1}}$ 都为滤子.

4. 试说明 $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}},\mathcal{F}_{\mathrm{cf}},\mathcal{F}_{\mathrm{t}},\mathcal{F}_{\mathrm{s}},\mathcal{F}_{\mathrm{ts}},\mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$ 为由 k 与 τ 两个算子从 $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ 出发所能构造的所有族. 提示: 证明 $\tau\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}=\tau k\tau k\tau\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$.

5. 如果一个滤子在包含关系这个半序下极大, 则称之为**超滤子**. 由 Zorn 引理, 每个滤子包含在某个超滤子中.

设 $\mathcal{F}$ 为滤子, 证明以下等价:

(1) $\mathcal{F}$ 为超滤子;

(2) $\mathcal{F}=k\mathcal{F}$;

(3) $\mathcal{F}$ 为滤子对偶;

(4) 对任意 $F\subseteq\mathbb{Z}_+$, 要么 $F\in\mathcal{F}$, 要么 $F^c\in\mathcal{F}$.

6. 说明式子 $\mathcal{F}_{\mathrm{t}}\subsetneqq\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}\subsetneqq\Delta$.

7. 证明性质 4.1.4.

8. 证明定理 4.1.7 与 Hindman 定理是等价的.

§4.2 一些常见族与动力系统

上一节介绍了族的基本概念与性质，也研究了若干常见的族. 这一节在正文与习题中给出大量的例子说明族与动力系统的密切联系. 其中许多结论已经在第 1 章和第 2 章中遇见过，但是为了完整我们还是给出结论的陈述.

首先是 syndetic 集，这是个与极小性密切相关的概念. 我们重述前面提到的 Gottschalk-Hedlund 定理 (定理 1.3.5)：

定理 4.2.1 *设 (X,T) 为系统. 则点 $x \in X$ 为极小的当且仅当对 x 的任意邻域 U, $N(x,U)$ 为 syndetic 的.*

与回复点的回复时间集密切相关的是 IP 集. Hindman 定理指出：$\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 具有 Ramsey 性，即对任一 IP 集的有限剖分，必有其一剖分元仍为 IP 集 (参见定理 4.1.8). 很难想象这个定理实际上等价于前面提到的 Auslander-Ellis 定理 (定理 3.3.15)：动力系统中任何点的轨道中均可找到一个极小点与之 proximal.

命题 4.2.2 *Hindman 定理等价于 Auslander-Ellis 定理.*

证明 Auslander-Ellis 定理蕴含 Hindman 定理这个事实由定理 3.3.16 的证明已经得到. 而 Hindman 定理蕴含 Auslander-Ellis 的证明参见定理 4.3.4 的证明. □

IP 集是与幂等元 (idempotent) 密切相关，这是 Furstenberg 等人将它取名为 IP 集的缘由. Furstenberg 指出 (定理 1.2.13)：

定理 4.2.3 (Furstenberg) *设 (X,T) 为动力系统. 如果 $x \in X$ 为回复点，那么对 x 任意邻域 U, $N(x,U)=\{n \in \mathbb{Z}_+ : T^n x \in U\}$ 为 IP 集. 反之，如 R 为 IP 集，则存在传递系统 (X,T)，传递的 $x \in X$ 以及 x 的一个邻域 U，使得 $N(x,U) \subseteq R$.*

将 $\mathcal{F}_{\text{ip}}^*$ 中的元素称为 IP* **集**. 如果一个点 x 的回复时间集为 IP* 集，那么由 IP* 集必为 syndetic 的知 x 为极小点. 事实上我们能说得更多. 回忆一个点称为 distal 点是指它的轨道闭包中只有自己与其 proximal.

定理 4.2.4 (Furstenberg) *设 (X,T) 为动力系统，$x \in X$. 则 x 为 IP* 回复的当且仅当它为 distal 点.*

证明参见定理 3.4.7.

与 Δ^* 回复有关的概念为几乎自守性. 设 (X,T) 为可逆动力系统，$x \in X$ 称为**几乎自守点** 是指对任意序列 $n_i \subseteq \mathbb{Z}$，如果 $T^{n_i}x \to x'$，则必有 $T^{-n_i}x' \to x$.

定理 4.2.5 *设 (X,T) 为可逆动力系统，$x \in X$. 则点 x 为 Δ^* 回复的当且仅当它为几乎自守点.*

证明 设 x 为几乎自守的，下证它为 Δ^* 回复的，即证对 x 的任意邻域 V 以及任意序列 $\{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$，存在 $k > j$，使得 $T^{n_k - n_j}x \in V$. 不妨设 $T^{n_k}x$ 收敛且 $T^{n_k}x \to x'$.

则由它为几乎自守的, 就有 $T^{-n_k}x' \to x$. 取 j 使得 $T^{-n_j}x' \in V$. 又因为 $T^{n_k} \to x'$, 所以取 k 充分大就有 $T^{-n_j}(T^{n_k}x) \in V$.

反之, 设 x 为 Δ^* 回复的. 设 $T^{n_k}x \to x'$ 且 $T^{-n_k}x' \to x''$. 如果 $x \neq x''$, 则存在分离它们的邻域 V_1 和 V_2. 由于 $N(x, V_1)$ 为 Δ^* 的, 它与 $\{n_k - n_j : k > j\}$ 的交为 Δ 集, 并且得到的 Δ 集由 $\{n_k\}$ 的子列 $\{n'_k\}$ 决定. 因为 $T^{n_k}x \to x'$ 且 $T^{-n_k}x' \to x''$, 所以自然仍有 $T^{n'_k}x \to x'$ 且 $T^{-n'_k}x' \to x''$. 存在 j 使得 $T^{-n'_j}x' \in V_2$. 又因为 $T^{n'_k}x \to x'$, 所以取 $k > j$ 充分大使得 $T^{-n'_j}(T^{n'_k}x) \in V_2$. 根据 $\{n'_k\}$ 的定义知 $T^{n'_k - n'_j}x \in V_1$, 这与 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ 矛盾. 所以 $x = x''$, 即 x 为几乎自守的. □

注记 4.2.6 几乎自守性是一类非常重要的动力学性质. 如果一个系统有稠密的几乎自守点, 那么称为**几乎自守系统**. Veech 证明了这类系统具有非常好的结构: 一个极小系统为几乎自守的当且仅当它为极小等度连续系统的几乎一对一扩充 (Veech, 1965).

Furstenberg 定义点 x 为**regular 的**是指存在不变测度 μ, 使得 x 为 μ 的 generic 点, 并且对 x 的任意邻域 U, 有 $\mu(U) > 0$(Furstenberg, 1961). 对于几类密度集, 首先, 由定义不难推出:

定理 4.2.7 设 (X, T) 为系统. 则 $x \in X$ 为 regular 点当且仅当对 x 的任意邻域 U, $N(x, U)$ 为正上密度集.

证明留作习题.

下面是著名的 Furstenberg 对应定理 (其中 (II) 见定理 2.3.5):

定理 4.2.8 记 $\mathcal{G}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 全体有限集的集合. 则

(I) (1) 设 $E \subseteq \mathbb{Z}_+$ 为 piecewise syndetic 集合, 则存在极小系统 (X, T) 以及非空开集 U, 使得

$$\left\{\alpha \in \mathcal{G} : \bigcap_{n\in\alpha} T^{-n}U \neq \varnothing\right\} \subseteq \left\{\alpha \in \mathcal{G} : \bigcap_{n\in\alpha} (E-n) \neq \varnothing\right\};$$

(2) 对任意极小系统 (X, T), 存在 syndetic 子集 E, 使得

$$\left\{\alpha \in \mathcal{G} : \bigcap_{n\in\alpha} (E-n) \neq \varnothing\right\} \subseteq \left\{\alpha \in \mathcal{G} : \bigcap_{n\in\alpha} T^{-n}U \neq \varnothing\right\}.$$

(II) (1) 如果 $E \subseteq \mathbb{Z}_+$ 且 $BD^*(E) > 0$, 则存在保测系统 $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ 以及 $A \in \mathcal{A}$, 使得 $\mu(A) = BD^*(E)$, 且对任意 $\alpha \in \mathcal{G}$, 成立

$$BD^*\left(\bigcap_{n\in\alpha} (E-n)\right) \geqslant \mu\left(\bigcap_{n\in\alpha} (T^{-n}A)\right);$$

(2) 设 $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ 为保测系统, $A \in \mathcal{A}$ 且 $\mu(A) > 0$. 则存在 $E \subseteq \mathbb{Z}_+$, 使得 $\overline{d}(E) \geqslant \mu(A)$ 且

$$\left\{\alpha \in \mathcal{G} : \bigcap_{n\in\alpha}(E-n) \neq \varnothing\right\} \subseteq \left\{\alpha \in \mathcal{G} : \mu\left(\bigcap_{n\in\alpha}(T^{-n}A)\right) > 0\right\}.$$

Furstenberg 证明了他的多重回复定理：设 $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ 为可逆保测系统, $A \in \mathcal{A}$ 且 $\mu(A) > 0$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A \cap \cdots \cap T^{-kn}) > 0$$

(Furstenberg, 1961; Furstenberg, 1981; Furstenberg-Katznelson, 1978; Furstenberg etc., 1982). 于是, 根据上面的 Furstenberg 对应定理就得到著名的Szemerédi **定理**：任何正上 Banach 密度集包含了任意长的算术级数列. 这些内容已在第 2 章中详细讨论过. Furstenberg 关于 Szemerédi 定理的遍历证明开创了动力系统的一个崭新的方向：遍历 Ramsey 理论. 现在这套理论中有着许多深刻而有意义的结论 (Bergelson, 1996; Bergelson-McCutcheon, 2000; Bergelson-Leibman, 1996; Furstenberg, 1981; Furstenberg-Katznelson, 1991; McCutcheon, 1999).

称 A 为**van der Waerden 集**是指它包含了任意长的算术级数列. 记全体 van der Waerden 集为 $\mathcal{F}_{\text{vdw}}$. 于是, Szemerédi 定理就是说任意正上 Banach 密度集为 van der Waerden 集, 即 $\mathcal{F}_{\text{pubd}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{vdw}}$.

最后我们回忆两个与回复性有关的族.

定义 4.2.9 (1) 集合 R 称为**(拓扑) 回复集**是指, 对任意动力系统 (X, T), 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x \in X$ 及 $n \in R$, 使得 $d(T^n x, x) < \varepsilon$. 全体回复集记为 $\mathcal{R}_T$. 等价地, R 为回复集当且仅当对任意极小系统 (X, T) 以及 X 的任意非空开集 U, 存在 $n \in R$, 使得 $U \cap T^{-n}U \neq \varnothing$.

(2) 集合 R 称为**Poincaré 序列**或**测度回复集**是指对任意保测系统 $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ 以及其任意满足 $\mu(A) > 0$ 的 $A \in \mathcal{A}$, 存在 $n \in R$, 使得 $\mu(A \cap T^{-n}A) > 0$. 全体 Poincaré 序列记为 $\mathcal{R}_M$.

根据定理 1.3.13 及定理 2.5.4 有

命题 4.2.10 (1) $R \in \mathcal{R}_M$ 当且仅当对任意满足 $BD^*(E) > 0$ 的 E, 成立 $R \cap (E - E) \neq \varnothing$;

(2) $R \in \mathcal{R}_T$ 当且仅当对任意 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 集 E, 成立 $R \cap (E - E) \neq \varnothing$.

根据前面的符号, 上述命题即为 $\mathcal{R}_M = \Delta^*(\mathcal{F}_{\text{pubd}})$; $\mathcal{R}_T = \Delta^*(\mathcal{F}_{\text{ps}})$. 由于极小集必为 E 系统, 所以 Poincaré 序列必为回复集. Kriz 在 1987 年证明了存在回复集但不是 Poincaré 序列的例子, 即 $\mathcal{R}_M \subsetneq \mathcal{R}_T$(Katznelson, 2001; Weiss, 2000b).

最后归纳上面得到的族，它们有如下关系 (其中 $\mathcal{F}_{\text{cen}}$ 为由全体中心集组成的族)：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\text{cf}} &\subseteq \mathcal{F}^*_{\text{vdw}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{lbd1}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{ts}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{t}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{cen}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{ip}} \subseteq \Delta \\ &\subseteq \mathcal{R}_M = \Delta^*(\mathcal{F}_{\text{pubd}}) \subseteq \mathcal{R}_T = \Delta^*(\mathcal{F}_{\text{ps}}) \subseteq \mathcal{F}_{\text{inf}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\text{cf}} &\subseteq \Delta(\mathcal{F}_{\text{ps}}) \subseteq \Delta(\mathcal{F}_{\text{pubd}}) \subseteq \Delta^* \subseteq \mathcal{F}^*_{\text{ip}} \\ &\subseteq \mathcal{F}^*_{\text{cen}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{s}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{ps}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{pubd}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{vdw}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{inf}}.\end{aligned}$$

习　题　4.2

1. 完成定理 4.2.8(I) 的证明.

2. 说明本节最后所列的包含关系.

3. 证明 $\mathcal{R}_M$ 与 $\mathcal{R}_T$ 均有 Ramsey 性.

4. 证明以下集合为 Poincaré 序列：

(1) 正上半 Banach 密度为 1 集;

(2) $a\mathbb{N}$;

(3) $E-E$, 其中 E 为无限集;

(4) IP 集.

5. 对族 $\mathcal{F}$, 定义 $p\mathcal{F}=\{A:(\exists F\in\mathcal{F})(\forall N\in\mathbb{N})(\exists a_N\in\mathbb{N})\text{s.t.}a_N+(F\cap[1,N])\subseteq A\}$, 称 $p\mathcal{F}$ 中元素为**分段 $\mathcal{F}$ 集**. 易见 $p(\mathcal{F}_{\text{s}})=\mathcal{F}_{\text{ps}}$; 分段正上密度集为正上 Banach 密度集. 设 $F\subseteq\mathbb{Z}_+$, 证明：

(1) F 为分段 IP 集的当且仅当对任何动力系统 (X,T) 及 $x\in X$ 在 $\overline{T^Fx}$ 中有回复点;

(2) $F\in\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 的当且仅当对任何动力系统 (X,T) 及 $x\in X$ 在 $\overline{T^Fx}$ 中有极小点;

(3) F 为正上半 Banach 密度的当且仅当对任何动力系统 (X,T) 及 $x\in X$ 在 $\overline{T^Fx}$ 中存在 regular 点, 即在 $\overline{T^Fx}$ 中存在相对于某不变测度 μ 的 generic 点 y, 且满足 $y\in\text{supp}\mu$.

6. 设 X 为紧致度量空间, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{G}}$ 为 X 中的 $\mathcal{G}$ 序列. 如果对于 IP 环 $\mathcal{F}$, 极限 $\text{IP-}\lim\limits_{\alpha\in\mathcal{F}}x_\alpha=x$ 是指对于 x 的邻域 U, 存在 $\beta\in\mathcal{G}$, 使得任意满足 $\alpha>\beta$ 的 $\alpha\in\mathcal{G}$, 有 $x_\alpha\in U$. 证明：对于任意 X 中 $\mathcal{G}$ 序列 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{G}}$ 以及任意 IP 环 $\mathcal{F}$, 存在 IP 子环 $\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F}$ 及 $x\in X$, 使得 $\text{IP-}\lim\limits_{\alpha\in\mathcal{F}'}x_\alpha=x$ 成立. 并证明上述命题与 Hindman 定理等价.

7. 设 Y 为半群, 称一个 $\mathcal{G}$ 序列定义了一个**IP 系统**是指对任意 $\alpha=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\in\mathcal{F}$, 有 $y_\alpha=y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_k}$. IP 系统可以视为半群的一种推广. 易见, 如果 $\alpha\cap\beta=\varnothing$, 就有 $y_{\alpha\cup\beta}=y_\alpha y_\beta$. 如果 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{G}}$ 为 $C(X,X)$ 中的 IP 系统, 经常直接称 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{G}}$ 为空间 X 上的 IP 系统. 例如, 对于任何 IP 集 $\{n_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{G}}$, $T_\alpha=T^{n_\alpha}$ 就定义了一个 IP 系统.

设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{G}}$ 为空间 X 上的 IP 系统. 证明：存在 $x,y\in X$ 及 IP 环 $\mathcal{F}$, 使得 $\text{IP}-\lim\limits_{\alpha\in\mathcal{F}}T_\alpha x=y$, 并且 $\text{IP-}\lim\limits_{\alpha\in F}T_\alpha y=y$.

8. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{Z}$ 子集族, 称之为**剖分正则的** 指对 $\mathbb{Z}$ 任意有限剖分, 必有其中剖分元包含 $\mathcal{A}$ 中元. 证明：如果 $\mathcal{A}$ 为平移不变的, 那么它为剖分正则的当且仅当每个 syndetic 集包含

了 $\mathcal{A}$ 中元素. 如果 $\mathcal{A}$ 为平移不变的且其中元素均有限, 那么它为剖分正则的当且仅当每个 piecewise syndetic 集包含了 $\mathcal{A}$ 中元素.

9. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{Z}$ 子集族, 称之为**密度正则的** 指对任意具有正上密度的集合均包含 $\mathcal{A}$ 中某元. 证明:

(1) 任何密度正则的子集族为剖分正则的;

(2) 如果 $\mathcal{A}$ 为平移不变的且其中元素均有限, 那么它为密度正则的当且仅当每个具有正上 Banach 密度的集合包含了 $\mathcal{A}$ 中元素;

(3) 设 $\mathcal{A}$ 定义为: $F \in \mathcal{A}$ 当且仅当 F 为某 IP 集的平移. 证明这个集合族为剖分正则但不是密度正则的. 提示: 令 $E = \bigcup_{k=0}^{\infty}(k + 3^{k+2}\mathbb{Z})$ 及 $F = (-E \cup E)^c$. 证明 $\bar{d}(F) \geqslant 2/3$ 且不包含任何 $\mathcal{A}$ 中元.

10. 证明: R 为回复集当且仅当对任意有限剖分 $\mathbb{Z} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, 存在剖分元 C_i, 使得 $R \cap (C_i - C_i) \neq \varnothing$.

11. 证明: (a) R 为回复集当且仅当集合族 $\mathcal{A} = \{(a, a+r) : a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}\}$ 为剖分正则的;

(b) R 为 Poincaré 序列当且仅当集合族 $\mathcal{A} = \{(a, a+r) : a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}\}$ 为密度正则的.

12. (中心集基本定理) 设 S 为 $\mathbb{N}$ 的中心集以及 $m > 1$ 为任意整数. 那么对 $\mathbb{Z}^m$ 中任意 IP 系统 $\{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{G}}$, 存在 IP 环 $\mathcal{F}^{(1)}$ 以及 IP 系统 $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}^{(1)}} \subseteq \mathbb{N}$, 使得 $\overline{h}_\alpha^m + v_\alpha \in S^m, \forall \mathcal{F}^{(1)}$, 其中 $S^m = \underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{m\text{次}}$ 以及 $\overline{h}^m = (h, h, \cdots, h) \in \mathbb{N}^m$.

§4.3 一些定理的构造性证明

本节尝试给出一些重要结论的构造性证明, 其中包括对任何点都能在其轨道闭包中找到极小点使得与其 proximal 等结论. 这些定理在前面用 Ellis 半群等工具已经给过证明. 我们的证明尽量用构造性的方式, 一方面是为了体现族的作用, 另一方面希望这样做能对定理有更为深刻的理解.

引理 4.3.1 设 (X,T) 为动力系统. 设 $x \in \mathrm{Rec}(T)$ 且 $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 x 的一组邻域, 那么存在某个 IP 集合 $\mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=1}^{\infty})$, 使得 $\mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=n}^{\infty}) \subset V_n$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 成立.

证明与定理 1.2.13 证明类似, 请读者自证.

对 $\mathbb{Z}_+$ 的子集 F 和 $x \in X$, 定义 $T^F(x) = \{T^i(x) : i \in F\}$.

引理 4.3.2 设 (X,T) 为动力系统及 $Q = \mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=1}^{\infty})$. 对任意 $x \in X$, 存在某 $y \in \overline{T^Q x} \cap \mathrm{Rec}(T)$ 以及 $\{p_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得对 y 的任意邻域 U, 存在某 j, 使得 $\mathrm{FS}(\{p_{n_i}\}_{i=j}^{\infty}) \subseteq N(y,U)$ 且 $(x,y) \in P(X,T)$.

证明 设 $K_1 = \overline{T^Q x}, P_1 = Q$ 以及 $p_{n_i} \in \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$. 那么

$$P_1 \cap (P_1 - p_{n_1}) \supseteq \mathrm{FS}(\{p_i\}_{i \neq n_1}).$$

于是

$$K_1 \cap T^{-p_{n_1}} K_1 \supseteq \overline{T^{P_1 \cap (P_1 - p_{n_1})} x}.$$

令 $K_1 \cap T^{-p_{n_1}} K_1 = \bigcup_{i=1}^{r_1} K_{1,i}$, 其中 $K_{1,i}$ 为紧致的且 $\mathrm{diam} K_{1,i} < \frac{1}{2}$. 于是有

$$P_1 \cap (P_1 - p_{n_1}) = \bigcup_{i=1}^{r_1} \{n \in P_1 \cap (P_1 - p_{n_1}) : T^n x \in K_{1,i}\}.$$

根据 Hindman 定理, 存在 j, 使得 $P_2 = \{n \in P_1 \cap (P_1 - p_{n_1}) : T^n x \in K_{1,j}\}$ 为 $P_1 \cap (P_1 - p_{n_1})$ 的 IP 子集. 令 $K_2 = K_{1,j}$. 易见 $K_2 \subseteq K_1$, $\mathrm{diam} K_2 < \frac{1}{2}$, $T^{p_{n_1}} K_2 \subseteq K_1$ 且 $T^{P_2} x \subseteq K_2$.

归纳地, 我们得到 $\{p_{n_i}\} \subseteq \{p_i\}$, IP 集 $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \cdots$ 以及紧子集 $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$, 使得 $\mathrm{diam} K_j < \frac{1}{j}$, $p_{n_j} \in P_j$, $T^{p_{n_j}} K_{j+1} \subseteq K_j$ 且 $T^{P_j} x \subseteq K_j$. 令 $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$. 容易验证它满足条件. □

命题 4.3.3 设 (X,T) 为动力系统. 如果 $z \in \mathrm{Rec}(T)$, 那么对任意 $x \in X$, 存在某 $y \in \overline{\mathrm{orb}(x)}$, 使得 (z,y) 为 $X \times X$ 的回复点.

证明 设 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 z 的邻域基, 由引理 4.3.1, 存在某 IP 集合 $\mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=1}^{\infty})$, 使得 $\mathrm{FS}(\{p_i\}_{i=n}^{\infty}) \subset V_n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 设 y 为如引理 4.3.2 中所得到的回复点. 那么对 z, y 的任意邻域 U, V, 有

$$N((z,y), U \times V) = N(z,U) \cap N(y,V) \neq \varnothing.$$ □

定理 4.3.4 (Auslander-Ellis) 设 (X,T) 为动力系统. 则对任意 $x \in X$, 存在某极小点 $y \in \overline{\mathrm{orb}(x)}$, 使得 (x,y) 为 proximal 的.

证明 首先 $\overline{\mathrm{orb}(x)}$ 中存在极小集合 Y, 见定理 1.3.3.

我们将找到一个 thick 集合 A, 使得 $\overline{T^A x} \setminus T^A x \subseteq Y$ 成立. 于是, 如在 A 中取某 IP 子集 Q, 由引理 4.3.2, 存在某 $y \in \overline{T^Q x} \cap R(X)$, 使得 $(x,y) \in P(X,T)$. 由于 $y \in \overline{T^Q x} \setminus T^Q x \subseteq Y$, y 为极小点, 这样就完成了证明.

设 $V_n = \left\{z \in X : d(z,Y) < \frac{1}{n}\right\}$, 则 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Y 的邻域基. 令 $\delta_n > 0$, 使得当 $d(x',x'') < \delta_n$ 时, 有 $d(T^i x', T^i x'') < \frac{1}{n}, i = 0, 1, \cdots, n-1$ 成立. 因为 $Y \subseteq \overline{\mathrm{orb}(x)}$, 所以存在某 i_n, 使得 $d(T^{i_n} x, Y) < \delta_n$. 因为 Y 为不变集, 所以 $d(T^{i_n+j} x, Y) < \frac{1}{n}, j = 0, 1, \cdots, n-1$. 设 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{i_n + j\}_{j=0}^{n-1}$. 由上面的构造, 有 $\overline{T^A x} \setminus T^A x \subseteq Y$. □

注记 4.3.5 上面 Auslander-Ellis 定理的证明用到了 Hindman 定理, 而定理 3.3.16 的证明依赖于 Ellis 半群理论.

习 题 4.3

证明引理 4.3.1.

§4.4 族传递性与族混合性

定义 4.4.1 设族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\text{inf}}$, 系统 (X,T) 称为$\mathcal{F}$ **传递**的是指对 X 的任意非空开集 U 及 V, $N(U,V) \in \mathcal{F}$ 成立. 称 (X,T) 为$\mathcal{F}$ **混合**的是指 $(X \times X, T \times T)$ 为 $\mathcal{F}$ 传递的.

当 $\mathcal{F}$ 取 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 时, $\mathcal{F}$ 传递即为传递性, 而 $\mathcal{F}$ 混合即为弱混合; 当 $\mathcal{F}$ 取 $\mathcal{F}_{\text{cf}}$ 时, $\mathcal{F}$ 传递与 $\mathcal{F}$ 混合是同一概念, 即强混合.

设族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\text{inf}}$, 系统 (X,T) 称为$\mathcal{F}$ **中心的**是指对任意 X 的非空开集 U, 成立 $N(U,V) \in \mathcal{F}$. 我们经常用以下定理来判别 $\mathcal{F}$ 传递性.

命题 4.4.2 设 $\mathcal{F}$ 为真的、平移不变的族, 那么系统 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 传递的当且仅当它为传递的并且为 $\mathcal{F}$ 中心的.

证明 由于 $\mathcal{F}$ 为真的且平移不变的, 所以 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\text{inf}}$. 于是, 如果 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 传递的, 那么它为传递的. 由定义, 它为 $\mathcal{F}$ 中心是显然的.

反之, 如果 U, V 为 X 的非空开集, 那么由传递性, 存在 $i \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $W = U \cap T^{-i}V \neq \varnothing$. 易验证:

$$N(U,V) \supseteq N(W,W) + i.$$

于是, 由 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 中心的以及 $\mathcal{F}$ 为平移不变的, 有 $N(U,V) \in \mathcal{F}$, 即 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 传递的. □

一类重要的族传递系统为前面提到的拓扑遍历性. 一个系统 (X,T) 称为**拓扑遍历的**是指它为 syndetic 传递的, 即 $\mathcal{F}_{\text{s}}$ 传递的, 简记为 TE 的. 由推论 3.2.7 的证明, 有 E 系统 (从而 M 系统) 为拓扑遍历的. 由于 syndetic 族与 thick 族互为对偶族, 所以任何拓扑遍历系统与弱混合系统的乘积系统为传递的.

在给出一般的族混合刻画之前, 我们先重述前面关于弱混合的若干刻画 (参见定理 1.4.5):

定理 4.4.3 设 (X,T) 为动力系统, 则以下命题等价:

(1) (X,T) 为弱混合的, 即 $(X \times X, T \times T)$ 传递;

(2) 对 X 的任意非空开集 U, V, 有 $N(U,U), \cap N(U,V) \in \mathcal{F}_{\text{inf}}$;

(3) 对 X 的任意非空开集 U_1, U_2, V_1, V_2, 存在非空开集 U, V, 使得 $N(U,V) \subset N(U_1,V_1) \cap N(U_2,V_2)$;

(4) $\{N(U,V) | U, V \text{ 为 } X \text{ 非空开集}\}$ 生成一个滤子;

(5) (X,T) 为 $\mathcal{F}_{\text{t}}$ 传递的.

由以上定理, 我们就不难得到族混合的刻画:

定理 4.4.4 设 (X,T) 为动力系统, $\mathcal{F}$ 为满的族, 则以下命题等价:

(1) (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 混合的;

(2) (X,T) 为 $\tau\mathcal{F}$ 传递的;

(3) (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 传递且为弱混合的;

(4) 存在平移不变的滤子 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ 使得 (X,T) 为 $\mathcal{F}'$ 传递的.

证明　(1) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Rightarrow$ (4) 由上定理 (4), 由 $\{N(U,V)|U,V$为 X 非空开子集$\}$ 生成的滤子即为所求.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $\mathcal{F}'$ 为滤子, 于是 $N(U_1\times U_2, V_1\times V_2) = N(U_1,V_1)\cap N(U_2,V_2)\in\mathcal{F}'$. 这样, $(X\times X, T\times T)$ 为 $\mathcal{F}'$ 传递的, 进而 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 混合的.

(4) $\Rightarrow$ (2) 平移不变的滤子为 thick 的, 所以 $\mathcal{F}' = \tau\mathcal{F}' \subset \tau\mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 由于 $\tau\mathcal{F}\subset\mathcal{F}$, (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 传递的. 且 $\tau\mathcal{F}\subset\tau\mathcal{F}_{\text{inf}}$, 于是由定理 4.4.3(5), (X,T) 为弱混合的. □

推论 4.4.5　设 (X,T) 为动力系统且 $\mathcal{F}$ 为满的族. 如果 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 混合的, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$, $(X^n, T^{(n)})$ 为 $\mathcal{F}$ 混合的. 尤其, 弱混合系统为完全传递的.

除强、弱混合外, 一种重要的混合性为 mild 混合. 关于 mild 混合, 在 §1.4 已经详细讨论过, 我们仅在这里回顾一下它的一些性质. 首先, 一个动力系统 (X,T) 为 mild 混合的是指它弱不交于任何传递系统. 由定义, mild 混合系统弱不交于自己, 于是必为弱混合的. 因为强混合为 $\mathcal{F}_{\text{cf}}$ 传递, 所以弱不交于所有传递系统, 于是必为 mild 混合的. 关于 mild 混合严格介于强、弱混合之间, 我们将在第 8 章给出具体例子, 也可参见下面的注记 4.5.6.

前面定理 1.4.11 给出了 mild 混合的回复时间集:

定理 4.4.6　设 (X,T) 为动力系统. 则 (X,T) 为 mild 混合的当且仅当 (X,T) 为 $\Delta^*(\mathcal{F}_{\text{ip}})$ 传递的.

下面刻画扩散和强扩散系统的回复时间集. 首先, 回忆它们的定义. 称系统 (X,T) 为**扩散的**是指它弱不交于所有极小系统; 而**强扩散**是指它弱不交于全体 E 系统. 因为极小系统为 E 系统, 所以强扩散系统为扩散的.

定理 4.4.7　设 (X,T) 为动力系统. 则以下命题等价:

(1) (X,T) 为强扩散系统;

(2) 对 X 的每对非空开集 U,V, $N(U,V)\in\Delta^*(\mathcal{F}_{\text{upbd}})$;

(3) 对 X 的每对非空开集 U,V, $N(U,V)$ 为 Poincaré 序列.

证明　由定理 2.5.4 或命题 4.2.10, 知 (2) 和 (3) 等价.

现在证 (2) 蕴含 (1). 假设对 X 的每对非空开集 U,V 和每个正上半 Banach 密度集 $S\subset\mathbb{Z}_+$, 有 $N(U,V)\cap(S-S)\neq\varnothing$ 成立. 显然, $N(U,V)$ 为无限集, 这样, (X,T) 为传递系统. 设 (Y,W) 为 E 系统, U_1,V_1 为 Y 的非空开集. 假设 y 为 V_1 中的传递点, 那么存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得 $y\in V_1$ 且 $W^{n_0}(y)\in U_1$. 因此存在 y 的开邻域 $Q\subset V_1$ 满

足 $W^{n_0}(Q) \subset U_1$. 这说明 $N(V_1,U_1) \supset N(Q,Q)+n_0$, $N(Q,Q)=N(y,Q)-N(y,Q)$. 由定理 2.6.2, $N(y,Q)$ 为正上半 Banach 密度集.

这样, 由假设知 $N(U,T^{-n_0}(V)) \cap N(Q,Q) \neq \varnothing$, 因此 $(n_0+N(U,T^{-n_0}(V))) \cap (n_0+N(Q,Q)) \neq \varnothing$. 注意到 $N(U,T^{-n_0}(V)) \subset N(U,V)-n_0$, 有 $N(U,V) \cap N(U_1,V_1) \neq \varnothing$. 从而 $N(U\times U_1,V\times V_1)=N(U,V)\cap N(U_1,V_1)\neq\varnothing$, 即 (X,T) 为强扩散系统.

现在证明 (1) 蕴含 (2). 假设 (X,T) 为强扩散系统. 如果 (Y,W) 为 E 系统, 有 $N(U\times B,V\times B)=N(U,V)\cap N(B,B)\neq\varnothing$, 其中 U,V 为 X 的非空开集, B 为 Y 的非空开集. 对给定正上半 Banach 密度集 $S\subset\mathbb{Z}_+$, 定义 $x\in\Sigma=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, 使得 $x_i=1$ 当且仅当 $i\in S$, 把 x 称为 S 在 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 的指示函数. 令 Y_1 为 x 在转移 σ 下的轨道闭包, $A(1)=\{y\in Y:y(0)=1\}$. 现在根据定理 2.5.3, 存在 σ 不变测度 μ 满足 $\mu(A(1))>0$. 由遍历分解定理知, 存在遍历测度 ν, 使得 $\nu(A(1))>0$. 令 Y 为 ν 的支撑, $B=Y\cap A(1)$. 注意到 B 为 Y 的开集. 有

$$S-S\supset\{n\in\mathbb{Z}_+:\nu(\sigma^{-n}(B)\cap B)>0\}\supset N(B,B).$$

因 (Y,W) 为 E 系统, $N(U,V)\cap N(B,B)\neq\varnothing$, 进而 $N(U,V)\cap(S-S)\neq\varnothing$. □

类似于定理 4.4.7, 扩散系统的回复时间集有如下刻画.

定理 4.4.8 设 (X,T) 为动力系统. 则以下命题等价:

(1) (X,T) 为扩散系统;

(2) 对 X 的每对非空开集 U,V, $N(U,V)\in\Delta^*(\mathcal{F}_{\mathrm{ps}})=\Delta^*(\mathcal{F}_{\mathrm{s}})$;

(3) 对 X 的每对非空开集 U,V, $N(U,V)$ 为回复集.

证明 由定理 1.3.13 或命题 4.2.10, 我们知 (2) 和 (3) 等价.

现在证 (2) 蕴含 (1). 假设对 X 的每对非空开集 U,V 和每个 syndetic 集 $S\subset\mathbb{Z}_+$, 有 $N(U,V)\cap(S-S)\neq\varnothing$ 成立. 设 (Y,W) 为极小系统. 由定理 1.3.5, 如果 $y\in Y$ 和 Q 为 y 的邻域, 则 $N(y,Q)$ 为 syndetic 集. 因此, 类似于定理 4.4.7 证明的第一部分, 对 X 的每对非空开集 U,V 和 Y 的每对非空开集 U_1,V_1, 有 $N(U\times U_1,V\times V_1)\neq\varnothing$ 成立, 即 (X,T) 为扩散系统.

最后, 我们证明 (1) 蕴含 (2). 假设 (X,T) 为扩散系统. 那么如果 (Y,W) 为极小系统, 则有 $N(U\times B,V\times B)=N(U,V)\cap N(B,B)\neq\varnothing$, 其中 U,V 为 X 的非空开集, B 为 Y 的非空开集. 设 $S\subset\mathbb{Z}_+$ 为 syndetic 集, 并且 x 为它在 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 的指示函数. 令 Y 为 x 轨道闭包中的极小集, $B=\{y\in Y:y(0)=1\}$. S 为 syndetic 集这一事实蕴含着 B 非空且 $N(B,B)\subset S-S$. 因 (Y,W) 为极小系统, $N(U,V)\cap N(B,B)\neq\varnothing$, 进而 $N(U,V)\cap(S-S)\neq\varnothing$. □

习　题　4.4

1. $\mathcal{F}$ 传递性与混合性为通有性质, 即在因子保持的、几乎一对一扩充保持以及逆极限下保持的.

2. 设 (X,T) 为动力系统, $(2^X,T)$ 为相应的超空间系统, $\mathcal{F}$ 为 full 族. 则以下等价:

(1) (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 混合的;

(2) $(2^X,T)$ 为 $\mathcal{F}$ 混合的;

(3) $(2^X,T)$ 为 $\mathcal{F}$ 传递的.

3. 设 $W\subset\mathbb{Z}_+$, 如果对每个等度连续系统 (Y,ρ,T) 和 $\varepsilon>0$, 存在 $y_0\in Y$ 和 $n\in W\setminus\{0\}$, 使得 $\rho(T^n(y_0),y_0)<\varepsilon$ 成立, 则称 $W\subset\mathbb{Z}_+$ 为**相对于群旋转的回复序列**.

系统称为**弱扩散的** 是指它与所有极小等度连续系统弱不交. 设 (X,T) 为动力系统, 证明以下命题等价:

(a) (X,T) 为弱扩散系统;

(b) $N(U,V)\cap(S-S)\neq\varnothing$ 对 X 的每对非空开集 U,V 和每个具有形式 $S=N(y_0,B)$ 成立, 其中 (Y,S) 为极小等度连续系统, $y_0\in Y$, B 为 y_0 的邻域;

(c) 对 X 的每对非空开集 U,V, $N(U,V)$ 为相对于群旋转的回复序列.

§4.5　弱不交性与对偶性

Furstenberg(1967) 用类似于两个数互素的概念在遍历论与拓扑动力系统中引入了两个系统"不交"的概念以分析两个系统的动力学性质是否相差很大. 稍后, Peleg(1972) 引入略弱的概念"弱不交性". 现在, 无论在遍历理论还是在拓扑动力系统中, 不交与弱不交的思想已经得到极大的发展与应用 (Auslander, 1988; Glasner, 2003; Rudolph, 1990). 我们在上一节已经从一些具体的例子研究了弱不交性与系统回复时间集的联系, 而在这一节我们将更为深入地研究弱不交性, 主要讨论对偶性质. 我们将在第 9 章详细讨论不交性, 并给出不交性与弱不交性的关系.

称两个系统为**弱不交的**是指它们的乘积系统为传递的. 如系统 (X,T) 与 (Y,g) 弱不交就记之为 $(X,T)\curlywedge(Y,g)$. 设 $\mathcal{F}$ 为满的族, 那么由对偶的定义, 任何 $\mathcal{F}$ 传递的系统与 $k\mathcal{F}$ 传递的系统为弱不交的.

设 P 为动力学性质, 以 $(X,T)\in P$ 来记系统 (X,T) 有性质 P, 即也用 P 表示具有性质 P 的所有动力系统全体. 记 $P^{\curlywedge}$ 为与所有具有性质 P 系统弱不交的系统全体. 首先有以下性质 (留作习题):

性质 4.5.1　*设 P 为强于传递性的性质, 则*

(1) $P_1\subset P_2\Longrightarrow P_2^{\curlywedge}\subset P_1^{\curlywedge}$;

(2) $(P^{\curlywedge})^{\curlywedge}\supset P$;

(3) $P^{\curlywedge}=((P^{\curlywedge})^{\curlywedge})^{\curlywedge}$.

两个动力学性质 P_1 及 P_2 称为**互为对偶的**是指满足 $P_1^{\curlywedge}=P_2$ 且 $P_2^{\curlywedge}=P_1$. 于是, 如果 P 为强于传递性的性质, 就有 $P^{\curlywedge}$ 与 $P^{\curlywedge\curlywedge}$ 是互为对偶的. 一般而言, 要刻画 $P^{\curlywedge}$ 并不是一件容易的事情, 更不用说决定满足 $P^{\curlywedge\curlywedge}=P$ 的 P. 下面我们将 P 限制为 $\mathcal{F}$ 传递来考虑这些问题. 从 Weiss-Akin-Glasner 定理开始讨论. 这个定理首先由 Weiss 给出弱混合的情况, 而 Akin 及 Glasner 给出下形式:

定理 4.5.2 (Weiss-Akin-Glasner 定理) *设 $\mathcal{F}$ 为真的、平移不变的 thick 族. 则一个动力系统为 $k\mathcal{F}$ 传递的当且仅当它弱不交于所有 $\mathcal{F}$ 传递的系统.*

证明依赖于下面的 Weiss-Akin-Glasner 引理:

定理 4.5.3 (Weiss-Akin-Glasner 引理) *设 $\mathcal{F}$ 为真的, 平移不变的 thick 族且设 $A\in\mathcal{F}$. 则存在某 $\mathcal{F}$ 传递的系统 (X,T) 及 X 的开子集 U 满足 $N(U,U)=A\cup\{0\}$.*

证明 首先, 引入一些符号. P 称为一个词是指, P 为 $\mathbb{Z}_+$ 的一个有限子集且 $0\in P$. 称 $|P|=\max\{t:t\in P\}+1$ 为 P 的长度; 称 $\gamma(P)=\{t_1-t_2:t_1\geqslant t_2,t_1,t_2\in P\}$ 为 P 的间隔值集. 显然, $\gamma(P)$ 为一个词. 可以将 P 与 $\{0,1\}$ 符号的一个长度为 $|P|$ 有限词 $(x_0x_1\cdots x_{|P|-1})$ 等同视之: $x_k=1\Leftrightarrow k\in P$. 易见, 如果 P 出现在无限序列 $x\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 中时, 那么其中 "1" 之间的间隔数集就是 $\gamma(P)$, 并且在转移映射下, 这个间隔值集是不变的.

设 P 与 Q 为词, α 为非负整数, 定义

$$P\alpha Q=P\cup\{t+\alpha+|P|:t\in Q\}. \tag{4.5.1}$$

易知

$$\gamma(P\alpha Q)=\gamma(P)\cup\gamma(Q)\cup\{\alpha+t_2+(|P|-t_1):t_1\in P,t_2\in Q\}. \tag{4.5.2}$$

词 $P\alpha Q$ 相当于在词 P 后加上 α 个 0, 再加上 Q 得到的. 如果 $\alpha=0$, 则记 $PQ=P\alpha Q$.

设 $g^i:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$, $g^i(j)=i+j$. 于是 $g^i(A)=\{j\in\mathbb{Z}_+:i+j\in A\}$. 对词 P 及 $A\subseteq\mathbb{Z}_+$ 定义

$$g^{-P}(A)=\bigcap_{t\in P}g^{-t}(A)=\{s\in\mathbb{Z}_+:s+t\in A,\forall t\in P\}. \tag{4.5.3}$$

由于 $\mathcal{F}$ 为 thick 的, 如果 $A\in\mathcal{F}$, 那么对任意词 P 成立 $g^{-P}(A)\in\mathcal{F}$.

容易验证, 对词 P, Q 以及 $A\subseteq\mathbb{Z}_+$ 有断言:

$$\gamma(P)\cup\gamma(Q)\subseteq A\text{且}\alpha\in g^{-\gamma(PQ)}(A)\Rightarrow\gamma(P\alpha Q)\subseteq A. \tag{4.5.4}$$

特别地, 当 $P=Q$ 时, 有 $\gamma(P)\subseteq A$ 以及 $\alpha\in g^{-\gamma(PP)}(A)$ 蕴含 $\gamma(P\alpha P)\subseteq A$.

现在我们开始构造 (X,T). 设 $A \in \mathcal{F}$ 且 $0 \notin A$. 以下归纳定义 $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots$ 以及 $\mathbb{Z}_+$ 的子集列 $A^0 \supseteq A^1 \supseteq \cdots$ 且要求 $\gamma(B_n) \subseteq A$.

首先, 令 $B_0 = \{0\}$, $A^0 = g^{-\gamma(B_0B_0)}(A) = g^{-1}(A) = \{\alpha_i^0 : i = 0,1,\cdots\}$. 令 $B_1 = B_0\alpha_0^0B_0 = \{0, \alpha_0^0 + 1\}$, 则 $\gamma(B_1) = \{\alpha_0^0 + 1\} \subseteq A$. 假设已经定义好了 $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_n$ 且有 $\gamma(B_i) \subseteq A$, $i = 1,2,\cdots,n$. 则对 $n > 0$, 令

$$A^n = g^{-\gamma(B_nB_n)}(A) = \{\alpha_i^n : i = 0,1,2,\cdots\}. \tag{4.5.5}$$

此处假设 α_i^n 按递增顺序排列. 定义 B_{n+1} 为

$$\begin{aligned} B_{n+1} = &(B_n\alpha_0^0B_n)\beta_{n-1}^n(B_{n-1}\alpha_1^{n-1}B_{n-1})\beta_{n-2}^n \\ &\cdots\beta_2^n(B_2\alpha_{n-2}^2B_2)\beta_1^n(B_1\alpha_{n-1}^1B_1)\beta_0^n(B_0\alpha_n^0B_0). \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

以下选择参数 $\beta_0^n, \beta_1^n, \cdots, \beta_{n-1}^n$, 使得

$$\gamma(B_{n+1}) \subseteq A. \tag{4.5.7}$$

首先, 因为对 $i = 0,1,\cdots,n$, $\alpha_{n-i}^i \in A^i$ 以及归纳假设 $\gamma(B_i) \subseteq A$, 根据 (4.5.4) 有 $\gamma(B_i\alpha_{n-i}^iB_i) \subseteq A$. 下面开始选择 $\beta_i^n, i = 0,1,\cdots,n-1$. 令 $C_0 = B_0\alpha_n^0B_0$, $D_i = B_i\alpha_{n-i}^iB_i$, $i = 1,2,\cdots,n$. 取 $\beta_0^n \in g^{-\gamma(D_1C_0)}(A)$, 定义 $C_1 = D_1\beta_0^nC_0$. 则由 (4.5.4) 有 $\gamma(C_1) \subseteq A$. 按此方式逐个定义 C_i, 即如已定义 C_i, 使得 $\gamma(C_i) \subseteq A$, 那么选取 $\beta_i^n \in g^{-\gamma(D_{i+1}C_i)}(A)$, 再定义 $C_{i+1} = D_{i+1}\beta_i^nC_i$. 同样由 (4.5.4) 有

$$\gamma(C_{i+1}) \subseteq A. \tag{4.5.8}$$

最后取 B_{n+1} 为按此定义得到的 C_n.

观察 (4.5.6), 易得

$$|B_n| \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{4.5.9}$$

定义 $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 为所有 B_n 的并, 即

$$x_i = 1 \Leftrightarrow \text{对某个}n, i \in B_n. \tag{4.5.10}$$

右边等价于: $i \in B_n$ 对满足 $i \leqslant |B_n|$ 的所有 n 成立. 在 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 中定义开集 (也为闭集):

$$U(B_n) = \{y : \forall i \leqslant |B_n|, y_i = 1 \Leftrightarrow i \in B_n\}, \tag{4.5.11}$$

其中下标大于 $|B_n|$ 的数的选取是任意的. 易见有

$$U(B_0) \supsetneqq U(B_1) \supsetneqq U(B_2) \supsetneqq \cdots.$$

于是 $\bigcap_{i=1}^{\infty} U(B_n)=\{x\}$, 并且 $\{U(B_n):n=0,1,2,\cdots\}$ 为 x 的一组邻域基.

令 $X=\overline{\mathrm{orb}(g,x)}$, 其中 g 如前定义 (g 在 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 上作用即为左转移映射). 由于每个 B_n 对应的词在 x 中无限次出现, 这说明 x 为回复点. 如果设 $T=g|_X$, 那么 (X,T) 为一个以 x 为传递点的传递系统.

为方便, 下面仍将 X 的开集 $U(B_n)\cap X$ 记为 $U(B_n)$. 有

$$N(U(B_n),U(B_n))=\{t_1-t_2:t_1\geqslant t_2\in N(x,U(B_n))\}. \tag{4.5.12}$$

这是因为 $g^{-t}(U(B_n))\cap U(B_n)\neq\varnothing$ 当且仅当存在 t_2, 使得 $g^{t_2}(x)\in g^{-t}(U(B_n))\cap U(B_n)$.

在 x 中, 词 B_n 依次不断出现, 下面我们观察它们的间隔数. 由 (4.5.6), $B_n\alpha_i^n B_n$ 在 B_{n+i+1} 中出现, 于是 $\alpha_i^n+|B_n|$, $i=0,1,\cdots$ 为 x 中 B_n 与 B_n 的间隔数. 联合 (4.5.7) 式有

$$g^{|B_n|}(A^n)\cup\{0\}\subseteq N(U(B_n),U(B_n))\subseteq A\cup\{0\}. \tag{4.5.13}$$

尤其 $n=0$ 时, 因为 $A^0=g^{-1}(A)$ 和 $0\notin A$, 有 $g^{|B_0|}=g^1(g^{-1}(A))=A$. 由 (4.5.13) 即有

$$N(U(B_0),U(B_0))=A\cup\{0\}. \tag{4.5.14}$$

因为 (X,T) 为传递的且 $\mathcal{F}$ 为平移不变的, 于是要证明 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 传递的, 仅需说明它为 $\mathcal{F}$ 中心的即可. 由于 $g^{|B_n|}(A^n)=g^{|B_n|-\gamma(B_nB_n)}(A)\in\mathcal{F}$ 以及 $\mathcal{F}$ 为族, 根据 (4.5.13) 就有 $N(U(B_n),U(B_n))\in\mathcal{F}$. 于是 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 中心的, 进而也为 $\mathcal{F}$ 传递的. □

Weiss-Akin-Glasner 定理的证明 仅需证明如 (X,T) 不为 $k\mathcal{F}$ 传递, 则存在 $\mathcal{F}$ 传递系统 (Y,G), 使得 (X,T) 与 (Y,G) 不为弱不交的.

由于 (X,T) 不为 $k\mathcal{F}$ 传递, 存在非空开集 $U\subset X$, 使得 $N_T(U,U)\notin k\mathcal{F}$. 所以 $A=\mathbb{Z}_+\setminus N_T(U,U)\in\mathcal{F}$. 于是, 由 Weiss-Akin-Glasner 引理, 存在 $\mathcal{F}$ 传递系统 (Y,G) 及非空开集 $V\subset Y$, 使得 $N_G(V,V)=A\cup\{0\}$. 于是 $N_{T\times G}(U\times V,U\times V)=N_T(U,U)\cap N_G(V,V)=\{0\}\notin\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$. 此即 (X,T) 与 (Y,g) 不为弱不交. □

设 WM 为弱混合系统全体而 TE 为拓扑遍历系统全体. 那么由 Weiss-Akin-Glasner 定理有

$$\mathrm{WM}^{\curlywedge}=\mathrm{TE}.$$

命题 4.5.4 设 P 为动力学性质, 则

(1) 不存在性质 P 使得 $P=P^{\curlywedge}$;

(2) 如 $P^{\curlywedge}\subset P$, 则 $P^{\curlywedge}\subset\mathrm{WM}$.

证明 先证 (2). 设 $(X,T)\in P^{\curlywedge}$. 设 (X,T) 弱不交于所有有性质 P 的系统. 尤其有 $(X,T)\curlywedge(X,T)$. 所以 (2) 成立.

现设性质 P 满足 $P=P^{\curlywedge}$, 则有 $P\subset\mathrm{WM}$. 由 Weiss-Akin-Glasner 定理有

$$\mathrm{WM} \supset P = P^{\curlywedge} \supset \mathrm{WM}^{\curlywedge} = \mathrm{TE},$$

但存在非平凡的等度连续的极小系统, 它是 TE 但不 WM 的. 这和上式矛盾. □

命题 4.5.5 *系统 (X,T) 为传递的当且仅当它与所有强混合系统为弱不交的; 但弱不交于所有传递系统的系统不一定为强混合的.*

证明 前一个命题由 Weiss-Akin-Glasner 定理即得. 后一个命题由定理 4.4.6 及 Weiss-Akin-Glasner 引理易得. □

注记 4.5.6 *根据上面的命题以及 Weiss-Akin-Glasner 引理, 实际上我们已经能够说明 mild 混合严格介于强、弱混合之间.*

命题 4.5.5 说明, $(P^{\curlywedge})^{\curlywedge} \supset P$ 一般不能取等号. 下面给出一个互为对偶的传递性质.

定理 4.5.7 (1) *一个系统为弱混合的拓扑遍历系统当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\rm ts}$ 传递的;*
(2) *$\mathcal{F}_{\rm ps}$ 传递 $= (\mathcal{F}_{\rm ts}$传递$)^{\curlywedge}$;*
(3) *$(\mathcal{F}_{\rm ps}$传递$)^{\curlywedge} = \mathcal{F}_{\rm ts}$ 传递.*

证明 (1) 由定义 $\mathcal{F}_{\rm ts}$ 传递系统为弱混合的拓扑遍历系统. 另一方面, 设 (X,T) 为弱混合的拓扑遍历系统, 由定理 4.4.4, 它为 $\mathcal{F}_{\rm ts}$ 传递的.

(2) 因为 $\mathcal{F}_{\rm ts}$ 为平移不变的 thick 簇, 由 Weiss-Akin-Glasner 定理知 (2) 成立.

(3) 用 P 表示 $\mathcal{F}_{\rm ps}$ 传递性. 因弱混合系统具有性质 P, 根据 Weiss-Akin-Glasner 定理有

$$P^{\curlywedge} \subset (\text{弱混合性})^{\curlywedge} = \text{拓扑遍历性} \subset P.$$

这说明如果 $(X,T) \in P^{\curlywedge}$, 那么 (X,T) 为拓扑遍历的且 $(X\times X, T\times T)$ 为传递的. 进而 (X,T) 为弱混合的拓扑遍历系统, 即 $\mathcal{F}_{\rm ts}$ 传递的. □

习 题 4.5

1. 证明性质 4.5.1.
2. 试给出 Weiss-Akin-Glasner 定理的更多的应用.
3. 试证明 mild 混合严格介于强、弱混合之间.

§4.6 注 记

族的方法在动力系统的应用最早源于 Gottschalk-Hedlund(1955). 系统介绍族的方法的文献有 (Furstenberg, 1981; Akin, 1997), 前者给出了这种方法的最基本的思想, 写得非常引人入胜, 而后者以极度的系统与抽象著称. 近年来族的方法在动力系统研究中越来越重要 (Glanser, 2004; Glasner-Weiss, 2004; Huang-Ye, 2002b; Huang-Ye, 2004b; Huang etc., 2004c; Huang etc., 2005; Shao-Ye, 2004).

§4.1 关于族的概念与基本性质的处理主要取自 Akin(1997), 而关于 $\mathcal{F}_{\text{ip}}^*$ 滤子性的证明等内容取自 Furstenberg(1981). §4.2 许多结论的进一步研究可以参见 Furstenberg(1981), Glasner(1980) 等. §4.3 的内容是新的. §4.4 关于族传递与族混合的进一步讨论可以参见 Akin (1997), Glanser(2004), Huang etc.(2004c), Huang-Ye(2002b). §4.5Weiss-Akin-Glasner 定理的证明引自 Akin-Glasner(2001), 也可参见 Weiss(2000a). 关于对偶性的内容可以参见 Huang-Ye(2002b), Shao-Ye(2004).

第5章 熵

测度空间上的熵的概念是由 Kolmogorov 在 1958 年给出的, 之后 Adler 等人在拓扑空间上引入了拓扑熵的定义. 它是目前为止发现的一个重要的共扼不变量, 并得到广泛、深入地研究. 本章主要涉及熵的经典理论, 具体来说, §5.1 和 §5.2 将给出测度熵和拓扑熵的定义, 并研究它们的基本属性; §5.3 将介绍测度 Pinsker σ 代数和熵的 Pinsker 公式; §5.4 首先将引入测度 Kolmogorov 系统, 然后研究其基本属性并证明 Rohlin-Sinai 定理.

§5.1 拓 扑 熵

本节将介绍拓扑动力系统中一个重要的不变量 —— 拓扑熵. 它是由 Adler, Konheim 和 McAndrew(1965) 首先引入的, 后来 Dinabury(1971) 和 Bowen(1971) 使用分离集和张成集给出了一个新的等价定义. 拓扑熵在拓扑动力系统共轭分类中扮演了相当重要的角色, 反映了拓扑动力系统的复杂性程度.

设 X 为一非空集合, 通常用花写字母 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 等来表示 X 的覆盖. 设 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 为 X 的两个覆盖, $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的**交** $\mathcal{U}\vee\mathcal{V}$ 定义为由所有形如 $U\cap V$ 的非空集合形成的 X 的覆盖, 其中 $U\in\mathcal{U}$ 和 $V\in\mathcal{V}$. 类似地, 可以定义有限个覆盖 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ 的**交** $\mathcal{U}_1\vee\cdots\vee\mathcal{U}_n$.

定义 5.1.1 设 X 为一非空集合, $T:X\to X$ 为映射, $\mathcal{U}$ 为 X 的覆盖, 定义

$$T^{-1}\mathcal{U}=\{T^{-1}U:U\in\mathcal{U}\}.$$

显然 $T^{-1}\mathcal{U}$ 仍为 X 的覆盖. 一般来说, 对两个非负整数 m, n $(n\geqslant m)$, 可以定义 $\mathcal{U}_m^n=\bigvee_{j=m}^n T^{-j}\mathcal{U}$, 特别地, 对 $n\geqslant 1$,

$$\mathcal{U}_0^{n-1}=\mathcal{U}\vee T^{-1}\mathcal{U}\vee\cdots\vee T^{-(n-1)}\mathcal{U}.$$

设 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 为 X 的两个覆盖, 如果对每个 $V\in\mathcal{V}$, 能找到某个 $U\in\mathcal{U}$, 使得 $V\subset U$, 则称 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的**加细**, 记为 $\mathcal{V}\succeq\mathcal{U}$ 或 $\mathcal{U}\preceq\mathcal{V}$. 特别地, 如果 $\mathcal{V}$ 的每个元素均为 $\mathcal{U}$ 中的元素, 则称 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的**子覆盖**, 显然, 此时 $\mathcal{V}\succeq\mathcal{U}$.

定义 5.1.2 如果 $\mathcal{U}$ 为非空集合 X 的覆盖, 用 $N(\mathcal{U})$ 表示 $\mathcal{U}$ 的所有子覆盖中具有最少元素个数的子覆盖的元素个数. 当 $\mathcal{U}$ 没有有限子覆盖时, 约定 $N(\mathcal{U})=+\infty$.

易见, 当 X 为紧度量空间以及 $\mathcal{U}$ 为 X 的开覆盖时, $N(\mathcal{U})$ 为有限数. 为方便起见, 对覆盖 $\mathcal{U}$ 记 $H(\mathcal{U})=\log N(\mathcal{U})$.

引理 5.1.3 设 X 为一非空集合, $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 为 X 的两个覆盖. 则

(1) $H(\mathcal{U})\geqslant 0$;

(2) 如果 $\mathcal{V}\succeq\mathcal{U}$, 则 $H(\mathcal{V})\geqslant H(\mathcal{U})$;

(3) $H(\mathcal{U}\vee\mathcal{V})\leqslant H(\mathcal{U})+H(\mathcal{V})$;

(4) 对任意映射 $T:X\to X$, 有 $H(\mathcal{U})\geqslant H(T^{-1}\mathcal{U})$; 进而当 T 为满射时, $H(\mathcal{U})=H(T^{-1}\mathcal{U})$.

证明 由定义, (1), (2) 和 (4) 明显成立. 对于 (3), 当 $H(\mathcal{U})=+\infty$ 或 $H(\mathcal{V})=+\infty$ 时, 它明显成立. 现假设 $\{U_1,\cdots,U_{N(\mathcal{U})}\}$ 和 $\{V_1,\cdots,V_{N(\mathcal{V})}\}$ 分别为 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 具有最少元素个数的子覆盖. 则 $\{U_i\cap V_j:1\leqslant i\leqslant N(\mathcal{U}),1\leqslant j\leqslant N(\mathcal{V})\}$ 为 $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ 的子覆盖, 从而 $N(\mathcal{U}\vee\mathcal{V})\leqslant N(\mathcal{U})N(\mathcal{V})$. □

引理 5.1.4 设 X 为一非空集合, $T:X\to X$ 为映射, $\mathcal{U}$ 为 X 的覆盖. 则非负序列 $a_n=H(\mathcal{U}_0^{n-1})$ 具有次可加性, 即 $a_{m+n}\leqslant a_m+a_n,\forall m,n\geqslant 1$. 进而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}H(\mathcal{U}_0^{n-1})$ 存在且等于 $\inf\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}H(\mathcal{U}_0^{n-1})$, 将该极限称为 $\mathcal{U}$ 相对于 T 的**组合熵**, 记为 $h_c(T,\mathcal{U})$.

当 (X,T) 为动力系统以及 $\mathcal{U}$ 为 X 的开覆盖时, 以上方式定义的 $h_c(T,\mathcal{U})$ 称为 $\mathcal{U}$ 相对于 T 的**拓扑熵**, 记为 $h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})$.

证明 对 $m,n\geqslant 1$, 由引理 5.1.3 的性质 (3) 和 (4), 有

$$\begin{aligned}a_{m+n}&=H\left(\bigvee_{i=0}^{m+n-1}T^{-i}\mathcal{U}\right)\\&\leqslant H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathcal{U}\right)+H\left(T^{-n}\left(\bigvee_{j=0}^{m-1}T^{-j}\mathcal{U}\right)\right)\\&\leqslant a_n+a_m.\end{aligned}$$

这说明 $\{a_n\}$ 为次可加非负序列. 设 $a=\inf\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{a_n}{n}$. 固定 $\ell\geqslant 1$, 对每个 $m\in\mathbb{N}$, 存在 $k_m\in\mathbb{Z}_+$ 和 $r_m\in\{0,1,\cdots,\ell-1\}$, 使得 $m=k_m\ell+r_m$. 利用 $\{a_n\}$ 的次可加性可得 $\dfrac{a_m}{m}\leqslant\dfrac{k_ma_\ell+a_{r_m}}{k_m\ell+r_m}$, 再令 $m\to+\infty$, 便得 $\limsup\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}\leqslant\dfrac{a_\ell}{\ell}$. 从 ℓ 的任意性, 有 $\limsup\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}\leqslant\inf\limits_{\ell\geqslant 1}\dfrac{a_\ell}{\ell}$. 而相反方向的不等式是明显成立的. 证毕. □

由引理 5.1.3 和 5.1.4, 不难得到

引理 5.1.5 设 X 为一非空集合和 $T:X\to X$ 为映射. 则对 X 的任意两个覆盖 $\mathcal{U},\mathcal{V}$, 有

(1) $H(\mathcal{U}) \geqslant h_c(T,\mathcal{U}) \geqslant 0$;

(2) 如果 $\mathcal{V} \succeq \mathcal{U}$, 则 $h_c(T,\mathcal{V}) \geqslant h_c(T,\mathcal{U})$;

(3) $h_c(T,\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leqslant h_c(T,\mathcal{U}) + h_c(T,\mathcal{V})$;

(4) $h_c(T,\mathcal{U}) \geqslant h_c(T,T^{-1}\mathcal{U})$; 进而当 T 为满射时, $h_c(T,\mathcal{U}) = h_c(T,T^{-1}\mathcal{U})$.

定义 5.1.6 对动力系统 (X,T), 用 $\mathcal{C}_X^o$ 表示空间 X 的全体开覆盖. 令

$$h_{\text{top}}(T) = \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}),$$

把 $h_{\text{top}}(T)$ 称为系统 (X,T) 的**拓扑熵** (需要提及的是在这里可能出现 $h_{\text{top}}(T)$ 为 $+\infty$ 的情形). 在必要时, 为强调空间 X, 也可将其记为 $h_{\text{top}}(T,X)$.

命题 5.1.7 (1) 如果 (Y,T) 为 (X,T) 的子系统, 则 $h_{\text{top}}(T,X) \geqslant h_{\text{top}}(T,Y)$;

(2) 如果 $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ 为因子映射, 则 $h_{\text{top}}(T) \geqslant h_{\text{top}}(S)$;

(3) 如果 (X,T) 为可逆系统, 则 $h_{\text{top}}(T) = h_{\text{top}}(T^{-1})$.

证明 由定义 5.1.6 和引理 5.1.3, (1) 明显成立. (2) 来自于以下事实: 对任意 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_Y^o$, $h_{\text{top}}(T,\pi^{-1}(\mathcal{U})) = h_{\text{top}}(S,\mathcal{U})$. 最后, (2) 蕴含着 (3). □

注记 5.1.8 由命题 5.1.7 的性质 (2), 如果 $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ 为拓扑共轭, 则 $h_{\text{top}}(T) = h_{\text{top}}(S)$. 这说明熵是系统的拓扑共轭不变量.

一般来说, 系统的拓扑熵是相当不容易计算的, 但对于一些特殊系统, 我们仍然有章可寻.

例 5.1.9 设 $T = \text{id} : X \to X$ 为恒同映射, 则对 X 任意的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_k\}$ 有 $T^{-i}\mathcal{U} = \mathcal{U}$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}_+$ 成立. 因此, 存在 k, 使得 $\mathcal{U}_0^{n-1} = \mathcal{U}_0^{k-1}$, $n \geqslant k$. 这说明 $H(\mathcal{U}_0^{n-1}) = H(\mathcal{U}_0^{k-1})$, $n \geqslant k$. 因此

$$h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U}_0^{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U}_0^{k-1}) = 0.$$

进而由 $\mathcal{U}$ 的任意性, 得到 $h_{\text{top}}(T) = 0$.

下面的引理提供了一个相对来说更易于操作的计算熵的方法.

引理 5.1.10 设 (X,T) 为具有度量 d 的动力系统. 如果 $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X 满足 $\text{diam}(\mathcal{U}_n) = \sup\{\text{diam}(U) : U \in \mathcal{U}_n\} \to 0$ 的开覆盖序列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_n) = h_{\text{top}}(T)$.

证明 设 $\mathcal{V}$ 为 X 的任一开覆盖, δ 为 $\mathcal{V}$ 的 Lebesgue 数 (即对于 X 的每个直径小于等于 δ 的子集 A, 存在 $V \in \mathcal{V}$ 包含了 A). 则对满足 $\text{diam}(\mathcal{U}_n) < \delta$ 的 n 而言, 有 $\mathcal{U}_n \succeq \mathcal{V}$, 进而 $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_n) \geqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{V})$. 再由 $\mathcal{V}$ 的任意性, 得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_n) \geqslant h_{\text{top}}(T)$. 同时, 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_n) \leqslant h_{\text{top}}(T)$ 是明显成立的, 结论成立. □

引理 5.1.11 设 (X,T) 为动力系统, 对 X 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_0^n)=h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}).$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})\leqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_0^n)&=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}H((\mathcal{U}_0^n)_0^{k-1})=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}H(\mathcal{U}_0^{n+k-1})\\&=\lim_{k\to+\infty}\frac{n+k}{k}\frac{1}{n+k}H(\mathcal{U}_0^{n+k-1})=h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}).\end{aligned}$$

引理得证. □

注记 5.1.12 当 (X,T) 为可逆动力系统时, 对 X 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_{-n}^n)=h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}).$$

命题 5.1.13 (Abramov 定理) 设 (X,T) 为动力系统且 $m\in\mathbb{N}$, 则

$$h_{\text{top}}(T^m)=m\ h_{\text{top}}(T).$$

证明 首先对每个 $\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o$, 不难得到

$$h_{\text{top}}(T^m,\mathcal{U}_0^{m-1})=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H\left(\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-im}\mathcal{U}_0^{m-1}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H(\mathcal{U}_0^{km-1})=mh_{\text{top}}(T,\mathcal{U}).$$

因此

$$h_{\text{top}}(T^m)=\sup\nolimits_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o}h_{\text{top}}(T^m,\mathcal{U}_0^{m-1})=m\sup\nolimits_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o}h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})=m\ h_{\text{top}}(T).$$

上面第一个和最后一个等号的成立由定义所保证. □

注记 5.1.14 当 (X,T) 为可逆动力系统且 $m\in\mathbb{Z}$ 时, 有 $h_{\text{top}}(T^m)=|m|h_{\text{top}}(T)$.

例 5.1.15 设 $\Omega=\{1,\cdots,L\}^{\mathbb{Z}_+}$ 和 (Ω,σ) 为单边的 L 符号全转移. 对 (Ω,σ) 的子系统 (X,σ), 定义它的基本柱形集 $[j]=\{x\in X:x_0=j\}$, $1\leqslant j\leqslant L$ 和 X 的基本剖分 $\mathcal{U}=\{[j]:1\leqslant j\leqslant L\}$. 设 $u_n=N(\mathcal{U}_0^{n-1})$, 则 $u_n=\text{Card}(\mathcal{U}_0^{n-1})$.

对于子转移 (X,σ), $h_{\text{top}}(\sigma,X)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\log u_n$. 特别地, 当 $X=\Omega$ 时, 有

$$h_{\text{top}}(\sigma)=\log L.$$

证明 明显地, 序列 $\{\mathcal{U}_0^{n-1}\}_{n=1}^\infty$ 满足引理 5.1.10 的条件, 因此利用引理 5.1.10, 有

$$\begin{aligned}h_{\text{top}}(\sigma,X)&=\lim_{n\to+\infty}h_{\text{top}}(\sigma,\mathcal{U}_0^{n-1})=h_{\text{top}}(\sigma,\mathcal{U})\\&=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\log N(\mathcal{U}_0^{k-1})=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\log u_k.\end{aligned}$$

当 $X=\Omega$ 时, $u_k=L^k$. 因此得到 $h_{\rm top}(\sigma,\Omega)=\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\log L^k=\log L$. □

以下介绍两种拓扑熵的等价定义, 对相当多的系统而言, 这两种定义使我们更容易计算其拓扑熵. 当 (X,T) 为动力系统, d 为 X 上与拓扑相容的度量以及 $n\in\mathbb{N}$ 时, 对 $x,x'\in X$, 定义

$$d_n(x,x')=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}d(T^kx,T^kx').$$

则 d_n 也为 X 上与拓扑相容的度量.

定义 5.1.16　设 (X,T) 为具有度量 d 的动力系统.

(1) 对 $n\geqslant 1$ 和 $\varepsilon>0$, 称有限集 $A\subset X$ 为一个(n,ε) **分离集**, 如果对 A 中任意两个不同的点 x,y, 均有 $d_n(x,y)\geqslant\varepsilon$ 成立; 用 ${\rm sr}(n,\varepsilon,T)$ 表示 (X,T) 具有最多元素个数的 (n,ε) 分离集的元素个数;

(2) 对 $n\geqslant 1$ 和 $\varepsilon>0$, 称有限集 $A\subset X$ 为一个(n,ε) **张成集**, 如果对 X 的任意点 x, 存在 $y\in A$, 使得 $d_n(x,y)<\varepsilon$; 用 ${\rm sp}(n,\varepsilon,T)$ 表示 (X,T) 具有最少元素个数的 (n,ε) 张成集的元素个数.

由于空间 X 是紧的, ${\rm sr}(n,\varepsilon,T)$ 和 ${\rm sp}(n,\varepsilon,T)$ 均为有限数. 现在定义

$$\begin{aligned}{\rm sr}(\varepsilon,T)&=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\log{\rm sr}(n,\varepsilon,T),\\ {\rm sp}(\varepsilon,T)&=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\log{\rm sp}(n,\varepsilon,T).\end{aligned}$$

易见当 $\varepsilon\to 0+$ 时, ${\rm sr}(\varepsilon,T)$ 和 ${\rm sp}(\varepsilon,T)$ 关于 ε 单调上升. 因此极限

$${\rm sr}(d,T)=\lim_{\varepsilon\to 0+}{\rm sr}(\varepsilon,T)\ \ \text{和}\ {\rm sp}(d,T)=\lim_{\varepsilon\to 0+}{\rm sp}(\varepsilon,T)\text{存在}.$$

引理 5.1.17　对每个 $n\in\mathbb{N}$.

(1) ${\rm sp}(n,\varepsilon,T)\leqslant{\rm sr}(n,\varepsilon,T)\leqslant{\rm sp}\left(n,\frac{\varepsilon}{2},T\right)$;

(2) ${\rm sp}(\varepsilon,T)\leqslant{\rm sr}(\varepsilon,T)\leqslant{\rm sp}\left(\frac{\varepsilon}{2},T\right)$;

(3) ${\rm sp}(d,T)={\rm sr}(d,T)$.

证明　由于 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 是明显成立的, 我们只需证明 (1). 显然, X 的一个具有最多元素个数的 (n,ε) 分离集也为 (n,ε) 张成集, 所以 ${\rm sp}(n,\varepsilon,T)\leqslant{\rm sr}(n,\varepsilon,T)$. 相反地, 如果 A 为具有最少元素个数的 $\left(n,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 张成集以及 E 为任意 (n,ε) 分离集, 则对每个 $x\in E$, 存在点 $\phi(x)\in A$, 使得 $d_n(x,\phi(x))<\frac{\varepsilon}{2}$. 因 E 为任意 (n,ε) 分离集, ϕ 为一一对应. 这说明 $|A|\geqslant|E|$, 进而 ${\rm sr}(n,\varepsilon,T)\leqslant{\rm sp}\left(n,\frac{\varepsilon}{2},T\right)$. □

以下命题说明通过分离集和张成集可给出拓扑熵的等价定义.

命题 5.1.18 设 (X,T) 为动力系统. 则 $h_{\rm top}(T)=\mathrm{sp}(d,T)=\mathrm{sr}(d,T)$. 特别地, $\mathrm{sp}(d,T)=\mathrm{sr}(d,T)$ 不依赖于相容度量 d 的选取.

证明 首先, 固定一个 $\varepsilon>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$. 设 $\mathcal{U}$ 为具有 Lebesque 数 2ε 的开覆盖以及 E 为具有最少元素个数的 (n,ε) 张成集, 即 $|E|=\mathrm{sp}(n,\varepsilon,T)$. 由 $\mathrm{sp}(n,\varepsilon,T)$ 的定义知

$$\bigcup_{x\in E}\bigcap_{i=0}^{n-1}T^{-i}B_\varepsilon(T^ix)=X.$$

现在对每个 $x\in E$ 和 $1\leqslant i\leqslant n$, $B_\varepsilon(T^ix)$ 包含在覆盖 $\mathcal{U}$ 的某个元素中, 由此可见 $N(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-i}\mathcal{U})\leqslant\mathrm{sp}(n,\varepsilon,T)$.

取 $\mathcal{V}$ 为 X 的满足 $\mathrm{diam}(\mathcal{V})<\varepsilon$ 的开覆盖. 设 A 为具有最多元素个数的 (n,ε) 分离集, 即 $|A|=\mathrm{sr}(n,\varepsilon,T)$. 注意到 $\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathcal{V}$ 每个元素中至多含有 A 中一个点, 由此可见 $\mathrm{sr}(n,\varepsilon,T)\leqslant N(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathcal{V})$.

由以上分析

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathcal{U}\right)\leqslant\mathrm{sp}(n,\varepsilon,T)\leqslant\mathrm{sr}(n,\varepsilon,T)\leqslant N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathcal{V}\right),\tag{5.1.1}$$

因此

$$\frac{1}{n}N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathcal{U}\right)\leqslant\frac{1}{n}\mathrm{sp}(n,\varepsilon,T)\leqslant\frac{1}{n}\mathrm{sr}(n,\varepsilon,T)\leqslant\frac{1}{n}N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathcal{V}\right).$$

再令 $n\to\infty$, 就得到

$$h_{\rm top}(T,\mathcal{U})\leqslant\mathrm{sp}(\varepsilon,T)\leqslant\mathrm{sr}(\varepsilon,T)\leqslant h_{\rm top}(T,\mathcal{V}).$$

然后令 $\varepsilon\searrow0$, 同时要求 $\mathrm{diam}(\mathcal{U})\searrow0$(这样 $\mathcal{V}$ 也满足 $\mathrm{diam}(\mathcal{V})\searrow0$), 利用引理 5.1.10 可得 $h_{\rm top}(T)=\mathrm{sp}(d,T)=\mathrm{sr}(d,T)$. □

从公式 (5.1.1) 同时获得了如下推论:

推论 5.1.19 设

$$\underline{\mathrm{sr}}(\varepsilon,T)=\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\log\mathrm{sr}(n,\varepsilon,T),$$

$$\underline{\mathrm{sp}}(\varepsilon,T)=\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\log\mathrm{sp}(n,\varepsilon,T).$$

则极限 $\underline{\mathrm{sr}}(d,T)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\underline{\mathrm{sr}}(\varepsilon,T)$ 和 $\underline{\mathrm{sp}}(d,T)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\underline{\mathrm{sp}}(\varepsilon,T)$ 存在, 且

$$h_{\rm top}(T)=\underline{\mathrm{sp}}(d,T)=\underline{\mathrm{sr}}(d,T).$$

注记 5.1.20　对一个度量空间 X(不一定紧致) 上的一致连续映射 T 以及紧致子集 K, 可以类似地定义相对于 K 的拓扑熵 $h(T,K)$. 可以证明它不依赖度量的选取, 并且当 X 紧致时 $h(T,X)=h_{\text{top}}(T)$(Walters, 1982).

习　题　5.1

1. 设 X 为非空集合, $T:X\to X$ 为满射, $\mathcal{U}$ 为 X 的有限覆盖. 证明: 对 $l\in\mathbb{N}$, 有 $h_c(T,\mathcal{U})\geqslant\frac{1}{l}h_c(T^l,\mathcal{U})$.

2. 设 (X,σ) 为单边的 L 符号全转移 (Ω,σ) 的子系统且 $h_{\text{top}}(\sigma,X)=\log L$, 证明 $X=\Omega$.

3. 设 $T:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ 满足 $T(z)=ze^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$, 其中 $\mathbb{T}$ 为复平面的单位圆周和 $\alpha\in\mathbb{R}$, 则 $h_{\text{top}}(T)=0$.

4. 设 (X,T) 和 (Y,S) 为两个动力系统, 证明:

$$h_{\text{top}}(T\times S,X\times Y)=h_{\text{top}}(T,X)+h_{\text{top}}(S,Y).$$

5. 设 (X,T) 为动力系统. 假设 $X=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n$, 其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的一些互不相交闭的不变集, 证明: $h_{\text{top}}(T,X)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}h_{\text{top}}(T|_{X_i},X_i)$.

6. 设 (X,T) 为动力系统且 $\Omega(T)$ 为其非游荡点集. 证明: $h_{\text{top}}(T,X)=h_{\text{top}}(T|_{\Omega(T)},\Omega(T))$.

§5.2　测　度　熵

1958 年, Kolmogorov(1958) 借鉴 Shannon(1948) 信息论中不确定性的描述, 在遍历论中引入了测度熵的概念, 测度熵是重要的同构不变量, 它反映了保测系统的混乱程度. 设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为概率空间. 我们把 $\mathcal{B}$ 中的元素称为 X 的**可测集**, 也就是说, X 的子集 A 为可测集当且仅当 $A\in\mathcal{B}$. 由 X 的有限个互不相交的可测集构成的 X 的覆盖, 我们称其为 X 的**有限可测剖分**. 确切地说, $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 X 的有限可测剖分, 如果 $A_i\in\mathcal{B}$, $A_i\cap A_j=\varnothing$ 对任意 $1\leqslant i\neq j\leqslant n$ 成立且 $\bigcup_{i=1}^n A_i=X$.

对 X 的一个有限可测剖分 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$, 将 α 的**信息函数**定义为

$$I(\alpha)(x)=\sum_{j=1}^{n}-1_{A_j}(x)\log\mu(A_j),$$

其中 $1_{A_j}(x)$ 为 A_j 的特征函数. 进一步, 考虑函数 $\phi:[0,1]\to[0,+\infty)$,

$$\phi(t)=\begin{cases}-t\log t, & t>0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

不难看出, 函数 ϕ 是严格凸函数, 即对满足 $\sum_{i=1}^{k}p_i=1$ 的 $p_i\geqslant 0$ 和 $t_i\in[0,1]$, 有 $\phi\left(\sum_{i=1}^{k}p_it_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{k}p_i\phi(t_i)$, 其中等号成立当且仅当所有满足 $p_i\neq 0$ 的 t_i 是相等的.

令

$$H_\mu(\alpha)=\sum_{j=1}^{n}\phi(\mu(A_j))=\sum_{j=1}^{n}-\mu(A_j)\log\mu(A_j).$$

将数 $H_\mu(\alpha)$ 称为可测剖分 α 的**熵**, 显然 $H_\mu(\alpha)\in[0,+\infty)$.

更一般地, 对 $\mathcal{B}$ 的给定的子 σ 代数 $\mathcal{F}$, 可测剖分 α 相对于 $\mathcal{F}$ 的**条件信息函数**和**条件熵**分别定义为

$$I^{\mathcal{F}}(\alpha)(x)=\sum_{j=1}^{n}-1_{A_j}(x)\log\mathbb{E}(1_{A_j}|\mathcal{F})(x)$$

和

$$\begin{aligned}H_\mu(\alpha|\mathcal{F})&=\int_X I^{\mathcal{F}}(\alpha)(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\sum_{j=1}^{n}\int_X -1_{A_j}(x)\log\mathbb{E}(1_{A_j}|\mathcal{F})\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

这里, $\mathbb{E}(1_{A_j}|\mathcal{F})$ 为函数 1_{A_j} 相对于 $\mathcal{F}$ 的数学期望.

由于

$$\mathbb{E}(I^{\mathcal{F}}(\alpha)|\mathcal{F})=\sum_{j=1}^{n}-\mathbb{E}(1_{A_j}|\mathcal{F})\log\mathbb{E}(1_{A_j}|\mathcal{F})=\sum_{j=1}^{n}\phi(\mathbb{E}(1_{A_j}|\mathcal{F})),$$

因此

$$\begin{aligned}H_\mu(\alpha|\mathcal{F})&=\int_X I^{\mathcal{F}}(\alpha)(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_X\mathbb{E}(I^{\mathcal{F}}(\alpha)|\mathcal{F})\mathrm{d}\mu(x)\\&=\sum_{j=1}^{n}\int_X\phi(\mathbb{E}(1_{A_j}|\mathcal{F}))\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

设 $\mathcal{N}=\{\varnothing,X\}$ 为 $\mathcal{B}$ 的平凡子 σ 代数, 显然 $I^{\mathcal{N}}(\alpha)=I(\alpha)$ 且 $H_\mu(\alpha)=H_\mu(\alpha|\mathcal{N})$. 当 $\mathcal{F}=\mathcal{B}$ 时, 对于任意的 $A\in\mathcal{B}$, 有 $\mathbb{E}(1_A|\mathcal{F})=1_A$, 进而 $I^{\mathcal{F}}(\alpha)=0$ 且 $H_\mu(\alpha|\mathcal{F})=0$.

对 X 的有限可测剖分 β, 用 $\mathcal{F}(\beta)$ 表示由 β 生成的 σ 代数. 对 X 的剖分 α,β, 如果 $\alpha\subset\mathcal{F}(\beta)$, 就说 β 为 α 的**加细**, 记为 $\beta\succeq\alpha$ 或 $\alpha\preceq\beta$. 对 $\mathcal{B}$ 的两个子 σ 代数 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$, 用 $\mathcal{F}_1\vee\mathcal{F}_2$ 表示 $\mathcal{B}$ 的同时包含 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ 的最小子 σ 代数. 为方便起见, 仍然用 β 表示 $\mathcal{F}(\beta)$, 用 $\alpha\vee\mathcal{F}$ 表示 $\mathcal{F}(\alpha)\vee\mathcal{F}$.

对于 X 的有限可测剖分 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 和 $\beta=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$, 容易验证

$$I^{\beta}(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-1_{A_i\cap B_j}(x)\log\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)}.\tag{5.2.2}$$

X 的有限可测剖分 α 和 β 的**交** $\alpha \vee \beta$ 定义为 $\{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$, 显然, $\alpha \vee \beta$ 仍为 X 的有限可测剖分, 并且 $\mathcal{F}(\alpha \vee \beta) = \mathcal{F}(\alpha) \vee \mathcal{F}(\beta)$. 由公式 (5.2.2), 对 X 的有限可测剖分 α, β 和 γ, 容易验证

$$I^{\gamma}(\alpha \vee \beta) = I^{\gamma}(\alpha) + I^{\alpha \vee \gamma}(\beta). \tag{5.2.3}$$

以下将上述公式 (5.2.3) 一般化.

命题 5.2.1 设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为概率空间, α, β 为 X 的有限可测剖分以及 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数. 则对 μ-a.e. x, 有 $I^{\mathcal{F}}(\alpha \vee \beta)(x) = I^{\mathcal{F}}(\alpha)(x) + I^{\alpha \vee \mathcal{F}}(\beta)(x)$ 成立.

证明 首先说明对 $B \in \beta$, 作为 $L^1(X, \alpha \vee \mathcal{F}, \mu)$ 函数而言,

$$\mathbb{E}(1_B|\alpha \vee \mathcal{F})(x) = \sum_{A \in \alpha} 1_A(x) \frac{\mathbb{E}(1_{B \cap A}|\mathcal{F})(x)}{\mathbb{E}(1_A|\mathcal{F})(x)} \tag{5.2.4}$$

成立. 为此目的, 设 $A' \in \alpha$, $F \in \mathcal{F}$, 将特征函数 $1_{A' \cap F}$ 与 (5.2.4) 的右边项相乘, 再积分有

$$\begin{aligned}
&\int_X 1_{A' \cap F}(x) \cdot \left(\sum_{A \in \alpha} 1_A(x) \frac{\mathbb{E}(1_{B \cap A}|\mathcal{F})(x)}{\mathbb{E}(1_A|\mathcal{F})(x)} \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_F 1_{A'}(x) \frac{\mathbb{E}(1_{B \cap A'}|\mathcal{F})(x)}{\mathbb{E}(1_{A'}|\mathcal{F})(x)} \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_F \mathbb{E}\left(1_{A'} \frac{\mathbb{E}(1_{B \cap A'}|\mathcal{F})}{\mathbb{E}(1_{A'}|\mathcal{F})} |\mathcal{F} \right)(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_F \mathbb{E}(1_{A'}|\mathcal{F})(x) \cdot \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}(1_{B \cap A'}|\mathcal{F})}{\mathbb{E}(1_{A'}|\mathcal{F})} |\mathcal{F} \right)(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X 1_F(x) \mathbb{E}(1_{B \cap A'}|\mathcal{F})(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X \mathbb{E}(1_F \cdot 1_{B \cap A'}|\mathcal{F})(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X 1_F(x) \cdot 1_{B \cap A'}(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{A' \cap F} 1_B(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{A' \cap F} \mathbb{E}(1_B|\alpha \vee \mathcal{F})(x) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X 1_{A' \cap F}(x) \cdot \mathbb{E}(1_B|\alpha \vee \mathcal{F})(x) \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

因 A', F 是任意的, 从期望的定义得 (5.2.4). 现在在等式 (5.2.4) 两边取对数, 即得

$$\log(\mathbb{E}(1_B|\alpha \vee \mathcal{F})(x)) = \sum_{A \in \alpha} 1_A(x) \left(\log(\mathbb{E}(1_{B \cap A}|\mathcal{F})(x)) - \log(\mathbb{E}(1_A|\mathcal{F})(x)) \right),$$

因此

$$\begin{aligned}I^{\mathcal{F}}(\alpha\vee\beta)(x)&=-\sum_{A\in\alpha}\sum_{B\in\beta}1_{A\cap B}(x)\log\mathbb{E}(1_{A\cap B}|\mathcal{F})(x)\\&=-\sum_{A\in\alpha}\sum_{B\in\beta}1_A(x)1_B(x)\log(\mathbb{E}(1_A|\mathcal{F})(x))\\&\quad-\sum_{B\in\beta}1_B(x)\log(\mathbb{E}(1_B|\alpha\vee\mathcal{F})(x))\\&=-\sum_{A\in\alpha}1_A(x)\log(\mathbb{E}(1_A|\mathcal{F})(x))\\&\quad-\sum_{B\in\beta}1_B(x)\log(\mathbb{E}(1_B|\alpha\vee\mathcal{F})(x))\\&=I^{\mathcal{F}}(\alpha)(x)+I^{\alpha\vee\mathcal{F}}(\beta)(x).\end{aligned}$$

这就完成了命题的证明. □

利用上述命题, 可以说明可测剖分 α 的条件熵具有以下性质:

命题 5.2.2 设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为概率空间. 对 X 的有限测度 α,β 以及 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数 $\mathcal{F},\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$, 有

(1) 如果 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$, 则 $H_\mu(\alpha|\mathcal{F})\leqslant\log k$ 且等号成立当且仅当 $\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{F})\equiv\dfrac{1}{k}$ 对每个 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$, 特别地, $H_\mu(\alpha)\leqslant\log k$ 且等号成立当且仅当 $\mu(A_i)=\dfrac{1}{k}$ 对每个 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$;

(2) $H_\mu(\alpha\vee\beta|\mathcal{F})=H_\mu(\alpha|\mathcal{F})+H_\mu(\beta|\alpha\vee\mathcal{F})$, 特别地, $H_\mu(\alpha\vee\beta)=H_\mu(\alpha)+H_\mu(\beta|\alpha)$;

(3) $H_\mu(\alpha|\mathcal{F})=0$ 成立当且仅当 α 为 $\mathcal{F}$ 可测的, 特别地, $H_\mu(\alpha|\beta)=0$ 成立当且仅当 $\alpha\preceq\beta$;

(4) $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\Rightarrow H_\mu(\alpha|\mathcal{F}_1)\geqslant H_\mu(\alpha|\mathcal{F}_2)$;

(5) $\alpha\preceq\beta\Rightarrow H_\mu(\alpha|\mathcal{F})\leqslant H_\mu(\beta|\mathcal{F})$, 特别地, $H_\mu(\alpha)\leqslant H_\mu(\beta)$;

(6) $H_\mu(\alpha\vee\beta|\mathcal{F})\leqslant H_\mu(\alpha|\mathcal{F})+H_\mu(\beta|\mathcal{F})$, 特别地, $H_\mu(\alpha\vee\beta)\leqslant H_\mu(\alpha)+H_\mu(\beta)$;

(7) 设 $T:(X,\mathcal{B})\to(X,\mathcal{B})$ 为可测映射, 则 $H_\mu(T^{-1}\alpha|T^{-1}\mathcal{F})=H_{T\mu}(\alpha|\mathcal{F})$; 如果 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, 则 $H_\mu(T^{-1}\alpha|T^{-1}\mathcal{F})=H_\mu(\alpha|\mathcal{F})$.

证明 (i) 首先由于 ϕ 是区间 $[0,\infty)$ 上严格凸的函数, 因此

$$\begin{aligned}H_\mu(\alpha|\mathcal{F})&=\int_X\sum_{j=1}^k\phi(\mathbb{E}(1_{A_j}|\mathcal{F}))\mathrm{d}\mu(x)\\&\leqslant\int_X k\phi(\sum_{j=1}^k\frac{1}{k}\mathbb{E}(1_{A_j}|\mathcal{F}))\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int_X\log k\mathrm{d}\mu(x)=\log k,\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{F})\equiv\dfrac{1}{k}$ 每个 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$. 这就证明了 (1).

(ii) 由命题 5.2.1 知, 对 μ-a.e. x 有 $I^{\mathcal{F}}(\alpha\vee\beta)(x)=I^{\mathcal{F}}(\alpha)(x)+I^{\alpha\vee\mathcal{F}}(\beta)(x)$ 成立. 对上式两边积分即得 $H_\mu(\alpha\vee\beta|\mathcal{F})=H_\mu(\alpha|\mathcal{F})+H_\mu(\beta|\alpha\vee\mathcal{F})$. 这就证明了 (2). 现在由 (2), 得到 (5) 和 (6).

(iii) 对于 (3), 注意到 α 为 $\mathcal{F}$ 可测的当且仅当 $I^{\mathcal{F}}(\alpha)=0$, 由公式 (5.2.1) 即得.

(iv) 设 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$. 则

$$\begin{aligned}H_\mu(\alpha|\mathcal{F}_1)&=\sum_{i=1}^{k}\int_X\phi(\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{F}_1)(x))\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{i=1}^{k}\int_X\phi(\mathbb{E}(\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{F}_2))|\mathcal{F}_1)(x))\mathrm{d}\mu(x)\\&\geqslant\sum_{i=1}^{k}\int_X\mathbb{E}(\phi(\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{F}_2))|\mathcal{F}_1)(x))\mathrm{d}\mu(x)\quad(\text{Jensen 不等式})\\&=\sum_{i=1}^{k}\int_X\phi(\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{F}_2)(x))\mathrm{d}\mu(x)=H_\mu(\alpha|\mathcal{F}_2).\end{aligned}$$

这就证明了 (4).

(v) (7) 来自于以下事实: 对可测函数 f, 有 $\mathbb{E}(f\circ T|T^{-1}\mathcal{F})(x)=\mathbb{E}(f|\mathcal{F})(Tx)$ 对 μ-a.e. $x\in X$ 成立. □

命题 5.2.3　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统和 α,β 为 X 的两个有限可测剖分. 则以下性质彼此等价:

(1) α 独立于 β(即 $\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B)$ 对 $A\in\alpha$ 和 $B\in\beta$, 此时记 $\alpha\perp_\mu\beta$);

(2) $H_\mu(\alpha\vee\beta)=H_\mu(\alpha)+H_\mu(\beta)$;

(3) $H_\mu(\alpha|\beta)=H_\mu(\alpha)$.

证明　由命题 5.2.2 (2) 知, (2) 等价于 (3). 以下证明 (1) 等价于 (3). 首先假设 (1) 成立, 即 $\alpha\perp_\mu\beta$. 因此, 对任意 $A\in\alpha$, $B\in\beta$, $\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B)$, 进而

$$I^\beta(\alpha)(x)=\sum_{A\in\alpha,B\in\beta}-1_{A\cap B}(x)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}=\sum_{A\in\alpha,B\in\beta}-1_{A\cap B}(x)\log\mu(A)=I(\alpha)(x).$$

这就说明 $H_\mu(\alpha|\beta)=H_\mu(\alpha)$.

反之, 假设 $H_\mu(\alpha|\beta)=H_\mu(\alpha)$. 使用 (5.2.2), 对凸函数 $\phi(t)=-t\log t$, 有

$$0=\sum_{A\in\alpha}\phi(\mu(A))-\sum_{A\in\alpha}\sum_{B\in\beta}\mu(B)\phi\left(\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}\right).\tag{5.2.5}$$

因 ϕ 是严格凸的, 对每个 $A\in\alpha$, 有

$$\phi(\mu(A))\geqslant\sum_{B\in\beta}\mu(B)\phi\left(\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}\right),\tag{5.2.6}$$

且等号成立当且仅当 $\dfrac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}=\mu(A)$ 对 $B\in\beta,\mu(B)>0$ 成立.

现在结合 (5.2.5) 和 (5.2.6), 对 $A\in\beta$ 得到

$$\phi(\mu(A))=\sum_{B\in\beta}\mu(B)\phi\left(\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}\right).$$

再注意到 (5.2.6) 不等式成立条件, 对 $B\in\beta,\mu(B)>0$, 有 $\dfrac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}=\mu(A)$. 这就证明 $\alpha\perp_\mu\beta$. □

设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, α 为 X 的有限可测剖分. 为简单起见, 对非负整数 m, n $(n\geqslant m)$, 记

$$\alpha_m^n=\bigvee_{i=m}^{n}T^{-i}\alpha \text{ 以及 } \alpha^-=\bigvee_{n=1}^{+\infty}T^{-n}\alpha,$$

其中 $\bigvee_{n=1}^{+\infty}T^{-n}\alpha$ 表示 $\mathcal{B}$ 的包含 $\{T^{-n}\alpha:n\geqslant 1\}$ 的最小子 σ 代数.

命题 5.2.4 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 对 X 的有限可测剖分 α 序列 $H_\mu(\alpha_0^{n-1})$ 为次可加非负序列, 进而极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^{n-1})$ 存在且等于 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^{n-1})$.

证明 序列 a_n 的次可加性来自于以下不等式

$$\begin{aligned}a_{n+m}&=H_\mu(\alpha\vee T^{-1}\alpha\vee\cdots\vee T^{-(n+m-1)}\alpha)\\&\leqslant H_\mu(\alpha\vee T^{-1}\alpha\vee\cdots\vee T^{-(n-1)}\alpha)\\&\quad+H_\mu(T^{-n}(\alpha\vee T^{-1}\alpha\vee\cdots\vee T^{-(m-1)}\alpha))\\&=a_n+a_m.\end{aligned}\tag{5.2.7}$$

现在, 完全类似于引理 5.1.4, 可以证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^{n-1})=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^{n-1})$. □

定义 5.2.5 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 对 X 的有限可测剖分 α, 用 $h_\mu(T,\alpha)$ 表示极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^{n-1})$ 且称 $h_\mu(T,\alpha)$ 为**剖分 α 相对于 T 的熵**.

在此介绍两个十分有用的经典结果 ——Martingale 收敛定理和 Martingale 定理 (Glasner, 2003, §14.3)

定理 5.2.6 (Martingale 收敛定理) 设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为概率空间, $f\in L^p(X,\mathcal{B},\mu)$, $1\leqslant p<\infty$.

(1) 如果 $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $\mathcal{B}$ 递增的子 σ 代数且满足 $\mathcal{F}_n\nearrow\mathcal{F}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ 在 $L^p(\mu)$ 和 μ-a.e. 意义下同时成立;

(2) 如果 $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $\mathcal{B}$ 递减的子 σ 代数且满足 $\mathcal{F}_n\searrow\mathcal{F}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ 在 $L^p(\mu)$ 和 μ-a.e. 意义下同时成立.

定理 5.2.7 (Martingale 定理)　设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为概率空间, α 为 X 的有限可测剖分.

(1) 如果 $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{B}$ 递增的子 σ 代数且满足 $\mathcal{F}_n \nearrow \mathcal{F}$, 则 $I^{\mathcal{F}_n}(\alpha) \to I^{\mathcal{F}}(\alpha)$ 在 $L^1(\mu)$ 和 μ-a.e. 意义下同时成立, 进而 $H_\mu(\alpha|\mathcal{F}_n) \searrow H_\mu(\alpha|\mathcal{F})$;

(2) 如果 $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{B}$ 递减的子 σ 代数且满足 $\mathcal{F}_n \searrow \mathcal{F}$, 则 $I^{\mathcal{F}_n}(\alpha) \to I^{\mathcal{F}}(\alpha)$ 在 $L^1(\mu)$ 和 μ-a.e. 意义下同时成立, 进而 $H_\mu(\alpha|\mathcal{F}_n) \nearrow H_\mu(\alpha|\mathcal{F})$.

命题 5.2.8　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 对 X 的有限可测剖分 α, $h_\mu(T,\alpha) = H_\mu(\alpha|\alpha^-)$. 特别地, $h_\mu(T,\alpha) \leqslant H_\mu(\alpha)$.

证明　由于 $\lim\limits_{n\to\infty} H_\mu(\alpha|\bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i}\alpha) = H_\mu(\alpha|\alpha^-)$ (参见定理 5.2.7(1)), 有

$$\begin{aligned} h_\mu(T,\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-(n-1)}\alpha) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(H_\mu(\alpha) + H_\mu(\alpha|T^{-1}\alpha) + \cdots + H_\mu\left(\alpha \middle| \bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i}\alpha\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} H_\mu\left(\alpha \middle| \bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \\ &= H_\mu(\alpha|\alpha^-). \end{aligned}$$

□

定义 5.2.9　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 称 $h_\mu(T) = \sup_\alpha h_\mu(T,\alpha)$ 为**系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的熵**, 其中 α 取遍 X 的有限可测剖分.

注记 5.2.10　设 $\pi: (X,\mathcal{B},\mu,T) \to (Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 为因子映射. 对 Y 的有限可测剖分 α, 容易看出 $h_\nu(S,\alpha) = h_\mu(T,\pi^{-1}\alpha)$. 进而从定义 5.2.9 知 $h_\mu(T) \geqslant h_\nu(S)$. 特别地, 当 π 为测度同构时, $h_\mu(T) = h_\nu(S)$. 这说明测度熵是测度同构不变量.

如同在拓扑熵的情形 (见引理 5.1.10), 我们需要一些更易于操作的方法去计算测度熵. 下面的定理 5.2.11 以及 Kolmogorov-Sinai 定理给出了一种易于操作的计算测度熵的办法.

定理 5.2.11　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 如果 X 的有限可测剖分序列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \cdots$ 且 $\mathcal{F}(\alpha_n) \nearrow \mathcal{B}$, 则

$$h_\mu(T) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(T,\alpha_n).$$

证明　对 X 的每个有限可测剖分 β 和 $n \in \mathbb{N}$,

$$h_\mu(T,\beta) \leqslant h_\mu(T,\beta \vee \alpha_n) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\beta \vee \alpha_n)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left(H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha_n\right) + H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\beta \Big| \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha_n\right)\right)\\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left(H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha_n\right) + \sum_{i=0}^{m-1} H_\mu\left(T^{-i}\beta | T^{-i}\alpha_n\right)\right)\\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left(H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha_n\right) + mH_\mu(\beta|\alpha_n)\right) \quad (\text{利用命题 } 5.2.1\ (7))\\
&= h_\mu(T,\alpha_n) + H_\mu(\beta|\alpha_n), \qquad (5.2.8)
\end{aligned}
$$

在上面不等式中, 令 $n\to\infty$, 并利用 Martingale 定理得到

$$h_\mu(T,\beta) \leqslant \lim_{n\to\infty} h_\mu(T,\alpha_n) + H_\mu(\beta|\mathcal{B}) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(T,\alpha_n).$$

最后由 β 的任意性, $h_\mu(T) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(T,\alpha_n)$. □

定理 5.2.12 (Kolmogorov-Sinai 定理) 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 如果有限可测剖分 α 满足 $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\alpha = \mathcal{B}$ (如此的 α 称为**生成子**), 则 $h_\mu(T) = h_\mu(T,\alpha)$.

证明 首先对 $k\in\mathbb{N}$, 有

$$
\begin{aligned}
h_\mu(T,\alpha_0^{k-1}) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H_\mu((\alpha_0^{k-1})_0^{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{k+n-1})\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{k+n}{n}\frac{1}{k+n} H_\mu(\alpha_0^{k+n-1}) = h_\mu(T,\alpha).
\end{aligned}
$$

类似于不等式 (5.2.8), 对 X 的每个有限可测剖分 β 和 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$h_\mu(T,\beta) \leqslant h_\mu(T,\alpha_0^{n-1}) + H_\mu(\beta|\alpha_0^{n-1}) = h_\mu(T,\alpha) + H_\mu(\beta|\alpha_0^{n-1}).$$

在上式中令 $n\to+\infty$, 利用 Martingale 定理, 有 $h_\mu(T,\beta) \leqslant h_\mu(T,\alpha) + H_\mu(\beta|\mathcal{B}) = h_\mu(T,\alpha)$. 最后, 因 β 是任意的, $h_\mu(T) = h_\mu(T,\alpha)$. □

注记 5.2.13 当保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 可逆时, 把满足 $\bigvee_{i=-\infty}^{+\infty} T^{-i}\alpha = \mathcal{B}$ 的有限可测剖分 α 称为**生成子**. 此时, 同样可以证明: 如果有限可测剖分 α 为可逆保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的生成子, 则 $h_\mu(T) = h_\mu(T,\alpha)$. 容易看出, 具有生成子的保测系统其测度熵一定有限, 与之对应的是, Krieger(1970) 证明了每个具有有限熵的遍历保测系统都存在生成子.

例 5.2.14 设 $\Omega = \{1,2,\cdots,L\}^{\mathbb{Z}} (L\geqslant 2)$, (Ω,σ) 为双边的 L 符号全转移. 对整数 $m\leqslant n$ 和字 $w = (w_0,w_1,\cdots,w_{n-m}) \in \{1,2,\cdots,L\}^{n+1-m}$, 记

$$[w]_m^n = \{x\in\Omega : x_{m+j} = w_j; 0\leqslant j\leqslant n-m\}.$$

将 $[w]_m^n$ 称为 Ω 的柱形集. 例如, $[01]_0^1 = \{x \in \Omega : x_0 = 0, x_1 = 1\}$. Ω 上一个 σ 不变 Borel 概率测度 μ 是由它在 Ω 的所有柱形集上的取值 $\mu([w]_m^n)$ 唯一决定的, 并且映射 $[w]_m^n \to \mu([w]_m^n)$ 满足:

(1) $0 \leqslant \mu([w]_m^n) \leqslant 1$;

(2) $\mu(\Omega) = 1$;

(3) $\mu([w]_1^k) = \sum_{j=1}^{L} \mu([wj]_1^{k+1})$;

(4) $\mu([w]_m^n) = \mu([w]_{m+1}^{n+1})$.

反之, 给定一个满足 (1)~(4) 的映射 $[w]_m^n \to \mu([w]_m^n)$ 也定义了 Ω 上一个 σ 不变 Borel 概率测度 μ. 现在, 用 $\mathcal{M}(\Omega, \sigma)$ 表示 Ω 上 σ 不变 Borel 概率测度全体, 用 $\mathcal{B}(\Omega)$ 定义 Ω 的 Borel σ 代数. 对每个 $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \sigma)$, $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu, \sigma)$ 为保测系统. 如此的系统称为**符号系统**或**子转移**, $\{1, 2, \cdots, L\}$ 称为该系统的**状态空间**.

给定一个概率向量 $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_L)$, 即 $p_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant L$ 和 $\sum_{i=1}^{L} p_i = 1$. 现在, 映射 $\mu([w]_m^n) = p_{w_m} p_{w_{m+1}} \cdots p_{w_n}$ 定义了一个相应于 $\overrightarrow{p}$ 的**Bernoulli 测度** $\overrightarrow{p}^{\mathbb{Z}}$, 即 μ 等于乘积测度 $\overrightarrow{p}^{\mathbb{Z}}$. 把如此的保测系统 $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu, \sigma)$ 称为**Bernoulli 系统**, 记作 $B(\overrightarrow{p}) = B(p_1, p_2, \cdots, p_L)$. 以下计算 $\mu = B(p_1, \cdots, p_L)$ 的测度熵.

设 $\alpha = \{[j]_0^0 : 1 \leqslant j \leqslant L\}$. 则 α 为 (Ω, μ, σ) 的有限可测剖分且 $\bigvee_{i=-\infty}^{\infty} T^{-i}\alpha = \mathcal{B}(\Omega)$. 由于 $\alpha_0^{(n-1)} \perp_\mu T^{-n}\alpha$ 和对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 利用命题 5.2.3, 有

$$h_\mu(T, \alpha) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1}) = H_\mu(\alpha) = -\sum_{j=1}^{L} p_j \log p_j.$$

最后, 由注记 5.2.13, $h_\mu(\sigma) = h_\mu(\sigma, \alpha) = -\sum_{j=1}^{L} p_j \log p_j$.

命题 5.2.15 对保测系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 和每个 $m \in \mathbb{N}$, 有 $h_\mu(T^m) = m h_\mu(T)$.

证明 首先对 X 每个可测剖分 α, 不难算得

$$h_\mu(T^m, \alpha_0^{m-1}) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-im} \alpha_0^{m-1} \right) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} H_\mu(\alpha_0^{km-1}) = m h_\mu(T, \alpha).$$

因此, 由定义可有

$$h_\mu(T^m) = \sup_\alpha h_\mu(T^m, \alpha_0^{m-1}) = m \sup_\alpha h_\mu(T, \alpha) = m h_\mu(T),$$

其中 α 取遍 X 的所有有限可测剖分. □

注记 5.2.16 当保测系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 可逆时, 可以说明, 对 X 的每个可测剖分 α, 有 $h_\mu(T, \alpha) = h_\mu(T^{-1}, \alpha)$ 成立, 进而对 $m \in \mathbb{Z}$, 有 $h_\mu(T^m) = |m| h_\mu(T)$ 成立.

定理 5.2.17 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 和 $(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 为两个保测系统. 则

$$h_{\mu\times\nu}(T\times S)=h_\mu(T)+h_\nu(S).$$

证明 分别取 X 和 Y 的递增有限可测剖分序列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $\mathcal{F}(\alpha_n)\nearrow\mathcal{B}$ 且 $\mathcal{F}(\beta_n)\nearrow\mathcal{D}$. 则 $\{\alpha_n\times\beta_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $X\times Y$ 递增的有限可测剖分序列且满足 $\mathcal{F}(\alpha_n\times\beta_n)\nearrow\mathcal{B}\times\mathcal{D}$. 利用定理 5.2.11, 有

$$\begin{aligned}
h_{\mu\times\nu}(T\times S)&=\lim_{n\to\infty}h_{\mu\times\nu}(T\times S,\alpha_n\times\beta_n)\\
&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}H_{\mu\times\nu}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1}(T\times S)^{-i}\alpha_n\times\beta_n\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\left(H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1}T^{-i}\alpha_n\right)+H_\nu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1}S^{-i}\beta_n\right)\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}(h_\mu(T,\alpha_n)+h_\nu(S,\beta_n))\\
&=h_\mu(T)+h_\nu(S).
\end{aligned}$$

□

习 题 5.2

1. 证明公式 (5.2.3).

2. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统 α, α 为 X 的有限可测剖分. 证明: $\frac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^n)$ 关于 n 单调递减. 因此 $h_\mu(T,\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^n)$.

3. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 如果 α 为 X 的有限可测剖分, 则 $h_\mu(T,\alpha)\leqslant|\alpha|_\mu$, 其中 $|\alpha|_\mu=\mathrm{Card}\{A\in\alpha:\mu(A)>0\}$.

4. 证明注记 5.2.16.

5. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 如果存在有限可测剖分 α 满足 $\alpha^-=\mathcal{B}$ (如此的 α 称为**强生成子**), 则 $h_\mu(T)=0$.

6. 设 T 为复平面单位圆周 $\mathbb{T}$ 上的无理旋转, λ 为 $\mathbb{T}$ 上的 Lebesgue 测度. 证明: $h_\lambda(T)=0$.

§5.3 Pinsker σ 代数

以下介绍一个重要的概念: Pinsker σ 代数. 一个保测系统的 Pinsker σ 代数可以认为是该系统具有零熵的最大的子 σ 代数. Pinsker σ 代数在熵的分析中是一个不可缺少的工具.

设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, 令 $P_\mu(T)=\{A\in\mathcal{B}:h_\mu(T,\{A,A^c\})=0\}$, 在没有混淆的情况下, 常将 $P_\mu(T)$ 简记为 P_μ.

定理 5.3.1 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 则

(1) $P_\mu(T)$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数;

(2) 有限可测剖分 $\alpha\subset P_\mu(T)$ 当且仅当 $h_\mu(T,\alpha)=H_\mu(\alpha|\alpha^-)=0$ 当且仅当 $\alpha\subseteq\alpha^-$;

(3) $T^{-1}P_\mu(T)=P_\mu(T)(\mathrm{mod}\mu)$;

(4) 对 $k\geqslant 1$, $P_\mu(T)=P_\mu(T^k)$. 如果 T 又是可逆的, 则 $P_\mu(T)=P_\mu(T^{-1})$.

证明 (1) 显然 $\varnothing,X\in P_\mu(T)$. 设 $A,B\in P_\mu(T)$. 因 $(A^c)^c=A$, $A^c\in P_\mu(T)$. 注意到 $\{A,A^c\}\vee\{B,B^c\}\succeq\{A\cup B,(A\cup B)^c\}$, 有

$$\begin{aligned}h_\mu(T,\{A\cup B,(A\cup B)^c\})&\leqslant h_\mu(T,\{A,A^c\}\vee\{B,B^c\})\\&\leqslant h_\mu(T,\{A,A^c\})+h_\mu(T,\{B,B^c\})=0.\end{aligned}$$

因此 $A\cup B\in P_\mu(T)$.

设 $A_i\in P_\mu(T)$, $i\in\mathbb{N}$, 现在, 对 $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}&h_\mu\left(T,\left\{\bigcup_{i=1}^\infty A_i,\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c\right\}\right)\\&\leqslant h_\mu\left(T,\bigvee_{i=1}^k\{A_i,A_i^c\}\right)+H_\mu\left(\left\{\bigcup_{i=1}^\infty A_i,\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c\right\}\Big|\bigvee_{i=1}^k\{A_i,A_i^c\}\right)\\&\leqslant\sum_{i=1}^k h_\mu(T,\{A_i,A_i^c\})+H_\mu\left(\left\{\bigcup_{i=1}^\infty A_i,\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c\right\}\Big|\bigvee_{i=1}^k\{A_i,A_i^c\}\right)\\&=H_\mu\left(\left\{\bigcup_{i=1}^\infty A_i,\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c\right\}\Big|\bigvee_{i=1}^k\{A_i,A_i^c\}\right).\end{aligned}$$

在上述不等式中, 令 $k\to+\infty$, 并利用 Martingale 定理, 有

$$h_\mu\left(T,\left\{\bigcup_{i=1}^\infty A_i,\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c\right\}\right)\leqslant H_\mu\left(\left\{\bigcup_{i=1}^\infty A_i,\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c\right\}\Big|\bigvee_{i=1}^\infty\{A_i,A_i^c\}\right)=0.$$

因此 $\bigcup_{i=1}^\infty A_i\in P_\mu(T)$. 综上所述知 $P_\mu(T)$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数.

(2) 设 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$. 注意到 $\vee_{j=1}^k\{A_j,A_j^c\}\succeq\alpha\succeq\{A_i,A_i^c\}$, 有 $\alpha\subseteq P_\mu(T)$ 当且仅当 $h_\mu(T,\alpha)=H_\mu(\alpha|\alpha^-)=0$ 当且仅当 $\alpha\subseteq\alpha^-$.

(3) 由于对 $A\in\mathcal{B}$,

$$h_\mu(T,\{A,A^c\})=h_\mu(T,T^{-1}\{A,A^c\})=h_\mu(T,\{T^{-1}A,(T^{-1}(A))^c\}),$$

得到 $T^{-1}P_\mu(T)\subseteq P_\mu(T)$. 反之, 设 $A\in P_\mu(T)$ 和 $\alpha=\{A,A^c\}$. 则 $\alpha\subset\alpha^-$. 因 $\alpha\subset P_\mu(T)$, 有 $T^{-i}\alpha\subset T^{-i}P_\mu(T)\subseteq T^{-(i-1)}P_\mu(T)\subset\cdots\subset T^{-1}P_\mu(T)$ 对每个 $i\in\mathbb{N}$

成立. 因 $P_\mu(T)$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数, $T^{-1}P_\mu(T)$ 也为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数. 再注意到 α^- 为 $\mathcal{B}$ 的包含所有 $T^{-i}\alpha, i \in \mathbb{N}$ 的最小的子 σ 代数, $\alpha^- \subset T^{-1}P_\mu(T)$. 这已经说明 $A \in \alpha \subset \alpha^- \subset T^{-1}P_\mu(T)$. 因 A 是任意的, $P_\mu(T) \subseteq T^{-1}P_\mu(T)$.

(4) 对 X 的任意有限可测剖分 α 和 $k \in \mathbb{N}$, 首先有 $h_\mu(T^k, \alpha_0^{k-1}) = kh_\mu(T,\alpha)$(参见命题 5.2.15 的证明). 进而不难算得 $\frac{1}{k}h_\mu(T,\alpha) \leqslant h_\mu(T^k,\alpha) \leqslant kh_\mu(T,\alpha)$. 这说明 $\alpha \subset P_\mu(T)$ 当且仅当 $\alpha \subset P_\mu(T^k)$. 因此 $P_\mu(T) = P_\mu(T^k)$. 最后由注记 5.2.16, 有 $P_\mu(T) = P_\mu(T^{-1})$. □

将 σ 代数 P_μ 称为 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的**Pinsker σ 代数**. 当 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆 Lebesgue 系统时, 由 P_μ 可以确定 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的因子系统 $\pi:(X,\mathcal{B},\mu,T) \to (Z,\mathcal{Z},\nu,S)$ (即 $P_\mu = \pi^{-1}(\mathcal{Z})$), 称 Lebesgue 系统 $(Z,\mathcal{Z},\nu,S)$ 为 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的**Pinsker 因子**.

定义 5.3.2 一个保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 称为**完全正熵系统**, 如果 $P_\mu(T) = \{\varnothing, X\}$. 这等价于 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的每个非平凡因子系统有正熵.

设 $\alpha = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 为 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的可测剖分. 如果对每个 $i \in \mathbb{N}$, 有 $\mu(A_i) < 1$, 则称 α 为**测度非平凡的剖分**. 不难看出

命题 5.3.3 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 则以下性质彼此等价:

(1) $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为完全正熵系统;

(2) X 的每个由两个元素构成的测度非平凡的剖分有正熵;

(3) X 的每个测度非平凡的有限剖分有正熵.

引理 5.3.4 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统, α,β,γ 为 X 的有限可测剖分. 则

(1) 如果 $\beta \preceq \alpha$ 或 $\alpha \preceq \beta$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\alpha|\beta^-) = H_\mu(\alpha|\alpha^-)$;

(2) 如果 $\alpha \preceq \beta$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} H_\mu(\alpha|\beta^- \vee T^{-n}\gamma^-) = H_\mu(\alpha|\beta^-)$.

证明 (i) 首先假设 $\beta \preceq \alpha$. 则 $T^{-n}(\beta^- \vee \bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\alpha) \nearrow \alpha^-$, 因此 $H_\mu(\alpha|T^{-n}(\beta^- \vee \bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\alpha)) \to H_\mu(\alpha|\alpha^-)$. 注意到

$$\begin{aligned} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\alpha|\beta^-\right) &= H_\mu(\alpha|\beta^-) + H_\mu(T\alpha|\alpha\vee\beta^-) + \cdots \\ &\quad + H_\mu(T^{n-1}\alpha|\bigvee_{i=0}^{n-2} T^i\alpha\vee\beta^-) \\ &= H_\mu(\alpha|\beta^-) + H_\mu(\alpha|T^{-1}(\alpha\vee\beta^-)) + \cdots \\ &\quad + H_\mu\left(\alpha|T^{-(n-1)}\left(\bigvee_{i=0}^{n-2} T^i\alpha\vee\beta^-\right)\right) \text{ (由命题 5.2.2 (6))}, \end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{n}H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\alpha|\beta^-) \to H_\mu(\alpha|\alpha^-)$.

(ii) 其次, 假设 $\alpha \preceq \beta$. 则一方面

$$\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\alpha|\beta^-\right) \leqslant \frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\alpha|\alpha^-\right) \to H_\mu(\alpha|\alpha^-) \quad (\text{由 (i)}).$$

另一方面

$$\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\alpha|\beta^-\right) = \frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta|\beta^-\right) - \frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta\Big|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\alpha\vee\beta^-\right).$$

在上式中令 $n\to\infty$, 得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\alpha|\beta^-\right)\\
&\geqslant H_\mu(\beta|\beta^-) - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta\Big|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\alpha\vee\alpha^-\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta|\alpha^-\right) - \frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta\Big|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\alpha\vee\alpha^-\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\alpha|\alpha^-) = H_\mu(\alpha|\alpha^-\right).
\end{aligned}$$

(iii) 以下证明 (2), 假设 $\alpha \preceq \beta$. 首先

$$H_\mu(\alpha|\beta^-\vee T^{-n}\gamma^-) = H_\mu(\beta|\beta^-\vee T^{-n}\gamma^-) - H_\mu(\beta|\alpha\vee\beta^-\vee T^{-n}\gamma^-). \tag{5.3.1}$$

再考虑等式

$$\begin{aligned}
H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta|\beta^-\vee\gamma^-\right) &= H_\mu(\beta|\beta^-\vee\gamma^-) + H_\mu(T\beta|T\beta^-\vee\gamma^-)\\
&\quad + \cdots + H_\mu(T^n\beta|T^n\beta^-\vee\gamma^-)\\
&= H_\mu(\beta|\beta^-\vee\gamma^-) + H_\mu(\beta|\beta^-\vee T^{-1}\gamma^-)\\
&\quad + \cdots + H_\mu(\beta|\beta^-\vee T^{-n}\gamma^-) \ (\text{由命题 5.2.2 (6)}).
\end{aligned}$$

在上式中, 令 $n\to\infty$ 并利用前面的讨论, 得到

$$H_\mu(\beta|\beta^-) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta|\beta^-\vee\gamma^-\right) = \lim_{n\to\infty}H_\mu(\beta|\beta^-\vee T^{-n}\gamma^-).$$

将此应用到等式 (5.3.1) 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}H_\mu(\alpha|\beta^-\vee T^{-n}\gamma^-) &= H_\mu(\beta|\beta^-) - \lim_{n\to\infty}H_\mu(\beta|\alpha\vee\beta^-\vee T^{-n}\gamma^-)\\
&\geqslant H_\mu(\beta|\beta^-) - H_\mu(\beta|\alpha\vee\beta^-) = H_\mu(\alpha|\beta^-).
\end{aligned}$$

反向的不等式是明显的. □

定理 5.3.5 (Pinsker 公式) 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆的保测系统, α,β 为 X 的有限可测剖分. 则

$$h_\mu(T,\alpha\vee\beta)=h_\mu(T,\beta)+H_\mu(\alpha|\beta^T\vee\alpha^-),$$

其中 $\beta^T=\bigvee_{n=-\infty}^{\infty}T^{-n}\beta$.

证明 首先有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i(\alpha\vee\beta)|\alpha^-\vee\beta^-\right)\\
=&\frac{1}{n}\left\{H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta|\alpha^-\vee\beta^-\right)+H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\alpha|\alpha^-\vee\beta^-\vee\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta\right)\right\}\\
=&\frac{1}{n}\left\{H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\beta|\alpha^-\vee\beta^-\right)+\sum_{k=0}^{n-1}H_\mu\left(\alpha|\alpha^-\vee\beta^-\vee\bigvee_{i=0}^{k-1}T^i\beta\right)\right\}.
\end{aligned}$$

在上式中, 令 $n\to\infty$, 利用引理 5.3.4 性质 (1) 和定理 5.2.7(1), 可得

$$h_\mu(T,\alpha\vee\beta)=h_\mu(T,\beta)+H_\mu(\alpha|\beta^T\vee\alpha^-).$$ □

我们不难得到引理 5.3.4 和定理 5.3.5 相对于一个严格 T 不变的子 σ 代数的相对化版本. 例如

定理 5.3.6 (相对的 Pinsker 公式) 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆的保测系统, α,β 为 X 的有限可测剖分和 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{B}$ 严格 T 不变的子 σ 代数 (即 $T^{-1}\mathcal{A}=\mathcal{A}$), 则

$$H_\mu(\alpha\vee\beta|\alpha^-\vee\beta^-\vee\mathcal{A})=H_\mu(\beta|\beta^-\vee\mathcal{A})+H_\mu(\alpha|\alpha^-\vee\beta^T\vee\mathcal{A}).$$

设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, 用 $\mathcal{P}_X$ 表示 X 的全体有限可测剖分.

定理 5.3.7 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统, 则 $P_\mu(T)=\bigvee_{\beta\in\mathcal{P}_X}\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\beta^-$.

证明 选取 X 递增的有限剖分序列 $\xi_k\nearrow P_\mu(T)$. 因 $h_\mu(T,\xi_k)=H_\mu(\xi_k|\xi_k^-)=0$, 所以 $\xi_k\subset\xi_k^-$. 进而

$$\xi_k\subset\xi_k^-=\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\xi_k^-\subset\bigvee_{\beta\in\mathcal{P}_X}\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\beta^-.$$

即 $P_\mu(T)=\bigvee_{k=1}^{+\infty}\xi_k\subset\bigvee_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{n=0}^{+\infty}T^{-n}\xi_k^-\subset\bigvee_{\beta\in\mathcal{P}_X}\bigcap_{n=1}^{\infty}T^{-n}\beta^-$.

另一方面, 固定 $\xi\in\mathcal{P}_X$, 设 $\eta\in\mathcal{P}_X$ 满足 $\eta\subset\bigcap_{n=0}^{+\infty}T^{-n}\xi^-$, 则 $\eta^T\subset\xi^-$ 且

$$H_\mu(\xi\vee\eta|\xi^-\vee\eta^-)\leqslant H_\mu(\xi\vee\eta|\xi^-)=H_\mu(\xi|\xi^-),$$

$$H_\mu(\xi\vee\eta|\xi^-\vee\eta^-)=h_\mu(T,\xi\vee\eta)=h_\mu(T,\xi)+H_\mu(\eta|\xi^T\vee\eta^-)$$
$$\geqslant h_\mu(T,\xi)=H_\mu(\xi|\xi^-).$$

结合上面两个不等式, 有

$$H_\mu(\xi\vee\eta|\xi^-\vee\eta^-)=H_\mu(\xi|\xi^-)=H_\mu(\xi|\xi^-\vee\eta^T)+H_\mu(\eta|\eta^-)$$
$$=H_\mu(\xi|\xi^-)+H_\mu(\eta|\eta^-).$$

这说明 $H_\mu(\eta|\eta^-)=0$, 即 $\eta\subset P_\mu(T)$. 从而对每个 $\xi\in\mathcal{P}_X$, 有 $P_\mu(T)\supset\bigcap_{n=0}^{+\infty}T^{-n}\xi^-$, 这就推得 $P_\mu(T)=\bigvee_{\xi\in\mathcal{P}_X}\bigcap_{n=0}^{+\infty}T^{-n}\xi^-$. □

定理 5.3.8 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统, $\xi\in\mathcal{P}_X$ 和 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{B}$ 严格 T 不变的子 σ 代数. 则 $H_\mu(\xi|\xi^-\vee\mathcal{A})=H_\mu(\xi|\xi^-\vee P_\mu(T)\vee\mathcal{A})$. 特别地,

$$h_\mu(T,\xi)=H_\mu(\xi|\xi^-)=H_\mu(\xi|\xi^-\vee P_\mu(T)).$$

证明 任取有限可测剖分 $\eta\subset P_\mu(T)$, 则由定理 5.3.6 可得

$$H_\mu(\xi\vee\eta|\xi^-\vee\eta^-\vee\mathcal{A})=H_\mu(\eta|\eta^-\vee\xi^T\vee\mathcal{A})+H_\mu(\xi|\xi^-\vee\mathcal{A})$$
$$=H_\mu(\xi|\xi^-\vee\eta^-\vee\mathcal{A})+H_\mu(\eta|\xi\vee\xi^-\vee\eta^-\vee\mathcal{A}),$$

即

$$H_\mu(\xi|\xi^-\vee\eta^-\vee\mathcal{A})=H_\mu(\xi|\xi^-\vee\mathcal{A}).$$

现在选取满足 $\eta_n\nearrow P_\mu(T)$ 的有限可测剖分序列 η_n, 然后利用定理 5.3.1 (3) 可得

$$H_\mu(\xi|\xi^-\vee P_\mu(T)\vee\mathcal{A})=H_\mu(\xi|\xi^-\vee\mathcal{A}).$$ □

定理 5.3.9 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统, $\xi\in\mathcal{P}_X$. 则 $\lim\limits_{k\to\infty}h_\mu(T^k,\xi)=H_\mu(\xi|P_\mu(T))$.

证明 使用定理 5.3.1 (4) 和定理 5.3.8, 一方面

$$\lim_{k\to\infty}\sup h_\mu(T^k,\xi)=\lim_{k\to\infty}\sup H_\mu\left(\xi\Big|\bigvee_{j=1}^{+\infty}T^{-kj}\xi\vee P_\mu(T)\right)\leqslant H_\mu(\xi|P_\mu(T)).$$

另一方面, 有

$$\lim_{k\to\infty}\inf h_\mu(T^k,\xi)=\lim_{k\to\infty}\inf H_\mu\left(\xi\Big|\bigvee_{j=1}^{+\infty}T^{-kj}\xi\right)\geqslant\lim_{k\to\infty}\inf H_\mu(\xi|T^{-k}\xi^-)$$
$$\geqslant H_\mu\left(\xi\Big|\bigcap_{k=1}^{+\infty}T^{-k}\xi^-\right)\geqslant H_\mu(\xi|P_\mu(T))\quad(\text{由定理 5.3.7}).$$ □

习 题 5.3

1. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, 证明: 如果 $T^{-1}\mathcal{B}\neq\mathcal{B}(\mathrm{mod}\mu)$, 则 $h_\mu(T)>0$.

2. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 如果 α,β 为 X 的两个有限可测剖分, 则

$$h_\mu(T,\alpha)\leqslant h_\mu(T,\beta)+H_\mu(\alpha|\beta\vee P_\mu(T)).$$

3. 设 $\mathbb{T}$ 为复平面的单位圆周, $p>1$, $T_p:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ 满足 $T_p(z)=z^p$ 以及 λ 为 $\mathbb{T}$ 上的 Haar 测度, 证明: $h_\lambda(T_p)>0$(实际上 $h_\lambda(T_p)=\log p$).

4. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为完全正熵系统, 则它是遍历系统且当 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 不为平凡系统时, $\mu(\{x\})=0$ 对 $x\in X$.

5. 证明相对的 Pinsker 公式 —— 定理 5.3.6.

6. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆的保测系统, α 为 X 的有限可测剖分以及 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数. 证明: 如果 $T^{-1}\mathcal{A}\subset\mathcal{A}$, 则 $H_\mu(\alpha|\alpha^-\vee P_\mu(T)\vee\mathcal{A})=H_\mu(\alpha|\alpha^-\vee\mathcal{A})$.

§5.4 测度 K 系统

本节将介绍一类重要的正熵保测系统, 它是 1958 年 Kolmogorov(1958) 首先引入的. Rohlin 和 Sinai(1967) 将这类保测系统称为 Kolmogorov 系统.

定义 5.4.1 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 如果存在 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数 $\mathcal{K}$, 使得

$$\mathcal{K}\subset T\mathcal{K},\quad \bigvee_{n=0}^{+\infty}T^n\mathcal{K}=\mathcal{B}\text{ 且 }\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}=\{\varnothing,X\}.$$

则称 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为**Kolmogorov 系统**或简称为 **K 系统**.

引理 5.4.2 每个测度 K 系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 是遍历系统且当 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 不为平凡系统时, $\mu(\{x\})=0$ 对 $x\in X$.

证明 设 $A\in\mathcal{B}$ 为 T 不变, $\varepsilon>0$ 和 $m\in\mathbb{N}$. 则存在 $n_0\geqslant0$ 和子集 $B\in T^{n_0}\mathcal{K}$, 使得 $\mu(A\Delta B)<\varepsilon$. 从而 $T^{-(n_0+m)}B\in T^{-m}\mathcal{K}$ 并且 $\mu(A\Delta T^{-(m+n_0)}B)<\varepsilon$. 因这对任意 $\varepsilon>0$ 成立, 有 $A\in T^{-m}\mathcal{K}$. 进而再由 m 的任意性知 $A\in\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}=\{\varnothing,X\}$. 这说明 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为遍历系统. 显然, 当 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 不为平凡系统时, $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 与有限系统不测度同构. 因此 $\mu(\{x\})=0$ 对 $x\in X$. □

在例 5.2.14 中我们介绍了 Bernoulli 转移系统 $B(\overline{p})$. 在此, 考虑一般形式上的 Bernoulli 系统. 设 $(Y,\mathcal{D},\nu)$ 为一个概率空间. 考虑积空间 $X=Y^{\mathbb{Z}}$, 积测度 $\mu=\nu^{\mathbb{Z}}$ 和积 σ 代数 $\mathcal{B}=\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$. 定义 X 的转移映射 σ 如下: $(\sigma(x))_n=x_{n+1}$ 对 $x=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in X$. 保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,\sigma)$ 称为**Bernoulli 系统**.

命题 5.4.3 每个 Bernoulli 系统为测度 K 系统.

证明　设 $(Y,\mathcal{D},\nu)$ 为一个概率空间, $(X,\mathcal{B},\mu,\sigma)$ 是由 $(Y,\mathcal{D},\nu)$ 生成的 Bernoulli 系统. 对 $A\in\mathcal{D}$, 设 $X(A)=\{x\in X: x_0\in A\}$ 且 $\mathcal{F}=\{X(A): A\in\mathcal{D}\}$. 显然 $\mathcal{F}\subset\mathcal{B}$. 现在取 $\mathcal{K}=\bigvee_{j=0}^{\infty}\sigma^{-j}\mathcal{F}$. 以下验证 $\mathcal{K}$ 满足 $\mathcal{K}\subset\sigma\mathcal{K}$, $\bigvee_{n=0}^{+\infty}\sigma^n\mathcal{K}=\mathcal{B}$ 以及 $\bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma^{-n}\mathcal{K}=\{\varnothing,X\}$. 首先 $\mathcal{K}\subset\sigma\mathcal{K}$, $\bigvee_{n=0}^{+\infty}\sigma^n\mathcal{K}=\mathcal{B}$ 是明显成立的. 现在证明 $\bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma^{-n}\mathcal{K}=\{\varnothing,X\}$. 取定 $A\in\bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma^{-n}\mathcal{K}$. 对每个 $k\in\mathbb{Z}$ 和 $B\in\bigvee_{j=k}^{\infty}\sigma^j\mathcal{F}$, 有 $A\perp_\mu B$, 即 $\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B)$. 因 $\bigvee_{k\in\mathbb{Z}}\bigvee_{j=k}^{\infty}\sigma^j\mathcal{F}=\mathcal{B}$, $A\perp_\mu B$ 对任意 $B\in\mathcal{B}$ 成立, 特别地, $A\perp_\mu A$. 因此 $\mu(A)=0$ 或 1, 即 $A\in\{\varnothing,X\}$. □

注记 5.4.4　从 1958 年到 1969 年, 是否每个测度 Kolmogorov 系统一定为 Bernoulli 系统一直为公开的问题. 1970 年, Ornstein(1970) 首先构造了一个 Lebesgue 空间上的非 Bernoulli 的 Kolmogorov 系统, 从而解决了这一问题 (也可参见文献 (Ornstein-Shields, 1973)); Katok(1980) 构造了光滑的非 Bernoulli 的 Kolmogorov 系统; 1982 年, Kalikow(1982) 给出了一个更容易验证的例子.

我们将以下引理留作习题.

引理 5.4.5　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $k\in\mathbb{N}$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,k)>0$, 使得如果可测剖分 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 和 $\beta=\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$ 满足 $\sum\limits_{j=1}^{k}\mu(A_j\Delta B_j)<\delta$, 那么 $H_\mu(\alpha|\beta)+H_\mu(\beta|\alpha)<\varepsilon$. 进而 $|h_\mu(T,\alpha)-h_\mu(T,\beta)|\leqslant H_\mu(\alpha|\beta)+H_\mu(\beta|\alpha)<\varepsilon$.

定理 5.4.6　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统, $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数. 如果 $T^{-1}\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}T^n\mathcal{A}\nearrow\mathcal{B}$, 则 $P_\mu(T)\subseteq\mathcal{A}_{-\infty}$, 其中 $\mathcal{A}_{-\infty}=\bigcap_{n=1}^{\infty}T^{-n}\mathcal{A}$.

证明　首先, 我们有如下断言: 对每个有限可测剖分 ξ, 有 $H_\mu(\xi|P_\mu(T)\vee\mathcal{A}_{-\infty})=H_\mu(\xi|\mathcal{A}_{-\infty})$.

断言的证明: 首先假设 $\xi\subset\mathcal{A}$, 则

$$
\begin{aligned}
H_\mu(\xi|P_\mu(T)\vee\mathcal{A}_{-\infty}) &\geqslant \lim_{p\to\infty}H_\mu\left(\xi\Big|\bigvee_{i=1}^{\infty}T^{-pi}\xi\vee P_\mu(T)\vee\mathcal{A}_{-\infty}\right)\\
&=\lim_{p\to\infty}H_\mu\left(\xi\Big|\bigvee_{i=1}^{\infty}T^{-pi}\xi\vee\mathcal{A}_{-\infty}\right)\quad(\text{由定理 5.3.8})\\
&\geqslant\lim_{p\to\infty}H_\mu(\xi|T^{-p}\mathcal{A})=H_\mu(\xi|\mathcal{A}_{-\infty}).
\end{aligned}
$$

其次, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 和有限可测剖分 $\xi\subset T^n\mathcal{A}$, 我们可以进行同样的讨论. 最后, 对 X 的任何一个有限可测剖分 $\xi=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 和 $\varepsilon>0$. 选 $\delta=\delta(\varepsilon,k)>0$ 满足引理 5.4.5 的条件. 注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}T^n\mathcal{A}\nearrow\mathcal{B}$, 我们能找到 $n\in\mathbb{N}$ 和有限可测剖分 $\beta=\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}\subset T^n\mathcal{A}$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{k}\mu(A_i\Delta B_i)<\delta$, 进而 $H_\mu(\xi|\beta)+H_\mu(\beta|\xi)<\varepsilon$.

现在

$$\begin{aligned} H_\mu(\xi|\mathcal{A}_{-\infty}) &\leqslant H_\mu(\xi\vee\beta|\mathcal{A}_{-\infty}) \leqslant H_\mu(\beta|\mathcal{A}_{-\infty}) + H_\mu(\xi|\beta) \\ &\leqslant H_\mu(\beta|\mathcal{A}_{-\infty}\vee P_\mu(T)) + \varepsilon \leqslant H_\mu(\xi\vee\beta|\mathcal{A}_{-\infty}\vee P_\mu(T)) + \varepsilon \\ &\leqslant H_\mu(\xi|\mathcal{A}_{-\infty}\vee P_\mu(T)) + H_\mu(\beta|\xi) + \varepsilon \leqslant H_\mu(\xi|\mathcal{A}_{-\infty}\vee P_\mu(T)) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

再因 ε 是任意的, 有 $H_\mu(\xi|\mathcal{A}_{-\infty}) \leqslant H_\mu(\xi|\mathcal{A}_{-\infty}\vee P_\mu(T))$, 而相反方向的不等式是明显成立的, 这就完成断言的证明.

现在从断言知道, 如果有限可测剖分 ξ 满足 $\xi\subset P_\mu(T)\vee\mathcal{A}_{-\infty}$, 则 $\xi\subset\mathcal{A}_{-\infty}$. 因此 $P_\mu(T)\subseteq\mathcal{A}_{-\infty}$. □

定理 5.4.7 (Rohlin-Sinai 定理) 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统, 则存在 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数 $\mathcal{K}$, 使得 $\mathcal{K}\subset T\mathcal{K}$, $\bigvee_{n=0}^{+\infty}T^n\mathcal{K}=\mathcal{B}$ 和 $\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}=P_\mu$. 特别地, $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为 K 系统当且仅当 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为完全正熵系统.

证明 取有限可测剖分 $\xi_n\nearrow\mathcal{B}$, 归纳地定义 $\eta_p=\eta_{p-1}\vee T^{-n_p}\xi_p$, 其中序列 $n_p\in\mathbb{N}$(利用引理 5.3.4(2)) 满足对每个 $q\geqslant 2$ 有以下一组不等式成立

$$H_\mu(\eta_p|\eta_{q-1}^-) - H_\mu(\eta_p|\eta_q^-) < \left(\frac{1}{p}\right)\frac{1}{2^{q-p}}, \quad p=1,2,\cdots,q-1.$$

现在固定 p, 再对 $q=p+1,p+2,\cdots,n$ 求和即可得到

$$H_\mu(\eta_p|\eta_p^-) - H_\mu(\eta_p|\eta_n^-) < \frac{1}{p}$$

对所有 $n>p$ 成立. 设 $\mathcal{E}$ 为有限代数 $\{\eta_n\}$ 生成的 σ 代数, 则 $\eta_n^-\to\bigvee_{n=1}^{\infty}T^{-i}\mathcal{E}$. 再设 $\mathcal{K}=\bigvee_{n=1}^{\infty}T^{-i}\mathcal{E}$. 有 $H_\mu(\eta_p|\eta_p^-)-H_\mu(\eta_p|\mathcal{K})\leqslant\dfrac{1}{p}$. 显然 $T^{-1}\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$, $T^n\mathcal{K}\nearrow\mathcal{B}$ 且 $\lim\limits_{p\to\infty}(H_\mu(\eta_p|\eta_p^-)-H_\mu(\eta_p|\mathcal{K}))=0$. 设 ξ 为有限可测剖分且 $\xi\subset\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}$, 那么 $\xi^T\subset\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}$. 因此

$$\begin{aligned} H_\mu(\xi|\xi^-) &= H_\mu(\eta_p\vee\xi|\eta_p^-\vee\xi^-) - H_\mu(\eta_p|\eta_p^-\vee\xi^T) \\ &\leqslant H_\mu(\eta_p|\eta_p^-) + H_\mu(\xi|\eta_p^-) - H_\mu(\eta_p|\mathcal{K}) \\ &= H_\mu(\xi|\eta_p^-) + (H_\mu(\eta_p|\eta_p^-) - H_\mu(\eta_p|\mathcal{K})). \end{aligned}$$

令 $p\to\infty$, 注意到 $\lim\limits_{p\to\infty}H_\mu(\xi|\eta_p^-)=H_\mu(\xi|\mathcal{K})=0$ 以及 $\lim\limits_{p\to\infty}(H_\mu(\eta_p|\eta_p^-)-H_\mu(\eta_p|\mathcal{K}))=0$, 就得到

$$h_\mu(T,\xi)=H_\mu(\xi|\xi^-)=0.$$

因此, 如果 $\xi\subset\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}$, 则 $\xi\subset P_\mu(T)$, 这说明 $\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}\subseteq P_\mu(T)$. 注意到 $\mathcal{K}$ 满足定理 5.4.6 的条件, 有 $\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}\supseteq P_\mu(T)$. 定理得证. □

定理 5.4.8 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 和 $(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 为两个可逆保测系统, 则

$$P_{\mu\times\nu}(T\times S)=P_\mu(T)\times P_\nu(S).$$

特别地, 两个测度 K 系统的乘积仍为测度 K 系统.

证明 利用 Rohlin-Sinai 定理, 存在 $\mathcal{B}$ 的 σ 子代数 $\mathcal{K}(T)$ 和 $\mathcal{D}$ 的 σ 子代数 $\mathcal{K}(S)$, 满足 $T^n\mathcal{K}(T)\nearrow\mathcal{B}$, $T^{-n}\mathcal{K}(T)\searrow P_\mu(T)$, $S^n\mathcal{K}(S)\nearrow\mathcal{D}$ 和 $S^{-n}\mathcal{K}(S)\searrow P_\nu(S)$. 因此

$$(T\times S)^n\mathcal{K}(T)\times\mathcal{K}(S)\nearrow\mathcal{B}\times\mathcal{D}.$$

由定理 5.4.6 得到

$$\begin{aligned}P_{\mu\times\nu}(T\times S)&\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}[(T\times S)^{-n}\mathcal{K}(T)\times\mathcal{K}(S)]\\&\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}[T^{-n}\mathcal{K}(T)\times\mathcal{D}]=P_\mu(T)\times\mathcal{D}.\end{aligned}$$

同理 $P_{\mu\times\nu}(T\times S)\subset\mathcal{B}\times P_\nu(S)$. 这就得到 $P_{\mu\times\nu}(T\times S)\subset P_\mu(T)\times P_\nu(S)$. 而相反的包含关系是显然成立的, 从而定理得证. □

一个保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 称为**序 k 强混合的**, 如果对任意 $A_0,A_1,\cdots,A_k\in\mathcal{B}$,

$$\lim_{n_1,n_2,\cdots,n_k\to+\infty}\mu(A_0\cap T^{-n_1}A_1\cap\cdots\cap T^{-(n_1+n_2+\cdots+n_k)}A_k)=\mu(A_0)\mu(A_1)\cdots\mu(A_k).\tag{5.4.1}$$

如果对每个 $k\in\mathbb{N}$, $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 均为序 k 强混合的, 则称 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为**完全强混合**系统. 显然, 序 1 强混合性等价于强混合性. 在遍历理论中最著名的公开问题之一是以下的**Rohlin 问题**: 是否强混合蕴含完全强混合?

以下将证明测度 K 系统为完全强混合系统, 为此还需要另外几个引理. 首先将以下 Pinsker 不等式留给读者作为练习.

引理 5.4.9 (Pinsker 不等式) 设 $p_i,q_i>0,i=1,2,\cdots,l$ 满足 $\sum_{i=1}^{l}p_i=1$ 和 $\sum_{i=1}^{l}q_i\leqslant 1$. 则

$$\sum_{i=1}^{l}p_i\log\left(\frac{p_i}{q_i}\right)\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{l}|p_i-q_i|\right)^2}{2}\log 2.$$

引理 5.4.10 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, α,β 为 X 的两个有限可测剖分以及 $\varepsilon>0$. 如果 $H_\mu(\alpha)-H_\mu(\alpha|\beta)<\frac{\varepsilon^2}{2}\log 2$, 则 $\sum_{B\in\beta}\sum_{A\in\alpha}|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)|<\varepsilon$.

证明 由 Pinsker 不等式,

$$
\begin{aligned}
H_\mu(\alpha)-H_\mu(\alpha|\beta) &= -\sum_{A\in\alpha}\mu(A)\log\mu(A)+\sum_{B\in\beta}\sum_{A\in\alpha}\mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}\\
&=\sum_{B\in\beta}\sum_{A\in\alpha}\mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)\mu(B)}\\
&\geqslant\left(\frac{1}{2}\log 2\right)\left(\sum_{B\in\beta}\sum_{A\in\alpha}|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)|\right)^2.
\end{aligned}
$$

这说明 $\sum_{B\in\beta}\sum_{A\in\alpha}|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)|<\varepsilon$. □

定理 5.4.11 测度 K 系统为完全强混合.

证明 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为测度 K 系统和 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数 $\mathcal{K}$ 满足

$$
\mathcal{K}\subset T\mathcal{K},\quad \bigvee_{n=0}^{+\infty}T^n\mathcal{K}=\mathcal{B}\text{ 且 }\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}=\{\varnothing,X\}.
$$

因 $\bigvee_{n=0}^{+\infty}T^n\mathcal{K}=\mathcal{B}$, 为说明 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为完全强混合的, 我们只需证明对任意 $k\in\mathbb{N}$ 和 $A_0,A_1,\cdots,A_k\in\bigcup_{n=0}^{+\infty}T^n\mathcal{K}$, (5.4.1) 成立.

现设 $A_0,A_1,\cdots,A_k\in\bigcup_{n=0}^{+\infty}T^n\mathcal{K}$, 则存在 $m_0\in\mathbb{N}$, 使得 $A_0,A_1,\cdots,A_k\in T^{m_0}\mathcal{K}$. 固定 $\varepsilon>0$. 因 $\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathcal{K}=\{\varnothing,X\}$ 和 $T^{-(n+1)}\mathcal{K}\subset T^{-n}\mathcal{K}$, 对 $n\in\mathbb{Z}_+$,

$$
\lim_{n\to+\infty}H_\mu(\{A_i,A_i^c\}|T^{-n}\mathcal{K})=H_\mu(\{A_i,A_i^c\})
$$

对每个 $i\in\{0,1,\cdots,k\}$ 成立. 因此, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant N$ 时,

$$
H_\mu(\{A_i,A_i^c\})-H_\mu(\{A_i,A_i^c\}|T^{-n}\mathcal{K})<\frac{\varepsilon^2}{2}\log 2
$$

对每个 $i\in\{0,1,\cdots,k\}$ 成立. 特别地, 对任意 $n\geqslant N$ 和 $B\in T^{-n}\mathcal{K}$, $H_\mu(\{A_i,A_i^c\})-H_\mu(\{A_i,A_i^c\}|\{B,B^c\})<\frac{\varepsilon^2}{2}\log 2$ 对每个 $i\in\{0,1,\cdots,k\}$ 成立. 由引理 5.4.10, 对任意 $n\geqslant N$ 和 $B\in T^{-n}\mathcal{K}$, 有

$$
|\mu(A_i\cap B)-\mu(A_i)\mu(B)|<\varepsilon \tag{5.4.2}
$$

对 $i\in\{0,1,\cdots,k\}$ 成立. 当 $n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k\geqslant N+m_0$ 时, 使用 (5.4.2) 和事实 $A_0,A_1\cdots,A_k\in T^{m_0}\mathcal{K}$, 有

$$
\begin{aligned}
&|\mu(A_{k-1}\cap T^{-n_k}A_k)-\mu(A_{k-1})\mu(A_k)|<\varepsilon,\\
&|\mu(A_{k-2}\cap T^{-n_{k-1}}(A_{k-1}\cap T^{-n_k}A_k))-\mu(A_{k_2})\mu(A_{k-1}\cap T^{-n_k}A_k)|<\varepsilon,\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&|\mu(A_0\cap T^{-n_1}(A_1\cap T^{-n_2}(A_2\cap\cdots\cap T^{-n_k}A_k\cap\cdots)))\\
&-\mu(A_0)\mu(A_1\cap T^{-n_2}(A_2\cap\cdots\cap T^{-n_k}A_k\cap\cdots))|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

从上面的一组不等式容易推得：当 $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k \geqslant N + m_0$ 时，

$$|\mu(A_0 \cap T^{-n_1}(A_1) \cap T^{-(n_1+n_2)} A_2 \cap \cdots \cap T^{-(n_1+\cdots+n_k)} A_k) - \mu(A_0)\mu(A_1)\cdots\mu(A_k)| < k\varepsilon.$$

因 $\varepsilon > 0$ 是任意的，

$$\lim_{n_1, n_2, \cdots, n_k \to +\infty} \mu(A_0 \cap T^{-n_1} A_1 \cap T^{-(n_1+n_2)} A_2 \cap \cdots \cap T^{-(n_1+n_2+\cdots+n_k)} A_k)$$
$$= \mu(A_0)\mu(A_1)\cdots\mu(A_k).$$

这就完成了证明. □

习 题 5.4

1. 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为 K 系统. 证明：$(X, \mathcal{B}, \mu, T^k)(k \neq 0)$ 也为 K 系统.
2. 证明 Kolmogorov 属性对因子遗传.
3. 证明引理 5.4.5 和引理 5.4.9.
4. 设 $\mathbb{T}$ 为复平面的单位圆周，$p > 1$, $T_p : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 满足 $T_p(z) = z^p$ 以及 λ 为 $\mathbb{T}$ 上的 Haar 测度，证明：$(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \lambda, T_p)$ 为 Bernoulli 系统.
5. 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为可逆保测系统，α 为 X 的一个有限可测剖分. 则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对任意 K 分离的非空有限集 $E \subset \mathbb{Z}$，有

$$\left| \frac{1}{|E|} H_\mu \left(\bigvee_{i \in E} T^{-i} \alpha | P_\mu(T) \right) - H_\mu(\alpha | P_\mu(T)) \right| < \varepsilon,$$

这里，$\mathbb{Z}$ 的子集称为 K 分离，如果它的任意两个不同元素之差的绝对值大于 K.

§5.5 注 记

本章的内容是熵的经典理论，§5.1 和 §5.2 主要参考和借鉴了 Glasner(2003), Walters(1982), Denker etc.(1976) 以及 Petersen (1983). §5.3 和 §5.4 主要来源于 Parry(1981) 和 Glanser(2003). 关于 Rohlin 问题：Host(1991) 对相对于 Lebesgue 测度奇异的测度证明了强混合性等价于完全强混合性; Kalikow(1984) 对阶为 1 的保测系统证明了强混合性等价于完全强混合性. 随后，Ryzhikov(1992) 将 Kalikow 的结果推广到有限阶保测系统情形; Ledrappier(1978) 构造了一个 $\mathbb{Z}^2$ 作用下非序 5 强混合的测度强混合系统.

第 6 章　熵与局部化

上一章介绍了熵的经典理论, 引入了测度 Pinsker σ 代数和测度 Kolmogorov 系统并研究了其基本属性. 为了研究测度 Kolmogorov 系统的拓扑对应, Blanchard 等人在拓扑动力系统中引入了一致正熵和完全正熵的概念. 通过将熵的概念局部化, 可以得到拓扑 Pinsker 因子的存在性. 本章主要介绍最近十多年来关于熵的局部化理论研究的成果, 特别是拓扑 K 系统、熵的局部变分原理和熵串的概念及其基本性质. 具体来说, §6.1 将引入测度 Kolmogorov 系统的拓扑对应: 拓扑 K 系统; §6.2 首先局部化拓扑熵的概念引入拓扑熵串, 然后通过证明拓扑熵串具有提升性质说明每个动力系统存在最大的零熵因子; §6.3 将对可测覆盖引入两种测度熵并研究其基本属性, 进而给出 Glasner 和 Weiss 关于开覆盖的拓扑熵和测度熵内在关系的一个定理; §6.4 首先局部化测度熵的概念, 引入测度熵串并研究其基本属性, 然后通过证明测度熵串具有提升性质说明每个保测系统存在最大的零熵因子; §6.5 将建立相对于开覆盖的熵的局部变分原理; §6.6 获得了两种熵串的变分关系.

§6.1　拓扑 K 系统

在前面的章节, 我们已经看到拓扑动力系统和遍历系统有着许多平行之处. 例如, 遍历理论中的遍历性、弱混合性和强混合性, 在拓扑动力系统中有传递性、拓扑弱混合性和拓扑强混合性与之相对应. 测度 Kolmogorov 系统是遍历理论中一类非常重要的系统. 在遍历理论中一个可逆保测系统为测度 Kolmogorov 系统当且仅当它具有以下属性之一: (1) 它为完全正熵系统, 即任意非平凡的因子系统有正熵; (2) 每个由两个测度非平凡的元素构成的剖分有正熵; (3) 每个由有限个测度非平凡的元素构成的剖分有正熵. 本节从测度 Kolmogorov 系统的上述三个等价属性入手, 将引入和研究测度 Kolmogorov 系统的拓扑对应物: 完全正熵系统、n 一致正熵系统和拓扑 Kolmogorov 系统.

定义 6.1.1　*设 (X,T) 为动力系统和 $n \geqslant 2$. 如果 X 的每个由 n 个非稠密开集构成的开覆盖均具有正拓扑熵, 则称 (X,T) 为 n* **一致正熵系统***; 如果对每个 $n \geqslant 2$, (X,T) 均为 n 一致正熵系统, 那么称 (X,T) 为* **完全一致正熵系统***或***拓扑 K 系统**.

易见, (X,T) 为完全一致正熵系统当且仅当 X 的每个由有限个非稠密开集构成的开覆盖具有正拓扑熵. 当 $n=2$ 时, 将 2 一致正熵系统简称为**一致正熵系统**; 另外, 如果动力系统 (X,T) 的任意非平凡因子都具有正拓扑熵, 则称其为**完全正熵**

系统. 不难看出, n 一致正熵、完全一致正熵和完全正熵属性均对因子保持; 每个一致正熵系统具有完全正熵属性. 在本节后面的部分将说明存在非一致正熵的完全正熵系统. 需要指出的是: 从我们的定义来说, 平凡系统既为完全一致正熵系统又为完全正熵系统.

定义 6.1.2　设 (X,T) 为动力系统.

(1) 设 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 为 X 的 n 个非空子集 $(n\geqslant 2)$. 称 (X,T) 相对于 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 具有**属性** P_n, 如果存在 $N>0$, 使得对任意 $k\geqslant 2$ 和 $s=(s(1),\cdots,s(k))\in\{1,2,\cdots,n\}^k$, 存在 $y\in X$ 满足 $y\in U_{s(1)},\cdots,T^{(k-1)N}(y)\in U_{s(k)}$;

(2) 对 $n\geqslant 2$, 称 (X,T) 具有**属性** P_n, 如果对 X 的任意 n 个非空开集 $U_1,U_2,\cdots,U_n$, (X,T) 相对于 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 具有属性 P_n;

(3) 称 (X,T) 具有**属性** P, 如果对每个 $n\geqslant 2$, (X,T) 具有属性 P_n.

显然, 每个 Bernolli 系统具有属性 P, 每个具有属性 P 系统为拓扑弱混合的.

引理 6.1.3　假设动力系统 (X,T) 相对于 n 个非空子集 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ $(n\geqslant 2)$ 具有属性 P_n 且 $\bigcap_{i=1}^n U_i=\varnothing$. 如果 X 的开覆盖 $\mathcal{V}=\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$ 满足 $U_i\subset V_i^c$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $h_{\rm top}(T,\mathcal{V})>0$.

证明　因 (X,T) 相对于 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 具有属性 P_n, 所以存在 $N>0$, 使得对任意 $k\geqslant 2$ 和 $s=(s(1),\cdots,s(k))\in\{1,2,\cdots,n\}^k$, 能找到 $z^k(s)\in\bigcap_{i=0}^{k-1}T^{-iN}U_{s(i+1)}$. 这样, 对任意 $k\geqslant 2$, 设 $X_k=\{z^k(s):s\in\{1,2,\cdots,n\}^k\}$. 由于 $U_i\subset V_i^c$, $i=1,2,\cdots,n$, 对任意 $t\in\{1,2,\cdots,n\}^k$, 有 $|\bigcap_{i=0}^{k-1}T^{-iN}V_{t(i+1)}\cap X_k|\leqslant(n-1)^k$. 结合这一事实和 $|X_k|=n^k$, 可得 $N(\bigvee_{i=0}^{kN-1}T^{-i}\mathcal{V})\geqslant N(\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-iN}\mathcal{V})\geqslant\dfrac{n^k}{(n-1)^k}$. 因此 $h_{\rm top}(T,\mathcal{V})=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{kN}H(\bigvee_{i=0}^{kN-1}T^{-i}\mathcal{V})\geqslant\dfrac{1}{N}\log\left(\dfrac{n}{n-1}\right)>0$. □

作为引理 6.1.3 的直接应用, 有

引理 6.1.4　每个具有属性 P 的动力系统为完全一致正熵系统; 特别地, 每个 Bernolli 系统为完全一致正熵系统.

引理 6.1.5　每个一致正熵系统为弱混合系统.

证明　假设 (X,T) 不是弱混合系统. 由定理 1.4.5(2) 知道, 存在 X 的两个非空开集 U,V, 使得 $N(U,U)\cap N(U,V)=\varnothing$. 显然 $U\cap V=\varnothing$. 取具有非空内部的闭子集 U_1,V_1, 使得 $U_1\subseteq U$ 和 $V_1\subseteq V$.

由于对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$ 均有 $U_1\cap T^{-n}U_1=\varnothing$ 或 $U_1\cap T^{-n}V_1=\varnothing$ 成立, 于是存在序列 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, 使得 $U_1\subseteq T^{-n}W_n$ 对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$ 成立, 这里 $W_n=U_1^c$ 或 V_1^c.

设 $\mathcal{V}=\{U_1^c,V_1^c\}$, 则 $\mathcal{V}$ 为 X 的一个由非稠密开集构成的开覆盖. 对每个 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 考虑第一个使得 $T^ix\in U_1$ 的 $i\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$(如果这样的 i 存在的

话). 易验证 $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{V}$ 有一个由如下子集构成的子覆盖:

$$U_1^c\cap\cdots\cap T^{-(i-1)}U_1^c\cap T^{-i}W_0\cap T^{-(i+1)}W_1\cap\cdots\cap T^{-(n-1)}W_{n-1-i},\quad i=0,1,\cdots,n-1$$

以及 $\bigcap\limits_{i=0}^{n-1} T^{-i}U_1^c$. 这说明对所有 $n\in\mathbb{N}$, 均有 $N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{V})\leqslant n+1$. 因此 $h_{\text{top}}(T,\mathcal{V})=0$, 所以 (X,T) 不为一致正熵系统. □

在下面引理的证明中我们将使用熵的变分原理 (参见定理 6.5.2).

引理 6.1.6 设 (X,T) 为完全正熵系统, 则存在 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得 $\text{supp}(\mu)=X$.

证明 设 $\text{supp}(X)=\bigcup_{\theta\in\mathcal{M}(X,T)}\text{supp}(\theta)$, 则存在 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得 $\text{supp}(\mu)=\text{supp}(X)$. 以下证明 $\text{supp}(\mu)=X$. 如若不然, $\text{supp}(\mu)\neq X$, 将 T 不变的闭子集 $\text{supp}(\mu)$ 收缩成一个不动点 p, 得到 (X,T) 的一个非平凡的因子系统, 记为 (Y,S). 由于 $\mathcal{M}(Y,S)=\{\delta_p\}$, 使用熵的变分原理 (参见定理 6.5.2) 知 $h_{\text{top}}(S)=h_{\delta_p}(S)=0$, 这与 (X,T) 为完全正熵系统矛盾. □

例 6.1.7 设 $\Omega=\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$ 和 $\sigma:\Omega\to\Omega$ 是左转移. 考虑 $X=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}\cup\{0,2\}^{\mathbb{Z}}$ 和 $T=\sigma|_X$, 则 (X,T) 为动力系统. 由于 $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}},\sigma)$ 和 $(\{0,2\}^{\mathbb{Z}},\sigma)$ 为 Bernoulli 系统, 它们为完全正熵系统. 由于 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 和 $\{0,2\}^{\mathbb{Z}}$ 有公共点 $(\cdots,0,0,\cdots)$, (X,T) 为完全正熵系统. 显然, (X,T) 不是传递系统, 因此由引理 6.1.5 知, (X,T) 不为一致正熵系统. 同时也不难看出, X 上没有遍历的 T 不变的 Borel 概率测度具有全支撑.

以下将说明如果动力系统 (X,T) 具有全支撑的测度 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得 $(X,\mathcal{B}_X,\mu,T)$ 为测度完全正熵系统, 则 (X,T) 为完全一致正熵系统. 为此还需要以下两个引理 (留作习题):

引理 6.1.8 设 X 为紧度量空间, μ 为 Borel σ 代数 $\mathcal{B}_X$ 上的无原子的概率测度, 即 $\mu(\{x\})=0$ 对 $x\in X$ 成立. 如果 $B\in\mathcal{B}_X$ 满足 $\mu(B)\geqslant r>0$, 则对任意 $0\leqslant\theta\leqslant r$, 存在 Borel 集 B_θ, 使得 $B_\theta\subset B$ 且 $\mu(B_\theta)=\theta$.

设 (X,T) 为动力系统. 如果 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为 X 的有限覆盖以及 $1\leqslant k\leqslant n$, 则

$$k\alpha=\{A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}:1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\}$$

仍为 X 的有限覆盖.

引理 6.1.9 设 (X,T) 为动力系统, 则

(1) 如果 α 为 X 的有限覆盖且 $1\leqslant k\leqslant \text{Card}\alpha$, 那么 $N(\alpha)\leqslant kN(k\alpha)$, 并且对每个 $m\in\mathbb{Z}_+$, $T^{-m}(k\alpha)=kT^{-m}(\alpha)$;

(2) 如果 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{l-1}$ 为 X 的 l 个有限开覆盖, 则 $k\alpha_0\vee k\alpha_1\vee\cdots\vee k\alpha_{l-1}$ 为

$k^l(\alpha_0 \vee \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_{l-1})$ 的子覆盖, 其中 $1 \leqslant k \leqslant \min_{0\leqslant i\leqslant l-1} \mathrm{Card}\alpha_i$, 且

$$k^l N(k\alpha_0 \vee k\alpha_1 \vee \cdots \vee k\alpha_{l-1}) \geqslant k^l N(k^l(\alpha_0 \vee \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_{l-1})) \geqslant N(\alpha_0 \vee \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_{l-1});$$

(3) 如果 α 为 X 的有限覆盖且 $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{Card}\alpha$, 则 $h_c(T, k\alpha) \geqslant h_c(T,\alpha) - \log k$.

有了以上准备, 现在我们可以证明

定理 6.1.10 设 (X,T) 为动力系统. 假设存在 $\mu \in M(X,T)$, 使得 $(X,\mathcal{B}_X,\mu,T)$ 为测度完全正熵系统且 $\mathrm{supp}(\mu) = X$, 则 (X,T) 为完全一致正熵系统.

证明 当 (X,T) 为平凡系统时, 由定义知它为完全一致正熵系统. 以下设 (X,T) 为非平凡系统. 因 $(X,\mathcal{B}_X,T,\mu)$ 为测度完全正熵系统, 所以 μ 是无原子的测度 (参见习题 5.3(4)) 且 Pisker σ 代数 $P_\mu = \{X, \varnothing\}$. 设 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ 为 X 的开覆盖且每个 U_i 在 X 中是非稠密的. 取 $r = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\mu(U_i^c)\}$. 由于 $\mathrm{supp}(\mu) = X$ 和每个 U_i 在 X 中是非稠密的, 所以 $r > 0$. 现在选取 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $0 < \dfrac{1}{k} < r$, $k \geqslant n+1$. 由引理 6.1.8, 存在 X 的 Borel 剖分 $\alpha = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$, 使得 $B_i \subset U_i^c, i = 1,2,\cdots,n$ 以及 $\mu(B_j) = \dfrac{1}{k}$, 对 $j = 1,2,\cdots,k$.

因 $\lim\limits_{n\to+\infty} h_\mu(T^n,\alpha) = H_\mu(\alpha|P_\mu) = H_\mu(\alpha) = \log k$ (由定理 5.3.9 和 $P_\mu = \{X,\varnothing\}$), 所以存在 $l \in \mathbb{N}$ 满足 $h_\mu(T^l,\alpha) > \log\,(k-1)$. 设 $\mathcal{V} = \{B_1^c, B_2^c, \cdots, B_k^c\}$. 易见 $\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V} = \{\bigcup_{i\neq 1} B_i, \bigcup_{i\neq 2} B_i, \cdots, \bigcup_{i\neq k} B_i\} = (k-1)\alpha$. 从而

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U}) &\geqslant \frac{1}{l}h_{\mathrm{top}}(T^l,\mathcal{U}) = \frac{1}{l}h_c(T^l,\mathcal{U}) \geqslant \frac{1}{l}h_c(T^l,\mathcal{V}) \\ &\geqslant \frac{1}{l}(h_c(T^l,\alpha) - \log\,(k-1)) \quad (\text{由引理 6.1.9 的 (4)}) \\ &\geqslant \frac{1}{l}(h_\mu(T^l,\alpha) - \log\,(k-1)) > 0. \end{aligned}$$

因此 (X,T) 为完全一致正熵系统. □

对 $n \geqslant 2$, 由定义知 $n+1$ 一致正熵系统一定为 n 一致正熵系统; 在本节的余下部分, 我们的目的是举例说明 n 一致正熵与 $n+1$ 一致正熵是不同的动力学性质. 为此先引入一些记号. 对 $p \geqslant 2$, 设 $\Lambda = \{0,1,\cdots,p-1\}$ 具有离散拓扑, $\Sigma = \Lambda^{\mathbb{N}}$ 具有积拓扑和 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ 为左转移映射. 对 $n \geqslant 2$ 和 $a = (a_1,a_2,\cdots,a_n) \in \Lambda^n$ (一个长为 n 的块), 定义 $|a| = n$, $\sigma(a) = (a_2,\cdots,a_n)$ 和 $P(a) = (a_2,\cdots,a_n,a_1)$. 我们说 a 在 $x = (x_1,x_2,\cdots) \in \Sigma$ 或 $x \in \Lambda^m$, $m \geqslant n$ 中出现, 如果存在 $j \in \mathbb{N}$ 满足 $a = (x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+n-1})$ (此时, 简记为 $a < x$). 用 t^i 表示 $t\cdots t$(i 次乘积). 对 $b = (b_1,\cdots,b_m) \in \Lambda^m$, 令 $ab = (a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m) \in \Lambda^{n+m}$. 对 $X \subset \Sigma$ 和 $A \subset X$, 设 $A^c = X \setminus A$ 和

$$[a_1,\cdots,a_n] = \{y \in X : (y_1,\cdots,y_n) = (a_1,\cdots,a_n)\}.$$

对 X 的开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_0,U_1,\cdots,U_{p-1}\}$ 和 $K\subset\Lambda^n$, 如果

$$X=\bigcup_{(i_0,\cdots,i_{n-1})\in K}U_{i_0}\cap\sigma^{-1}U_{i_1}\cap\cdots\cap\sigma^{-(n-1)}U_{i_{n-1}},$$

我们就说 $(K,\mathcal{U})$ 覆盖了 X. 进而, 每个 $w\in K$ 称为一个长为 n 的 $\mathcal{U}$ **命名**.

我们将构造 (Σ,σ) 的一个传递子转移系统 (X,σ), 使得 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ 为 (X,σ) 的传递点且满足 (1) (X,σ) 是 2 一致正熵系统; (2) $\mathcal{U}=\{[1]^c,[2]^c,[3]^c\}$ 具有零拓扑熵.

更确切地说, 有

定理 6.1.11 *存在 2 一致正熵但非 3 一致正熵的系统.*

证明 设 $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足 $(\phi(1),\phi(2),\cdots)=(1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,\cdots)$.

取 $A_1=(00123000)$, $n_1=|A_1|$ 和 $\mathcal{U}_1=\{A_1,\sigma^{\phi(1)}(A_1)0^{\phi(1)}\}$. 设

$$C_0^1=A_10^{n_1}=A_{\phi(1)}0^{n_{\phi(1)}}\text{和}C_1^1=\sigma(A_1)0^10^{n_1}=\sigma^{\phi^2(1)}(A_{\phi(1)})0^{\phi^2(1)}0^{n_{\phi(1)}}.$$

假设

$$\{D_1^1\cdots D_{n_1}^1,D_{n_1+1}^1\cdots D_{2n_1}^1,\cdots,D_{n_12^{n_1}-n_1+1}^1\cdots D_{n_12^{n_1}}^1\}=\{C_0^1,C_1^1\}^{n_1}.$$

设

$$\begin{aligned}&A_2=A_10^{n_1}D_1^1\cdots D_{n_1}^1D_{n_1+1}^1\cdots D_{2n_1}^1\cdots D_{n_12^{n_1}-n_1+1}^1\cdots D_{n_12^{n_1}}^1,\\&n_2=|A_2|\text{ 和 }\mathcal{U}_2=\{A_2,\sigma^{\phi(2)}(A_2)0^{\phi(2)}\}.\end{aligned}$$

如果 $A_1,\cdots,A_k$ 和 $\mathcal{U}_1,\cdots,\mathcal{U}_k$ 已经被定义, 设

$$C_0^k=A_{\phi(k)}0^{n_{\phi(k)}}\quad\text{和}\quad C_1^k=\sigma^{\phi^2(k)}(A_{\phi(k)})0^{\phi^2(k)}0^{n_{\phi(k)}}.$$

假设 $\{D_1^k\cdots D_{n_k}^k,D_{n_k+1}^k\cdots D_{2n_k}^k,\cdots,D_{n_k2^{n_k}-n_k+1}^k\cdots D_{n_k2^{n_k}}^k\}=\{C_0^k,C_1^k\}^{n_k}$. 并设

$$\begin{aligned}&A_{k+1}=A_k0^{n_k}D_1^k\cdots D_{n_k}^kD_{n_k+1}^k\cdots D_{2n_k}^k\cdots D_{n_k2^{n_k}-n_k+1}^k\cdots D_{n_k2^{n_k}}^k,\\&n_{k+1}=|A_{k+1}|\text{ 和 }\mathcal{U}_{k+1}=\{A_{k+1},\sigma^{\phi(k+1)}(A_{k+1})0^{\phi(k+1)}\}.\end{aligned}$$

则 $n_{k+1}=2n_k+2n_{\phi(k)}n_k2^{n_k}=2n_k(1+n_{\phi(k)}2^{n_k})$. 设 $x=\lim A_k$ 和 $X=\omega(x,\sigma)$. 我们断言: (X,σ) 为我们所需要的系统.

首先说明 (X,σ) 为一致正熵系统. 设 $\{U,V\}$ 是 X 的开覆盖且 U,V 为 X 的非稠密子集. 取非空开集 U_0,V_0, 使得 $U_0\subseteq V^c$, $V_0\subseteq U^c$. 因 x 为 (X,σ) 的传递点, 存在非负整数 r 和自然数 i, 使得 $\sigma^rx\in U_0$, $\sigma^{r+i}x\in V_0$.

令 $U_1 = \sigma^{-r}U_0$ 和 $V_1 = \sigma^{-r}V_0$. 则 U_1 为 x 的邻域, V_1 为 $\sigma^i(x)$ 的邻域. 从 ϕ 的定义知存在 k, 使得 $\phi(k) = i$, $U_2 = [A_k] \subset U_1$ 以及 $V_2 = [\sigma^i A_k 0^i] \subset V_1$. 注意到 $A_k \neq \sigma^i A_k 0^i$. 因此 $U_2 \cap V_2 = \varnothing$, 自然地, $V_2 \subset U_2^c$ 和 $U_2 \subset V_2^c$. 易见 $\mathcal{U}_k = \{A_k, \sigma^i(A_k)0^i\}$.

从 ϕ 的定义知存在无穷多个 j, 使得 $\phi(j) = k$. 从而

$$C_0^j = A_k 0^{n_k} \text{ 并且 } C_1^j = \sigma^i(A_k)0^i 0^{n_k},$$

以及

$$A_{j+1} = A_j 0^{n_j} D_1^j \cdots D_{n_j}^j D_{n_j+1}^j \cdots D_{2n_j}^j \cdots D_{n_j 2^{n_j} - n_j + 1}^j \cdots D_{n_j 2^{n_j}}^j,$$

这里 $D_{1+ln_j}^j \cdots D_{(l+1)n_j}^j \in \{C_0^j, C_1^j\}^{n_j}$ 对 $l = 0, 1, \cdots, 2^{n_j} - 1$ 成立.

易见 (X, σ) 相对于 U_2, V_2 具有属性 P_2, 再由引理 6.1.3 知 $h_{\text{top}}(\sigma, \{U_2^c, V_2^c\}) > 0$ (设 $N = 2n_k$). 进而因 $\{U_1^c, V_1^c\}$ 为 $\{U_2^c, V_2^c\}$ 的加细, 所以 $h_{\text{top}}(\sigma, \{U_1^c, V_1^c\}) > 0$, 即 $h_{\text{top}}(\sigma, \{U_0^c, V_0^c\}) = h_{\text{top}}(\sigma, \sigma^{-r}\{U_0^c, V_0^c\}) > 0$. 注意到 $\{U, V\}$ 为 $\{U_0^c, V_0^c\}$ 的加细, 有 $h_{\text{top}}(\sigma, \{U, V\}) > 0$. 至此已经说明 (X, σ) 为一致正熵系统.

现在证明 $\mathcal{U} = \{[1]^c, [2]^c, [3]^c\}$ 具有零拓扑熵. 设 $n \in \mathbb{N}$, 因 x 为传递点, 所以 $X = \{y \in X : y \in [x_j \cdots x_{j+n-1}], \exists\, j \in \mathbb{N}\}$. 对 $\{i_0, \cdots, i_{n-1}\} \in \{1, 2, 3\}^n$, 令

$$\alpha(i_0, \cdots, i_{n-1}) = [i_0]^c \cap \sigma^{-1}[i_1]^c \cap \cdots \cap \sigma^{-(n-1)}[i_{n-1}]^c.$$

易见 $[y_1, \cdots, y_n] \subset \alpha(i_0, \cdots, i_{n-1})$ 当且仅当 $y_{j+1} \in [i_j]^c$ 对 $0 \leqslant j \leqslant n-1$ 成立, 以及

$$N(\mathcal{U}_0^{n-1}) = \min\{|K| : K \subset \{1, 2, 3\}^n \text{和} \bigcup_{i_0, \cdots, i_{n-1} \in K} \alpha(i_0, \cdots, i_{n-1}) = X\}.$$

由于

$$[1]^c = [0] \cup [2] \cup [3], \quad [2]^c = [0] \cup [1] \cup [3], \quad [3]^c = [0] \cup [1] \cup [2],$$

所以对每对 $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, 存在 $k \in \{1, 2, 3\}$, 使得 $[i] \cup [j] \subset [k]^c$. 因此, 如果 $a = (a_1, \cdots, a_n), b = (b_1, \cdots, b_n) \in \{0, 1, 2, 3\}^n$, 则存在 $c = (c_1, \cdots, c_n) \in \{1, 2, 3\}^n$ 满足

$$[a_1, \cdots, a_n] \cup [b_1, \cdots, b_n] \subset \alpha(c_1, \cdots, c_n).$$

现在固定 $k \in \mathbb{N}$. 对每个 $i \leqslant k$, 选取 $(c_1^i, \cdots, c_{n_i}^i) \in \{1, 2, 3\}^{n_i}$, 使得

$$[A_i] \cup [\sigma^{\phi(i)} A_i 0^{\phi(i)}] \subset \alpha(c_1^i, \cdots, c_{n_i}^i).$$

那么我们断言 X 被以下一些长为 n_k 的 $\mathcal{U}$ 命名覆盖.

$$P^j(y_1^i, \cdots, y_{n_k}^i),$$
$$(1^j y_1^i, \cdots, y_{n_k-j}^i),$$
$$(y_{j+1}^i, \cdots, y_{n_k}^i 1^j), \quad 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i,$$

在此记

$$((c_1^i, \cdots, c_{n_i}^i 1^{n_i})^{n_k/2n_i}) = (y_1^i, \cdots, y_{n_k}^i), \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(c_1^k, \cdots, c_{n_k}^k) = (y_1^k, \cdots, y_{n_k}^k).$$

事实上, 如果 a 为出现在 x 中长为 n_k 的块, 则存在 $j \geqslant k$, 使得 a 出现在 A_j 中. 因此, 通过对 $j \geqslant k$ 进行归纳, 容易说明上面的断言成立. 因此

$$N(\mathcal{U}_{i=0}^{n_k-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} 3n_i \leqslant 3kn_k \leqslant 3(n_k)^2.$$

这清楚地蕴含着 $h_{\text{top}}(\sigma, \mathcal{U}) = 0$. □

注记 6.1.12 类似地, 对每个 $n \geqslant 2$, 可以构造出 n 一致正熵但非 $n+1$ 一致正熵的系统.

习 题 6.1

1. 证明 n 一致正熵、完全一致正熵和完全正熵属性均对因子保持.
2. 证明引理 6.1.8.
3. 证明引理 6.1.9
4. 对每个 $n \geqslant 2$, 构造出 n 一致正熵但非 $n+1$ 一致正熵的系统.

§6.2 拓扑熵串与最大零熵因子

在本节, 我们首先将局部化熵的概念引入拓扑熵串, 然后通过证明拓扑熵串具有提升性质说明每个动力系统存在最大的零熵因子. 设 (X,T) 为动力系统和 $K \subseteq X$. X 的有限覆盖 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_k\}$ 称为相对于 K **可允许的覆盖**, 如果对每个 $1 \leqslant j \leqslant k$, 均有 $\overline{U_j} \not\supset K$. 类似地, 可以定义相对于 K **可允许的剖分**.

定义 6.2.1 设 (X,T) 为动力系统和 $n \geqslant 2$. 串 $(x_i)_1^n \in X^n$ 称为**拓扑 n 熵串**, 如果 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 中至少有两点不相同, 并且对任意相对于 $\{x_i\}_{i=1}^n$, 可允许的开覆盖 $\mathcal{U}$ 具有正拓扑熵. 当 $n=2$ 时, 也将拓扑 2 熵串简称为**拓扑熵对**.

对 $n \geqslant 2$, 用 $E_n(X,T)$ 表示系统 (X,T) 全体的拓扑 n 熵串, $E_n'(X,T)$ 表示 $E_n(X,T)$ 在 X^n 中的闭包. 令 $\Delta_n(X) = \{(x, x, \cdots, x)(n\text{次}) : x \in X\}$, $\Delta(X) = \Delta_2(X)$. 易见, (X,T) 为 n 一致正熵系统当且仅当 $\Delta_n(X) \cup E_n(X,T) = X^n$; (X,T) 为完全一致正熵系统当且仅当 $\Delta_m(X) \cup E_m(X,T) = X^m$ 对每个 $m \geqslant 2$ 成立.

命题 6.2.2 设 (X,T) 为动力系统. 如果 X 的开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$ 满足 $h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})>0$, 则存在点 $x_i\in U_i^c, i=1,2,\cdots,n$, 使得 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为拓扑 n 熵串.

证明 我们先说明存在开覆盖 $\mathcal{U}_1=\{U_1^1,U_2^1,\cdots,U_n^1\}$ 满足 $h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_1)>0$, $U_i^1\supset U_i$ 且 $\text{diam}((U_i^1)^c)\leqslant\frac{1}{2}\text{diam}((U_i)^c), i=1,\cdots,n$. 然后归纳地对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 可以得到递减的非空闭集序列 $\{(U_i^m)^c\}_{m=1}^{\infty}$, 使得 $(U_i^m)^c$ 收敛到点 $x_i, i=1,2,\cdots,n$, 且 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为所求拓扑 n 熵串.

如果 U_1^c 为独点集, 取 $U_1^1=U_1$ 即可. 当 U_1^c 不为独点集时, 至少在 U_1^c 中存在两个点 y,y' 且 $d(y,y')>0$. 取 ε_1 满足 $0<\varepsilon_1<\frac{1}{4}d(y,y')$, 然后构造由中心位于 U_1^c、半径为 ε_1 的开球构成的 U_1^c 的覆盖, 将其记为 $\Im$. 由于 U_1^c 为紧集, 可以取 $\Im$ 的有限子覆盖 $\{W_1,W_2,\cdots,W_k\}$, 显然 $k\geqslant 2$. 设 $F_i=U_1^c\cap\overline{W_i}$, 从 $\Im$ 的选择知 F_i 为 U_1^c 的真子集.

由于 $\bigvee_{i=1}^k\{F_i^c,U_2,\cdots,U_n\}\succeq\mathcal{U}$, 有

$$0<h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})\leqslant h_{\text{top}}\left(T,\bigvee_{i=1}^k\{F_i^c,U_2,\cdots,U_n\}\right)\leqslant\sum_{i=1}^k h_{\text{top}}(T,\{F_i^c,U_2,\cdots,U_n\}).$$

这说明存在 i, 使得 $h_{\text{top}}(T,\{F_i^c,U_2,\cdots,U_n\})>0$. 取 $U_1^1=F_i^c$. 然后对 U_2 做同样的处理, 我们获得 U_2^1, 依次地, 构造 $U_3^1,\cdots,U_n^1$, 使得开覆盖 $\mathcal{U}_1=\{U_1^1,U_2^1,\cdots,U_n^1\}$ 满足 $h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_1)>0$, $U_i^1\supset U_i$ 且 $\text{diam}((U_i^1)^c)\leqslant\frac{1}{2}\text{diam}((U_i)^c), i=1,\cdots,n$.

无限次重复以上过程, 就得到递减的非空闭集序列 $(U_i^m)^c$, 使得 $(U_i^m)^c$ 收敛到点 $x_i, i=1,2,\cdots,n$ 且 $h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_m)>0$, 这里 $\mathcal{U}_m=\{U_1^m,U_2^m,\cdots,U_n^m\}$. 因 $x_i\in U_i^c$ 且 $\bigcap_{i=1}^n U_i^c=\varnothing$, $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 至少有两个不同的元素.

最后, 我们说明 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为拓扑 n 熵串. 对任意相对于 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 可允许的开覆盖 $\mathcal{V}=\{V_1,V_2,\cdots,V_l\}$, 存在 $\varepsilon>0$ 使得对每个 $i\in\{1,2,\cdots,l\}$, 能找到 $j_i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 满足 $B(x_{j_i},\varepsilon)\subset V_i^c$, 其中 $B(x_{j_i},\varepsilon)$ 是以 x_{j_i} 为中心 ε 为半径的开球. 取充分大的 m, 使得 $(U_i^m)^c\subset B(x_i,\varepsilon)$ 对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$. 进一步地, 对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 有 $V_i\subset B(x_{j_i},\varepsilon)^c\subset U_{j_i}^m$, 即 $\mathcal{V}\succeq\mathcal{U}_m$, 从而 $h_{\text{top}}(T,\mathcal{V})\geqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}_m)>0$. 这说明 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为拓扑 n 熵串. □

命题 6.2.3 设 $\pi:(Y,S)\to(X,T)$ 为因子映射. 有

(1) 如果 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E_n(X,T)$, 则存在 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E_n(Y,S)$, 使得 $\pi(y_i)=x_i$ 对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 成立;

(2) 如果 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E_n(Y,S)$ 且 $(\pi(y_1),\pi(y_2),\cdots,\pi(y_n))\notin\Delta_n(X)$, 则有 $(\pi(y_1),\pi(y_2),\cdots,\pi(y_n))\in E_n(X,T)$.

证明 (1) 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E_n(X,T)$. 对 $m\in\mathbb{N}$ 和 $i=1,2,\cdots,n$, 任取 x_i 的闭邻域 V_i^m, 使得 $\bigcap_{i=1}^n V_i^m=\varnothing$ 且 $\max_{i=1}^n \mathrm{diam}(V_i^m)<\dfrac{1}{m}$. 考虑开覆盖 $\mathcal{U}_m=\{(V_1^m)^c,\cdots,(V_n^m)^c\}$, 则 $h_{\mathrm{top}}(S,\pi^{-1}\mathcal{U}_m)=h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U}_m)>0$. 由命题 6.2.2, 存在 $y_i^m\in\pi^{-1}(V_i^m)^c$, 使得 $(y_1^m,\cdots,y_n^m)\in E_n(Y,S)$. 适当选取子列, 不妨设 $(y_1^m,\cdots,y_n^m)\to(y_1,\cdots,y_n)$. 显然 $y_i\in\pi^{-1}(x_i)$, $i=1,\cdots,n$ 且 $(y_1,\cdots,y_n)\in E_n(Y,S)$.

(2) 设 $\mathcal{U}$ 是相对于 $(\pi(y_1),\pi(y_2),\cdots,\pi(y_n))$ 可容许的开覆盖, 则 $\pi^{-1}\mathcal{U}$ 为相对于 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 可容许的开覆盖, 因此 $h_{\mathrm{top}}(S,\pi^{-1}\mathcal{U})>0$. 进而 $h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})=h_{\mathrm{top}}(S,\pi^{-1}\mathcal{U})>0$. 这说明 $(\pi(y_1),\pi(y_2),\cdots,\pi(y_n))\in E_n(X,T)$. □

注记 6.2.4 把 (1),(2) 两条性质称为**提升性质**, 在以后的章节中我们会遇到许多具有类似提升性质的点串.

设 (X,T) 为动力系统. 串 $(x_i)_1^n$ 称为**不可约的**, 如果当 $i\neq j$ 时, $x_i\neq x_j$. 对 $n\geqslant 2$, 用 $E_n^{\mathrm{e}}(X,T)$ 表示全体不可约的拓扑 n 熵串. 易见, $E_n(X,T)$, $E_n'(X,T)$ 和 $E_n^{\mathrm{e}}(X,T)$ 在 X^n 的坐标置换下保持不变.

命题 6.2.5 设 (X,T) 为动力系统. 如果 $h_{\mathrm{top}}(T)>0$, 则

(1) 对每个 $n\geqslant 2$, $E_n^{\mathrm{e}}(X,T)$ 为 X^n 的非空子集. 特别地, 系统 (X,T) 具有零熵当且仅当 $E_2(X,T)=\varnothing$;

(2) $E_n(X,T)\cup\Delta_n(X)$ 为 X^n 的 $T^{(n)}$ 不变的闭子集且 $E_n'(X,T)\subset E_n(X,T)\cup\Delta_n(X)$.

证明 (1) 固定 $n\geqslant 2$. 因 $h_{\mathrm{top}}(T)>0$, 存在 $l\in\mathbb{N}$, 使得 $h_{\mathrm{top}}(T^l)=lh_{\mathrm{top}}(T)>(n-1)$. 令 $S=T^l$, 显然 $E_n^e(X,T)=E_n^e(X,S)$. 因此只需说明 $E_n^e(X,S)\neq\varnothing$.

现在取开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$, 使其满足 $h_{\mathrm{top}}(S,\mathcal{U})>\log(n-1)$. 设 $(n-1)\mathcal{U}=\{\bigcup_{i=1}^{n-1}U_{j_i}:1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{n-1}\leqslant k\}$. 不难算得 $h_{\mathrm{top}}(S,(n-1)\mathcal{U})\geqslant h_{\mathrm{top}}(S,\mathcal{U})-\log(n-1)>0$. 因此由命题 6.2.2, 对每个 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{n-1}\leqslant k$, 存在 $x_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}\in\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}U_{j_i}\right)^c$, 使得 $(x_{j_1j_2\cdots j_{n-1}})_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{n-1}\leqslant k}\in E_m(X,T)$, 其中 $m=C_k^{n-1}$.

设 $l=\mathrm{Card}\{x_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}:1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{n-1}\leqslant k\}$ 以及 $\{y_1,y_2,\cdots,y_l\}=\{x_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}:1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{n-1}\leqslant k\}$. 如果 $l\leqslant n-1$. 因 $\mathcal{U}$ 为 X 的开覆盖, 存在 $1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_{n-1}\leqslant k$, 使得 $\{y_1,y_2,\cdots,y_l\}\subset\bigcup_{i=1}^{n-1}U_{s_i}$. 特别地, $x_{s_1s_2\cdots s_{n-1}}\in\bigcup_{i=1}^{n-1}U_{s_i}$, 这与 $x_{s_1s_2\cdots s_{n-1}}\in\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}U_{s_i}\right)^c$ 相矛盾. 这说明 $l\geqslant n$, 进而由定义可有 $(y_i)_{i=1}^n\in E_n^e(X,T)$.

(2) 显然, $\Delta_n(X)$ 为 $T^{(n)}$ 不变的闭子集. 设 $(x_i)_{i=1}^n\in E_n(X,T)$. 如果 $T(x_1)=T(x_2)=\cdots=T(x_n)$, 则 $(T(x_1),T(x_2),\cdots,T(x_n))\in\Delta_n(X)$. 如果 $T(x_1),T(x_2),\cdots,T(x_n)$ 不全相等, 设 $\mathcal{U}$ 是相对于 $(T(x_1),T(x_2),\cdots,T(x_n))$ 可容许的开覆盖, 则 $T^{-1}\mathcal{U}$ 为相对于 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可容许的开覆盖, 因此 $h_{\mathrm{top}}(T,T^{-1}\mathcal{U})>0$. 进而

$h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})=h_{\mathrm{top}}(T,T^{-1}\mathcal{U})>0$. 这说明 $(T(x_1),T(x_2),\cdots,T(x_n))\in E_n(X,T)$. 由此, $E_n(X,T)\bigcup\Delta_n(X)$ 为 X^n 的非空 $T^{(n)}$ 不变的子集.

同时, 对任意的 $(x_i)_{i=1}^n\in E_n'(X,T)\setminus\Delta_n(X)$, 存在 $\{(x_i^m)_{i=1}^n:m\in\mathbb{N}\}\subset E_n(X,T)$, 使得 $(x_i^m)_{i=1}^n\to(x_i)_{i=1}^n$. 取 $\mathcal{U}$ 为相对于 $(x_i)_{i=1}^n$ 的可容许的开覆盖, 则由定义易知, 对充分大的 $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ 为相对于 $(x_i^m)_{i=1}^n$ 的可容许的开覆盖, 进而 $h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})>0$, 知 $(x_i)_{i=1}^n\in E_n(X,T)$, 即 $E_n'(X,T)\subseteq E_n(X,T)\cup\Delta_n(X)$. 由此易得 $E_n(X,T)\bigcup\Delta_n(X)$ 为 X^n 的闭子集. □

注记 6.2.6　*如果 T 可逆, 则利用命题 6.2.5 可以看出 $E_n^e(X,T)$ 和 $E_n(X,T)$ 均为 X^n 的 $T^{(n)}$ 不变的子集.*

定理 6.2.7　*设 (X,T) 为动力系统. 用 $\mathcal{A}(E_2(X,T))$ 表示包含 $E_2(X,T)\cup\Delta(X)$ 最小的闭的 $T\times T$ 不变的等价关系, $\pi_0:(X,T)\to(X_0,T_0)$ 表示由等价关系 $\mathcal{A}(E_2(X,T))$ 所诱导的因子映射. 则 (X_0,T_0) 为 (X,T) 的零熵因子, 且对 (X,T) 的任意零熵因子系统 (Y,S), (X_0,T_0) 为 (Y,S) 的扩充.*

证明　首先, 我们说明 (X_0,T_0) 为零熵系统. 如果 (X_0,T_0) 有正熵, 则存在 $(x_1,x_2)\in E_2(X_0,T_0)$. 由命题 6.2.3 (1) 知, 存在 $(y_1,y_2)\in E_2(X,T)$ 满足 $\pi_0(y_i)=x_i,i=1,2$. 由于 $(y_1,y_2)\in E_2(X,T)$, 从 π_0 的定义有 $\pi_0(y_1)=\pi_0(y_2)$, 这样 $x_1=x_2$, 矛盾.

设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为因子系统且 (Y,S) 具有零熵. 由命题 6.2.3 知 $R_\pi\supset E_2(X,T)$, 进而 $R_\pi\supseteq R_{\pi_0}=\mathcal{A}(E_2(X,T))$. 这就说明 (X_0,T_0) 为 (Y,S) 的扩充. □

注记 6.2.8　*将定理 6.2.7 中的 (X_0,T_0) 称为 (X,T) 的***最大零熵因子***. 所以, 定理 6.2.7 也能表述为: 每个动力系统存在最大零熵因子, 且该因子是由包含其全体熵对的最小的闭的 $T\times T$ 不变的等价关系所诱导的因子系统.*

习　题　6.2

1. 设 (X,T) 为动力系统和 $K\subseteq X$. 称 K 是**熵集**, 如果对任意相对于 K 可允许的开覆盖 $\mathcal{U}$ 具有正拓扑熵. 证明:

(1) K 为熵集当且仅当对任意满足 $|\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}|\geqslant 2$ 的 $\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}\subset K$, 有 $\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}\subseteq E_n(X,T)$;

(2) K 为熵集当且仅当 $\overline{K}$ 为熵集;

(3) 如果用 $E_s(X,T)$ 记 (X,T) 的全体闭熵集, 且将 $E_n(X,T)$ 视为 $E_s(X,T)$ 的子集, 则 $\overline{\bigcup_{n\geqslant 2}E_n(X,T)}\setminus\{\{x\}:x\in X\}=E_s(X,T)$.

2. 假设 W 为动力系统 (X,T) 的 T 不变闭子集. 证明: $E_n(W,T)\subseteq E_n(X,T)$ 且 $E_s(W,T)\subseteq E_s(X,S)$.

3. 设 $\pi:(Y,S)\to(X,T)$ 为因子映射, 证明: $\pi(E_s(Y,S))\setminus\{\{x\}:x\in X\}=E_s(X,T)$. 进而, 熵集具有提升性质.

§6.3 覆盖的测度熵与 Glasner-Weiss 定理

本节将首先对一个可测覆盖定义两种测度熵, 然后对这两种测度熵证明均具有遍历分解性, 最后给出 Glasner 和 Weiss 关于开覆盖测度熵和拓扑熵关系的定理.

首先, 引入一些概念和记号. 设 (X,T) 为动力系统. 把由 X 上有限个 Borel 集构成的覆盖称为 X 上的一个**Borel 覆盖**; 如果其元素彼此互不相交, 则称其为 X 的一个**Borel 剖分**. 分别用 $\mathcal{P}_X, \mathcal{C}_X$ 和 $\mathcal{C}_X^o$ 表示 X 的全体 Borel 剖分、全体 Borel 覆盖以及全体有限开覆盖. 用 $\mathcal{M}(X)$ 表示所有定义在 $\mathcal{B}(X)$ 的概率测度, 用 $\mathcal{M}(X,T)$ 表示 $\mathcal{M}(X)$ 中 T 不变测度全体以及用 $\mathcal{M}^e(X,T)$ 表示 $\mathcal{M}(X)$ 中 T 不变的遍历测度全体. 在弱 * 拓扑下, $\mathcal{M}(X)$ 和 $\mathcal{M}(X,T)$ 成为凸的紧度量空间.

Romagnoli (2003) 对覆盖引入了两种测度熵的概念, 它们在建立熵的局部化理论中起到重要的作用. 现在我们给出具体定义. 设 (X,T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X)$, 对 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X$, 定义

$$H_\mu(\mathcal{U}) = \inf_{\alpha \in \mathcal{P}_X : \alpha \succeq \mathcal{U}} H_\mu(\alpha).$$

不难看出, $H_\mu(\alpha)$ 的许多属性可以自然地扩充到 $H_\mu(\mathcal{U})$.

引理 6.3.1 设 (X,T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X)$. 如果 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{C}_X$, 则

(1) $0 \leqslant H_\mu(\mathcal{U}) \leqslant \log N(\mathcal{U})$;

(2) 如果 $\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$, 则 $H_\mu(\mathcal{U}) \geqslant H_\mu(\mathcal{V})$;

(3) $H_\mu(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leqslant H_\mu(\mathcal{U}) + H_\mu(\mathcal{V})$;

(4) $H_\mu(T^{-1}\mathcal{U}) \leqslant H_{T\mu}(\mathcal{U})$; 当 T 可逆时, $H_\mu(T^{-1}\mathcal{U}) = H_{T\mu}(\mathcal{U})$.

当 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ 和 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X$, 易见 $H_\mu(\mathcal{U}_0^{n-1})$ 是关于 $n \in \mathbb{N}$ 的非负次可加函数. 因此, 从引理 6.3.1(3) 和 (4), 我们可以将 $\mathcal{U}$ **相对于 μ 的测度熵**定义如下:

$$h_\mu(T,\mathcal{U}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{U}_0^{n-1}) = \inf_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{U}_0^{n-1}). \tag{6.3.1}$$

另外, 定义

$$h_\mu^+(T,\mathcal{U}) = \inf_{\alpha \in \mathcal{P}_X : \alpha \succeq \mathcal{U}} h_\mu(T,\alpha), \tag{6.3.2}$$

称 $h_\mu^+(T,\mathcal{U})$ 为**覆盖 $\mathcal{U}$ 相对于 μ 的强测度熵**. 下面的引理概括了上述两种覆盖测度熵的一些基本性质 (这些性质的证明是容易的):

引理 6.3.2 设 (X,T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 和 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{C}_X$. 则

(1) $h_\mu(T,\mathcal{U}) = \dfrac{1}{M} h_\mu(T^M, \mathcal{U}_0^{M-1})$ 对每个 $M \geqslant 1$ 成立;

(2) $h_\mu^+(T,\mathcal{U}) \geqslant \dfrac{1}{M} h_\mu^+(T^M, \mathcal{U}_0^{M-1})$ 对每个 $M \geqslant 1$ 成立;

(3) $h_\mu(T,\mathcal{U}) = \lim\limits_{M \to \infty} \dfrac{1}{M} h_\mu^+(T^M, \mathcal{U}_0^{M-1}) = \inf_{M \geqslant 1} \dfrac{1}{M} h_\mu^+(T^M, \mathcal{U}_0^{M-1})$;

(4) $h_\mu(T,\mathcal{U}) \leqslant h_\mu^+(T,\mathcal{U})$;

(5) $h_\mu^+(T,\mathcal{U}\vee\mathcal{V}) \leqslant h_\mu^+(T,\mathcal{U}) + h_\mu^+(T,\mathcal{V})$ 且 $h_\mu(T,\mathcal{U}\vee\mathcal{V}) \leqslant h_\mu(T,\mathcal{U}) + h_\mu(T,\mathcal{V})$;

(6) 如果 $\mathcal{U}\succeq\mathcal{V}$ 则 $h_\mu(T,\mathcal{U}) \geqslant h_\mu(T,\mathcal{V})$;

(7) 如果 $\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o$, 则 $h_\mu(T,\mathcal{U}) \leqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})$.

注意到, X 的一个剖分 α 也是一个覆盖且 $h_\mu(T,\alpha) = h_\mu^+(T,\alpha)$. 由测度熵的定义易见 $h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X} h_\mu(T,\mathcal{U}) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X} h_\mu^+(T,\mathcal{U})$. 进一步, 有

定理 6.3.3 设 (X,T) 为动力系统且 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 那么

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o} h_\mu(T,\mathcal{U}) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o} h_\mu^+(T,\mathcal{U}).$$

证明 首先对 $\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o$, 设 α 是由 $\mathcal{U}$ 生成的 Borel 剖分, 则 $\alpha\succeq\mathcal{U}$, 因此 $h_\mu(T,X) \geqslant h_\mu(T,\alpha) \geqslant h_\mu^+(T,\mathcal{U})$. 这说明 $h_\mu(T,X) \geqslant \sup\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o} h_\mu^+(T,\mathcal{U})$. 下证 $h_\mu(T) \leqslant \sup\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o} h_\mu(T,\mathcal{U})$.

对 X 的每个 Borel 剖分 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 以及 $\varepsilon>0$, 有

断言 存在 X 的由 k 个元素构成的开覆盖 $\mathcal{U}$, 使得对任意 $j\geqslant 0$ 和比 $T^{-j}\mathcal{U}$ 细的 Borel 剖分 β, 有 $H_\mu(T^{-j}\alpha|\beta)\leqslant\varepsilon$ 成立.

断言的证明 引理 5.4.5 告诉我们, 存在 $\delta>0$, 满足: 对任意两个可测剖分 $\beta_1=\{B_1^1,B_2^1,\cdots,B_k^1\}$ 和 $\beta_2=\{B_1^2,B_2^2,\cdots,B_k^2\}$, 如果 $\sum\limits_{i=1}^k \mu(B_i^1\Delta B_i^2)<\delta_1$ 则 $H_\mu(\beta_1|\beta_2)\leqslant\varepsilon$.

因测度 μ 为正则的, 我们可以取闭集 $B_i\subset A_i$, 使得 $\mu(A_i\setminus B_i)<\dfrac{\delta}{2k^2}$, $i=1,2,\cdots,k$. 然后取 $B_0=X\setminus\bigcup_{i=1}^k B_i$, 则 $\mu(B_0)<\dfrac{\delta}{2k}$. 再令 $U_i=B_0\cup B_i$, $i=1,2,\cdots,k$, 易见, $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$ 为 X 的开覆盖.

现在对任意 $j\geqslant 0$ 和比 $T^{-j}\mathcal{U}$ 细的 Borel 剖分 β, 可以取 $\beta'=\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 使得 $C_i\subset T^{-j}U_i$, $i=1,2,\cdots,k$ 且 $\beta\geqslant\beta'$. 因此 $H_\mu(T^{-j}\alpha|\beta)\leqslant H_\mu(T^{-j}\alpha|\beta')$. 注意到 $T^{-j}U_i\supset C_i\supset X\setminus\bigcup_{l\neq i}T^{-j}U_l=T^{-j}B_i$, 有

$$\mu(C_i\Delta T^{-j}A_i)\leqslant\mu(T^{-j}A_i\setminus T^{-j}B_i)+\mu(T^{-j}B_0)=\mu(A_i\setminus B_i)+\mu(B_0)<\frac{\delta}{2k}+\frac{\delta}{2k^2}\leqslant\frac{\delta}{k}.$$

因此 $\sum\limits_{i=1}^k\mu(C_i\Delta T^{-j}A_i)<\delta$ 且 $H_\mu(T^{-j}\alpha|\beta')\leqslant\varepsilon$. 进而 $H_\mu(T^{-j}\alpha|\beta)\leqslant\varepsilon$. 断言得证.

对任意 $n\in\mathbb{N}$ 和有限可测剖分 $\beta_n\succeq\mathcal{U}_0^{n-1}$, 注意到 $\beta_n\succeq T^{-j}\mathcal{U}$, $j=0,1,\cdots,n-1$, 有

$$\begin{aligned}H_\mu(\alpha_0^{n-1})&\leqslant H_\mu(\beta_n)+H_\mu(\alpha_0^{n-1}|\beta_n)\\&\leqslant H_\mu(\beta_n)+\sum_{j=0}^{n-1}H_\mu(T^{-j}\alpha|\beta_n)\end{aligned}$$

$$\leqslant H_\mu(\beta_n) + n\varepsilon \text{ (利用断言)}.$$

这就说明 $H_\mu(\alpha_0^{n-1}) \leqslant H_\mu(\mathcal{U}_0^{n-1}) + n\varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned} h_\mu(T,\alpha) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1}) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{U}_0^{n-1}) + \varepsilon \\ &= h_\mu(T,\mathcal{U}) + \varepsilon \leqslant \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o} h_\mu(T,\mathcal{U}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 α 和 ε 的任意性, 有 $h_\mu(T) \leqslant \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o} h_\mu(T,\mathcal{U})$. 定理得证. □

下面说明 Borel 覆盖的两种测度熵均具有所谓的遍历分解性.

引理 6.3.4 设 (X,T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ 以及 $\alpha \in \mathcal{P}_X$. 如果 $\mu = \int_{\mathcal{M}^e(X,T)} \theta \mathrm{d}m(\theta)$ 为 μ 的遍历分解, 则 $h_\mu(T,\alpha) = \int_{\mathcal{M}^e(X,T)} h_\theta(T,\alpha)\mathrm{d}m(\theta)$.

证明 我们仅对 T 可逆的情形证明, 一般情形时可以通过自然扩充获得 (留作习题). 设 P_μ 为 $(X,\mathcal{B}_X,\mu,T)$ 的 Pinsker σ 代数并且 $\mathcal{I}_\mu = \{B \in \mathcal{B}_X : \mu(T^{-1}(B)\Delta B) = 0\}$. 不难验证 $\mathcal{I}_\mu \subset P_\mu$, 因此有

$$\begin{aligned} h_\mu(T,\alpha) &\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1}|\mathcal{I}_\mu) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1}|P_\mu) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} H_\mu\left(T^{-j}\alpha | \bigvee_{k=j+1}^{n-1} T^{-k}\alpha \vee P_\mu\right) = H_\mu(\alpha|\alpha^- \vee P_\mu) \\ &= h_\mu(T,\alpha) \text{ (参看定理 5.3.8)}. \end{aligned}$$

进而设 $\mu = \int_X \mu_x \mathrm{d}\mu(x)$ 是 μ 相对于 $\mathcal{I}_\mu$ 的测度分解 (即对任意 $f \in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$, $\mathbb{E}(f|\mathcal{I}_\mu)(x) = \int_X f\mathrm{d}\mu_x$ 对 μ-a.e. $x \in X$), 则

$$\begin{aligned} h_\mu(T,\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1}|P_\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1}|\mathcal{I}_\mu) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X \sum_{A\in\alpha_0^{n-1}} -\mathbb{E}(1_A|\mathcal{I}_\mu)(x) \log \mathbb{E}(1_A|\mathcal{I}_\mu)(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X \sum_{A\in\alpha_0^{n-1}} -\mu_x(A)\log\mu_x(A)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X H_{\mu_x}(\alpha_0^{n-1})\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathcal{M}^e(X,T)} H_\theta(\alpha_0^{n-1})\mathrm{d}m(\theta) \\ &= \int_{\mathcal{M}^e(X,T)} h_\theta(T,\alpha)\mathrm{d}m(\theta) \text{ (利用控制收敛定理)}. \end{aligned}$$

这就证明了剖分熵的遍历分解性. □

有了以上准备, 现在说明遍历分解对 $h_\mu^+(\mathcal{U},T)$ 和 $h_\mu(\mathcal{U},T)$ 均成立.

引理 6.3.5　设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 以及 $\mathcal{U}$ 为 X 的有限 Borel 覆盖. 如果 $\mu=\int_{\mathcal{M}^e(X,T)}\theta \mathrm{d}m(\omega)$ 为 μ 的遍历分解, 则

$$h_\mu^+(T,\mathcal{U})=\int_{\mathcal{M}^e(X,T)}h_\theta^+(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta)\ \text{且}\ h_\mu(T,\mathcal{U})=\int_{\mathcal{M}^e(X,T)}h_\theta(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta).$$

证明　设 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_N\}$. 定义

$$\mathcal{U}(P)=\{\beta=\{B_1,B_2,\cdots,B_N\}\in\mathcal{P}_X: B_i\subset U_i,\ 1\leqslant i\leqslant N\}.$$

因 X 为紧度量空间, 所以存在可数个剖分 $\{\mathbb{P}_i\in\mathcal{U}(P): i\in\mathbb{N}\}$, 使得对 X 上每个 Borel 概率测度 ν, 均在 $\mathcal{U}(P)$ 中 $L^1(\nu)$ 稠密. 事实上, 如果 $\{V_i\}$ 为 X 的可数拓扑基, $\mathcal{A}$ 为由 $\{V_i\}\cup\mathcal{U}$ 生成的可数代数, 则 $\mathbb{P}_i$ 可取为由 N 个元素构成的 Borel 剖分, 这些 Borel 剖分的第 j 个元素包含在 U_j 中且属于代数 $\mathcal{A}$, $1\leqslant j\leqslant N$. 清楚地, 对每个 $\nu\in\mathcal{M}(X,T)$, 有 $h_\nu^+(T,\mathcal{U})=\inf_{i\in\mathbb{N}}h_\nu(T,\mathbb{P}_i)$.

任取 $\varepsilon>0$. 因 $h_\theta^+(T,\mathcal{U})=\inf_{i\in\mathbb{N}}h_\theta(T,\mathbb{P}_i)$ 对每个 $\theta\in\mathcal{M}^e(X,T)$ 成立, 所以存在 $\mathcal{M}^e(X,T)$ $(\mathrm{mod}m)$ 的一个可测剖分 $\{\Omega_n\}_{n\in I\subset\mathbb{N}}$ 满足 $m(\Omega_n)>0$ 对每个 $n\in I$ 成立, 且如果 $\theta\in\Omega_n$ 则 $h_\theta(T,\mathbb{P}_n)<h_\theta^+(T,\mathcal{U})+\varepsilon$.

对 $n\in I$ 记 $t_n=m(\Omega_n)$, $\mu_n=\dfrac{1}{t_n}\displaystyle\int_{\Omega_n}\theta\mathrm{d}m(\theta)$. 注意到 $\mu_n=\dfrac{1}{t_n}\displaystyle\int_{\Omega_n}\theta\mathrm{d}m(\theta)$ 为 μ_n 的遍历分解, 由引理 6.3.4 有

$$h_{\mu_n}(T,\mathbb{P}_n)=\frac{1}{t_n}\int_{\Omega_n}h_\theta(T,\mathbb{P}_n)\mathrm{d}m(\theta)\leqslant\frac{1}{t_n}\int_{\Omega_n}h_\theta^+(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta)+\varepsilon.$$

由于测度 $\{\mu_n\}$ 为互相奇异的, 即存在 Borel 集 $\{X_n\}_{n\in I}$ 满足对每对 $n,k\in I,k\neq n$, 有 $\mu_n(X_n)=1$, $\mu_n(X_k)=0$. 可假设 $\{X_n\}_{n\in I}$ 为 X 的 Borel 剖分. 为方便起见, 记 $\mathbb{P}_n=\{B_1^n,B_2^n,\cdots,B_N^n\}$, 其中 $B_i^n\subset U_i$, $1\leqslant i\leqslant N$. 设 $B_i=\cup_{n\in I}(X_n\cap B_i^n)$, 则 $\mathbb{P}=\{B_1,B_2,\cdots,B_N\}\in\mathcal{U}(P)$ 且 $\mathbb{P}=\mathbb{P}_n$ $(\mathrm{mod}\mu_n)$ 对每个 $n\in I$ 成立. 现在, 同样由引理 6.3.4 有

$$h_\mu(T,\mathbb{P})=\sum_n t_nh_{\mu_n}(T,\mathbb{P})=\sum_n t_nh_{\mu_n}(T,\mathbb{P}_n)\leqslant\int_\Omega h_\theta^+(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta)+\varepsilon.$$

因此 $h_\mu^+(T,\mathcal{U})\leqslant\displaystyle\int_\Omega h_\theta^+(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta)+\varepsilon$, 进而 $h_\mu^+(T,\mathcal{U})\leqslant\displaystyle\int_\Omega h_\theta^+(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta)$.

另一方面,

$$h_\mu^+(T,\mathcal{U})=\inf_{i\in\mathbb{N}}h_\mu(T,\mathbb{P}_i)=\inf_{i\in\mathbb{N}}\int_\Omega h_\theta(T,\mathbb{P}_i)\mathrm{d}m(\theta)\geqslant\int_\Omega h_\theta^+(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta).$$

则说明 $h_\mu^+(T,\mathcal{U})=\int_\Omega h_\theta^+(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta)$. 进而, 利用引理 6.3.2(3) 以及控制收敛定理, 不难得到 $h_\mu(T,\mathcal{U})=\int_{\mathcal{M}^e(X,T)} h_\theta(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta)$. □

紧度量空间 Z 上的实值函数 f 称为**上半连续的**, 如果以下两个等价条件之一成立:

(A1) $\lim\limits_{z'\to z}\sup f(z')\leqslant f(z)$ 对每个 $z\in Z$;

(A2) 对每个 $r\in\mathbb{R}$, 集合 $\{z\in Z: f(z)\geqslant r\}$ 为闭集.

由 (A2) 知, 对一族上半连续函数 $\{f_i\}_{i\in I}$, $\inf_{i\in I} f_i$ 仍为上半连续函数; 有限个上半连续函数 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 的和函数 $\sum\limits_{i=1}^n f_i$ 以及 $\max_{i=1}^n f_i$ 均为上半连续函数.

引理 6.3.6 设 (X,T) 为动力系统和 $\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o$. 则熵映射 $h_{\{\cdot\}}^+(T,\mathcal{U}):\mu\in\mathcal{M}(X,T)\to\mathbb{R}$ 和 $h_{\{\cdot\}}(T,\mathcal{U}):\mu\in\mathcal{M}(X,T)\to\mathbb{R}$ 都是上半连续的.

证明 由于对 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 有 $h_\mu(T,\mathcal{U})=\inf\limits_{M\geqslant 1}\frac{1}{M}h_\mu^+(T^M,\mathcal{U}_0^{M-1})$, 因此, 如果熵映射 $h_{\{\cdot\}}^+(T,\mathcal{U}):\mu\in\mathcal{M}(X,T)\to\mathbb{R}$ 是上半连续的, 则 $h_{\{\cdot\}}(T,\mathcal{U}):\mu\in\mathcal{M}(X,T)\to\mathbb{R}$ 也是上半连续的.

下证熵映射 $h_{\{\cdot\}}^+(T,\mathcal{U}):\mu\in\mathcal{M}(X,T)\to\mathbb{R}$ 是上半连续的. 由于对 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 有

$$h_\mu^+(T,\mathcal{U})=\inf_{\{\alpha\in\mathcal{P}_X:\alpha\succeq\mathcal{U}\}}\inf_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^{n-1})=\inf_{n\geqslant 1}\inf_{\{\alpha\in\mathcal{P}_X:\alpha\succeq\mathcal{U}\}}\frac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^{n-1}).$$

因此, 只需证明对每个 $n\in\mathbb{N}$, 映射 $\phi_n(\mu)=\inf\limits_{\alpha\in\mathcal{P}_X:\alpha\succeq\mathcal{U}}H_\mu(\alpha_0^{n-1})$ 为 $\mathcal{M}(X,T)$ 上的上半连续函数. 进而再由 (A1), 我们仅需证明对任意 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 和 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{\mu'\to\mu:\mu'\in\mathcal{M}(X,T)}\sup\phi_n(\mu')\leqslant\phi_n(\mu)+\varepsilon.$$

固定 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 和 $\varepsilon>0$. 首先存在比 $\mathcal{U}$ 细的剖分 $\alpha\in\mathcal{P}_X$, 使得

$$H_\mu(\alpha_0^{n-1})\leqslant\phi_n(\mu)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.3.3}$$

不失一般性, 假设 $\alpha=\{A_1,\cdots,A_M\}$, 且对 $1\leqslant i\leqslant M$, $A_i\subset U_i$. 令 $\mu^n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}T^i\mu$, 由引理 5.4.5, 存在 $\delta=\delta(M,n,\varepsilon)>0$, 使得如果 $\beta^i=\{B_1^i,\cdots,B_M^i\}\in\mathcal{P}_X$ $(i=1,2)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^M\mu^n(B_i^1\Delta B_i^2)<\delta$, 则

$$H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\beta^1|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\beta^2\Big)\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}H_{T^i\mu}(\beta^1|\beta^2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $\mathcal{U}_{\mu,n}^*=\{\beta\in\mathcal{P}_X:\beta\succeq\mathcal{U}且\mu(\bigcup_{B\in\beta_0^{n-1}}\partial B)=0\}$, 有

断言　存在 $\beta=\{B_1,\cdots,B_M\}\in\mathcal{U}_{\mu,n}^*$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^M\mu^n(A_i\Delta B_i)<\delta$ 且 $H_\mu(\beta_0^{n-1}|\alpha_0^{n-1})<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

断言的证明　取 $\delta_1\in\left(0,\dfrac{\delta}{2M}\right)$. 因 μ 为正则的, 对 $j\in\{1,2,\cdots,M\}$, 存在紧子集 $C_j\subset A_j$, 使得

$$\mu^n(A_j\setminus C_j)<\frac{\delta_1}{M}. \tag{6.3.4}$$

对 $j\in\{1,2,\cdots,M\}$, 设 $O_j=U_j\cap(X\setminus\bigcup_{i\neq j}C_i)$. 则 O_j 为 X 的开子集且满足

$$A_j\subseteq O_j\subseteq U_j\ 且\mu^n(O_j\setminus A_j)\leqslant\sum_{i\neq j}\mu^n(A_i\setminus C_i)<\delta_1,$$
$$因\ O_j\setminus A_j\subseteq\bigcup_{i\neq j}A_i\setminus C_i. \tag{6.3.5}$$

注意到, 对给定的 $x\in X$, 存在至多可数个 $\gamma>0$, 使得 $\mu^n(\{y\in X:d(x,y)=\gamma\})>0$. 进而, 因 $O_1,\cdots,O_M$ 均为开集以及 $\bigcup_{i=1}^M O_i=X$, 存在 Borel 集 $C_1^*,\cdots,C_M^*$, 使得 $C_i^*\subseteq O_i(1\leqslant i\leqslant M),\bigcup_{i=1}^M C_i^*=X$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^M\mu^n(\partial C_i^*)=0$.

设 $B_1=C_1^*$ 和 $B_j=C_j^*\setminus(\bigcup_{i=1}^{j-1}C_i^*)$, $2\leqslant j\leqslant M$. 则 $\beta=\{B_1,B_2,\cdots,B_M\}\in\mathcal{P}_X$ 且 $\beta\succeq\mathcal{U}$. 因 $\mu^n(\partial C_j^*)=0$, $1\leqslant j\leqslant M$ 以及 $T^{-i}(\partial D)\supseteq\partial(T^{-i}D)$ 对每个 $i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ 和 $D\subseteq X$ 成立, 有 $\beta\in\mathcal{U}_{\mu,n}^*$. 因 $O_j\cap C_i=\varnothing$ 对 $1\leqslant j\neq i\leqslant M$ 成立, 得到 $B_j\cap C_i=\varnothing$ 对 $1\leqslant j\neq i\leqslant M$ 成立. 因而 $C_i\subseteq B_i\subseteq O_i$ 对 $1\leqslant i\leqslant M$ 成立. 再由 (6.3.4) 和 (6.3.5),

$$\sum_{i=1}^M\mu^n(A_i\Delta B_i)\leqslant\sum_{i=1}^M(\mu^n(A_i\setminus C_i)+\mu^n(O_i\setminus A_i))\leqslant\sum_{i=1}^M 2\delta_1<\delta,$$

因此 $H_\mu(\beta_0^{n-1}|\alpha_0^{n-1})<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 这就完成了断言的证明.

现在

$$\begin{aligned}\limsup_{\mu'\to\mu:\mu'\in\mathcal{M}(X,T)}\phi_n(\mu')&\leqslant\limsup_{\mu'\to\mu:\mu'\in\mathcal{M}(X,T)}H_{\mu'}(\beta_0^{n-1})\\&=H_\mu(\beta_0^{n-1})\ \left(因\mu\left(\bigcup_{B\in\beta_0^{n-1}}\partial B\right)=0\right)\\&\leqslant H_\mu(\alpha_0^{n-1})+H_\mu(\beta_0^{n-1}|\alpha_0^{n-1})\\&\leqslant\phi_n(\mu)+\varepsilon\ (利用\ (6.3.3)\ 和断言).\end{aligned}$$

这就完成了引理的证明. □

在本节余下的部分将给出 Glasner 和 Weiss 关于开覆盖测度熵和拓扑熵关系的定理. 设 (X,T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. 当对任意 $x \in X$ 有 $\mu(\{x\}) = 0$ 成立时, 称 μ 是**非原子的**.

引理 6.3.7 (Rohlin 引理) 设 (X,T) 为可逆动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ 是一个非原子的遍历测度. 则对任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 B, 使得 $B, T^{-1}B, \cdots, T^{-(N-1)}B$ 是互不相交的且 $\mu(\bigcup_{i=0}^{N-1} T^{-i}B) > 1-\varepsilon$.

证明 因 μ 是非原子, 存在 Borel 集 $C \subset X$ 满足 $0 < \mu(C) < \frac{\varepsilon}{N}$. 现在, 定义**回复时间函数** $r_C : C \to \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$, 使得当 $\min\{n \geqslant 1 : T^n x \in C\}$ 有限时, 令

$$r_C(x) = \min\{n \geqslant 1 : T^n x \in C\},$$

否则令 $r_C(x) = \infty$. 设 $C_k = \{x \in C : r_C(x) = k\}$. 由 Poincaré 回复定理知, C_∞ 为零测集, 显然 $C_\infty, C_1, C_2, \cdots$ 为 C 的一个 Borel 剖分. 设 $\Gamma_k = \{C_k, T^1C_k, \cdots, T^{k-1}C_k\}$ 以及 $|\Gamma_k| = \bigcup_{i=0}^{k-1} T^iC_k$, 显然 Γ_k 中的元素互不相交, 且当 $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ 时 $|\Gamma_m| \cap |\Gamma_n| = \varnothing$. 因 μ 是遍历的, 所以 $\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^kC) = 1$. 进而有 $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} |\Gamma_k|) = 1$.

现在, 取 $B = \bigcup_{k \geqslant N} \bigcup_{i=0}^{[\frac{k-N}{N}]} T^{iN}C_k$, 从 B 的选取不难看出 $B, TB, \cdots, T^{N-1}B$ 是互不相交的. 最后, 有

$$\begin{aligned}\mu\Big(X \Big\backslash \bigcup_{i=0}^{N-1} T^iB\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{k<N}\bigcup_{i=0}^{k-1} T^iC_k \cup \bigcup_{k\geqslant N}\bigcup_{i=N[\frac{k-N}{N}]+N}^{k-1} T^iC_k\Big) \\ &\leqslant N\sum_{k=1}^{\infty}\mu(C_k) = N\cdot\mu(C) < \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\mu(\bigcup_{i=0}^{N-1} T^iB) > 1-\varepsilon$. 引理得证. □

定理 6.3.8 (Glasner-Weiss 定理 (Glasner-Weiss, 2004)) 设 (X,T) 为可逆动力系统, $\mathcal{U}$ 为 X 的一个有限开覆盖以及 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. 则 $h_\mu^+(T,\mathcal{U}) \leqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})$.

证明 由引理 6.3.5, 我们只需要对非原子的遍历测度 μ, 证明 $h_\mu^+(T,\mathcal{U}) \leqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})$ 成立即可. 以下假设 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ 是一个非原子的遍历测度. 记 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_k\}$. 对固定的 $\varepsilon > 0$, 选取充分大的 N, 使得

$$N(\mathcal{U}_0^{N-1}) \leqslant 2^{N(h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})+\varepsilon)} \text{且} -\left(1-\frac{1}{N}\right)\log\left(1-\frac{1}{N}\right) - \frac{1}{N}\log\frac{1}{N} < \varepsilon. \quad (6.3.6)$$

再取充分小的 $\delta \in (0,1)$, 使得

$$2\sqrt{\delta}\log k < \varepsilon. \quad (6.3.7)$$

现在利用引理 6.3.7, 可以找到 X 的 Borel 子集 D, 满足 $D, TD, \cdots, T^{N-1}D$ 互不相交且 $\mu(\bigcup_{i=0}^{N-1} T^i D) > 1-\delta$. 再取有限可测剖分 $\beta \succeq \mathcal{U}_0^{N-1}$, 使得

$$|\beta| = N(\mathcal{U}_0^{N-1}). \tag{6.3.8}$$

接着考虑 D 的剖分 $\beta_D = \{B \cap D : B \in \beta\}$. 显然, 对每个 $P \in \beta_D$ 具有形式 $P = P_{i_0 i_1 \cdots i_{N-1}} \subseteq (\bigcap_{j=0}^{N-1} T^{-j} U_{i_j}) \cap D$. 接下来利用剖分 β_D 定义 X 的一个分解 $\alpha = \{A_i : i = 1, \cdots, k\}$, 将所有满足 $i_j = i$ (j 可以取 $[0, N-1]$ 中任何数) 的集 $T^j P_{i_0 i_1 \cdots i_{N-1}}$ 分配给 A_i. 对 $X \setminus \bigcup_{i=0}^{N-1} T^i D$ 的点随意分配给某个 A_i 但要使得 $\alpha \succeq \mathcal{U}$. 对 $\gamma' \in \mathcal{P}_X$ 和 $R \subset X$, 定义 $\gamma' \cap R = \{A \cap R : A \in \gamma' \text{且} A \cap R \neq \varnothing\}$. 从 α 的选取不难看出 $\alpha_0^{N-1} \cap D = \beta_D$. 因此

$$|\alpha_0^{N-1} \cap D| = |\beta_D| \leqslant |\beta| \leqslant N(\mathcal{U}_0^{N-1}). \tag{6.3.9}$$

以下证明 $h_\mu^+(T, \mathcal{U}) \leqslant h_\mu(T, \alpha) \leqslant h_{\text{top}}(T, \mathcal{U}) + 3\varepsilon$. 为此, 设 $E = \bigcup_{i=0}^{N-1} T^i D$, 显然 $\mu(E) > 1-\delta$. 固定一个 $n \gg N$. 令 $G_n = \left\{x \in X : \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1_E(T^i x) > 1-\sqrt{\delta}\right\}$. 因

$$\mu(G_n) + (1-\sqrt{\delta})(1-\mu(G_n)) \geqslant \int_X \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} 1_E(T^i x)\Big) \mathrm{d}\mu(x) = \mu(E) > 1-\delta, \text{有}$$

$$\mu(G_n) > 1-\sqrt{\delta}. \tag{6.3.10}$$

对 $x \in G_n$, 取 $S_n(x) = \{i \in \{0, 1, \cdots, n-1\} : T^i x \in D\}$. 易见, 对每个 $x \in G_n$, 有

$$\Big|\{0, 1, \cdots, n-1\} \setminus \bigcup_{j=0}^{N-1} (S_n(x) + j)\Big| \leqslant n\sqrt{\delta} + N. \tag{6.3.11}$$

接着设 $\mathcal{F}_n = \{S_n(x) : x \in G_n\}$. 因为对每个 $F \in \mathcal{F}_n$, $F \cap (F+i) = \varnothing, i = 0, 1, \cdots, N-1$, 有 $|F| \leqslant \dfrac{n}{N} + 1$. 因此, 如果令 $a_n = \left[\dfrac{n}{N}\right] + 1$, 则

$$|\mathcal{F}_n| \leqslant \sum_{j=1}^{a_n} \frac{n!}{j! \cdot (n-j)!} \leqslant a_n \frac{n!}{a_n! \cdot (n-a_n)!} \leqslant n \frac{n!}{a_n! \cdot (n-a_n)!}.$$

通过 Stirling 公式和 (6.3.6) 中后一个不等式, 有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log\left(n \frac{n!}{a_n! \cdot (n-a_n)!}\right) = -\left(1-\frac{1}{N}\right)\log\left(1-\frac{1}{N}\right) - \frac{1}{N}\log\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

进而

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(|\mathcal{F}_n| + 1) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log\left(n \frac{n!}{a_n! \cdot (n-a_n)!} + 1\right) \leqslant \varepsilon. \tag{6.3.12}$$

对 $F \in \mathcal{F}_n$, 令 $B_F = \{x \in G_n : S_n(x) = F\}$. 显然, $\{B_F\}_{F\in\mathcal{F}_n}$ 形成了 G_n 的一个剖分. 如果设 $F = \{s_1 < s_2 < \cdots < s_l\}$ 和 $H_F = \{0, 1, \cdots, n-1\} \setminus \bigcup_{i=0}^{N-1}(F+i)$, 则 $l \leqslant \dfrac{n}{N} + 1$, $|H_F| \leqslant n\sqrt{\delta} + N$(参见 (6.3.11)) 且

$$\begin{aligned}
|\alpha_0^{n-1} \cap B_F| &\leqslant \left| \bigvee_{j=1}^{l} T^{-s_j}(\alpha_0^{N-1} \cap D) \vee \bigvee_{r\in H_F} T^{-r}\alpha \right| (\text{因 } B_F \subset G_n \cap \textstyle\bigcap_{j=1}^{l} T^{-s_j}D) \\
&\leqslant \prod_{j=1}^{l} |T^{-s_j}(\alpha_0^{N-1} \cap D)| \cdot \prod_{r\in H_F} |T^{-r}\alpha| = |\alpha_0^{N-1} \cap D|^l \cdot k^{|H_F|} \\
&\leqslant k^{n\sqrt{\delta}+N} \cdot (N(\mathcal{U}_0^{N-1}))^{\frac{n}{N}+1}.
\end{aligned}$$

即

$$|\alpha_0^{n-1} \cap B_F| \leqslant k^{n\sqrt{\delta}+N} \cdot (N(\mathcal{U}_0^{N-1}))^{\frac{n}{N}+1}. \tag{6.3.13}$$

设 $b_n = k^{n\sqrt{\delta}+N} \cdot (N(\mathcal{U}_0^{N-1}))^{\frac{n}{N}+1}$ 和 $\gamma = \{B_F\}_{F\in\mathcal{F}_n} \cup \{X \setminus G_n\}$. 则 $\gamma \in \mathcal{P}_X$ 且

$$\begin{aligned}
& H_\mu(\alpha_0^{n-1}) \leqslant H_\mu(\alpha_0^{n-1} \vee \gamma) \\
= & \sum_{F\in\mathcal{F}_n} H_\mu(\alpha_0^{n-1} \cap B_F) + H_\mu(\alpha_0^{n-1} \cap (X \setminus G_n)) \\
\leqslant & \sum_{F\in\mathcal{F}_n} \mu(B_F)(\log|\alpha_0^{n-1} \cap B_F| - \log\mu(B_F)) \\
& + \mu(X \setminus G_n)(\log|\alpha_0^{n-1} \cap (X \setminus G_n)| - \log\mu(X \setminus G_n)) \\
\leqslant & \sum_{F\in\mathcal{F}_n} \mu(B_F)(\log b_n - \log\mu(B_F)) - \mu(X \setminus G_n)\log\mu(X \setminus G_n) \\
& + \sqrt{\delta}\log k^n \ (\text{由 (6.3.13)}) \\
\leqslant & \log b_n + \sum_{F\in\mathcal{F}_n} -\mu(B_F)\log\mu(B_F) - \mu(X \setminus G_n)\log\mu(X \setminus G_n) + n\sqrt{\delta}\log k \\
\leqslant & \log b_n + \log(|\mathcal{F}_n| + 1) + n\sqrt{\delta}\log k,
\end{aligned}$$

在上面的第三个和最后一个不等式中, 我们使用了如下事实: 如果 $m \in \mathbb{N}$, $x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m$ 且 $\sum_{i=1}^{m} x_i \leqslant 1$, 则 $\sum_{i=1}^{m} -x_i\log x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\log m - \log\sum_{i=1}^{m} x_i\right)$.

最后, 有

$$\begin{aligned}
& h_\mu^+(T, \mathcal{U}) \leqslant h_\mu(T, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1}) \\
\leqslant & \lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}(\log b_n + \log(|\mathcal{F}_n| + 1)) + \sqrt{\delta}\log k \\
= & \lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}(\log(|\mathcal{F}_n| + 1) \\
& + (n\sqrt{\delta} + N)\log k + \left(\frac{n}{N} + 1\right)\log N(\mathcal{U}_0^{N-1})) + \sqrt{\delta}\log k
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log |\mathcal{F}_n| + \frac{1}{N} \log N(\mathcal{U}_0^{N-1}) + 2\sqrt{\delta} \log k$$
$$\leqslant \frac{1}{N} \log N(\mathcal{U}_0^{N-1}) + 2\varepsilon \quad (\text{由 } (6.3.7) \text{ 和 } (6.3.12))$$
$$\leqslant h_{\text{top}}(T, \mathcal{U}) + 3\varepsilon \quad (\text{由 } (6.3.6)).$$

因 $\varepsilon > 0$ 为任意的, 有 $h_\mu^+(T,\mathcal{U}) \leqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})$. □

习　题　6.3

1. 证明引理 6.3.1.
2. 证明引理 6.3.2.
3. 完成引理 6.3.4 一般情形的证明.
4. 对任意一个动力系统证明定理 6.3.8.

§6.4　测度熵串

本节将局部化测度熵引入测度 n 熵串的概念, 随后说明测度 n 熵串的全体恰为某个不变测度相对其 Pinsker 因子的 n 次相对乘积测度的支撑再除去对角线的点. 对动力系统 (X,T) 和 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, 考虑 $\mathcal{B}(X)$ 在 μ 下的完备化 $\mathcal{B}_\mu$. 如果 $A \in \mathcal{B}_\mu$, 则称 $A \subset X$ 为μ **可测集**, 在不混淆情况下, 称 A 为**可测集**. 现在, 定义相对于 μ 的测度 n 熵串.

定义 6.4.1　设 (X,T) 为动力系统, $n \geqslant 2$ 和 $(x_i)_1^n \in X^n \setminus \Delta_n(X)$. 如果对任意相对于 $\{x_i\}_1^n$ 可允许的可测剖分 (或 Borel 剖分) α, 有 $h_\mu(T,\alpha) > 0$ 成立, 则称 $(x_i)_1^n$ 为**相对于 μ 的测度 n 熵串**.

用 $E_n^\mu(X,T)$ 表示 (X,T) 的全体相对于 μ 的测度 n 熵串. 以下研究 $E_n^\mu(X,T)$ 的结构. 为此, 设 P_μ 为 $(X,\mathcal{B}_\mu,\mu,T)$ 的 Pinsker σ 代数. 在 $(X^n, \mathcal{B}_\mu^{(n)}, T^{(n)})$ 上定义测度 $\lambda_n(\mu)$ 满足

$$\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n A_i) = \int_X \Pi_{i=1}^n \mathbb{E}(1_{A_i}|P_\mu) \mathrm{d}\mu, \tag{6.4.1}$$

其中 $\mathcal{B}_\mu^{(n)} = \mathcal{B}_\mu \times \cdots \times \mathcal{B}_\mu$ (n 次乘积) 以及 $A_i \in \mathcal{B}_\mu, i = 1,2,\cdots,n$. 为获得 $E_n^\mu(X,T)$ 的刻画, 我们还需要如下的引理.

引理 6.4.2　设 $\mathcal{U} = \{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$ 为 X 的可测覆盖. 则 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i^c) > 0$ 当且仅当对任意比 $\mathcal{U}$ 细的有限 (或 n 个元素构成的) 可测剖分 α, 有 $h_\mu(T,\alpha) > 0$.

证明　($\Leftarrow$) 假设对任意比 $\mathcal{U}$ 细的有限 (或 n 个元素构成的) 可测剖分 α, 有 $h_\mu(T,\alpha) > 0$. 设 $C_i = \{x \in X : \mathbb{E}(1_{U_i^c}|P_\mu)(x) > 0\} \in P_\mu$. 因

$$0 = \int_{X\setminus C_i} \mathbb{E}(1_{U_i^c}|P_\mu)(x)\mathrm{d}\mu(x) = \mu(U_i^c \cap (X \setminus C_i)),$$

有 $\mu(U_i^c\setminus C_i)=0$, $1\leqslant i\leqslant n$. 取 $D_i=C_i\cup(U_i^c\setminus C_i)$, 则 $D_i\in P_\mu$ 且 $D_i^c\subseteq U_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. 对任意 $s=(s(1),s(2),\cdots,s(n))\in\{0,1\}^n$, 设 $D_s=\bigcap_{i=1}^n D_i(s(i))$, 其中 $D_i(0)=D_i$ 且 $D_i(1)=X\setminus D_i$. 再设 $D_0^j=(\bigcap_{i=1}^n D_i)\cap(U_j\setminus\bigcup_{k=1}^{j-1}U_k)$, $j=1,2,\cdots,n$.

考虑可测剖分 $\alpha=\{D_s:s\in\{0,1\}^n$ 且 $s\neq(0,0,\cdots,0)\}\cup\{D_0^1,D_0^2,\cdots,D_0^n\}$. 对任意 $s\in\{0,1\}^n$ 且 $s\neq(0,0,\cdots,0)$, 有 $s(i)=1$ 对某个 $1\leqslant i\leqslant n$ 成立, 因此 $D_s\subset D_i^c\subset U_i$. 显然 $D_0^j\subset U_j$, $j=1,2,\cdots,n$. 从而 α 为 $\mathcal{U}$ 的加细, 所以 $h_\mu(T,\alpha)>0$.

现在, 如果 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i^c)=0$. 则易见 $\mu(\bigcap_{i=1}^n D_i)=\mu(\bigcap_{i=1}^n C_i)=0$. 这说明 $D_0^1,D_0^2,\cdots,D_0^n\in P_\mu$. 因 $D_1,D_2,\cdots,D_n\in P_\mu$, 易见 $D_s\in P_\mu$ 对 $s\in\{0,1\}^n$. 这样 α 的每个元素都属于 P_μ, 因此 $h_\mu(T,\alpha)=0$, 矛盾.

$(\Rightarrow)$ 现在假设 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i^c)>0$. 对任意比 $\mathcal{U}$ 细的有限可测剖分 α, 不失一般性, 可以假设 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 且 $A_i\subset U_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

注意到

$$\begin{aligned}\int_X\prod_{i=1}^n\mathbb{E}(1_{X\setminus A_i}|P_\mu)(x)\mathrm{d}\mu(x)&\geqslant\int_X\prod_{i=1}^n\mathbb{E}(1_{U_i^c}|P_\mu)(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\lambda_n(\mu)\left(\prod_{i=1}^n U_i^c\right)>0.\end{aligned}$$

从而, 对某个 $1\leqslant j\leqslant n$, 有 $A_j\notin P_\mu$. 这说明 $h_\mu(T,\alpha)>0$. □

现在给出 $E_n^\mu(X,T)$, $n\geqslant 2$ 的一个刻画.

定理 6.4.3 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 则对 $n\geqslant 2$, 有

$$E_n^\mu(X,T)=\mathrm{supp}(\lambda_n(\mu))\setminus\Delta_n(X).$$

证明 设 $(x_i)_1^n\in E_n^\mu(X,T)$. 为说明 $(x_i)_1^n\in\mathrm{supp}(\lambda_n(\mu))\setminus\Delta_n(X)$, 只需说明对 x_i 的任意邻域 U_i, 有 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i)>0$. 设 $\mathcal{U}=\{U_1^c,U_2^c,\cdots,U_n^c\}$. 不失一般性, 可以假设 $\mathcal{U}$ 为 X 的可测覆盖 (必要时取更小的 U_i). 清楚地, 任意比 $\mathcal{U}$ 细的有限可测剖分 α 一定也是相对于 $(x_i)_1^n$ 可允许的可测剖分, 从而 $h_\mu(T,\alpha)>0$. 再由引理 6.4.2 知 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i)>0$.

现在假设 $(x_i)_1^n\in\mathrm{supp}(\lambda_n(\mu))\setminus\Delta_n(X)$. 我们将说明对任意相对于 $(x_i)_1^n$ 可允许的可测剖分 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$, 有 $h_\mu(T,\alpha)>0$. 因 α 为相对于 $(x_i)_1^n$ 可允许的可测剖分, 所以对每个 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$, 存在 x_i 的邻域 U_i, 使得能找到 $j_i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 满足 $A_i\subset U_{j_i}^c$. 即 α 为 $\mathcal{U}=\{U_1^c,U_2^c,\cdots,U_n^c\}$ 的加细. 最后因 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i)>0$, 由引理 6.4.2 知 $h_\mu(T,\alpha)>0$. □

引理 6.4.4 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 和 P_μ 是 (X,T,μ) 的 Pinsker σ 代数. 则对任意 $\alpha\in\mathcal{P}_X$, $\lim\limits_{k\to+\infty}h_\mu(T^k,\alpha)=H_\mu(\alpha|P_\mu)$.

证明　不妨设 T 为满射 (必要时用 $\mathrm{supp}(\mu)$ 代替 X). 设 $\pi_1:(\widetilde{X},\sigma_T)\to(X,T)$ 为 (X,T) 的自然扩充. 取 $\nu\in\mathcal{M}(\widetilde{X},\sigma_T)$, 使得 $\pi_1\nu=\mu$. 设 P_ν 为 $(\widetilde{X},\sigma_T,\nu)$ 的 Pinsker σ 代数, 并且 $\pi_1^{-1}(\mathcal{B}_X)=\{\pi^{-1}A:A\in\mathcal{B}_X\}$. 易见 $\pi_1^{-1}(\mathcal{B}_X)\cap P_\nu=\pi^{-1}P_\mu$. 一方面,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}h_\mu(T^k,\alpha)&=\lim_{k\to+\infty}h_\nu(\sigma_T^k,\pi_1^{-1}\alpha)\\&=H_\nu(\pi^{-1}\alpha|P_\nu)\quad(\text{由引理 5.3.9})\\&\geqslant H_\nu(\pi^{-1}\alpha|\pi^{-1}P_\mu)\\&=H_\mu(\alpha|P_\mu).\end{aligned}$$

另一方面, 容易看出 $h_\mu(T^k,\alpha)\leqslant H_\mu(\alpha|P_\mu)$ 对每个 $k\in\mathbb{N}$ 成立 (留作习题). 因此有 $\lim\limits_{k\to+\infty}h_\mu(T^k,\alpha)=H_\mu(\alpha|P_\mu)$. □

下面的定理 6.4.5 是十分关键的, 它的证明方法和结果可能会对解决另外一些问题有所帮助.

定理 6.4.5　设 (X,T) 为动力系统, $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$ 为 X 的可测覆盖, 其中 $n\geqslant2$. 如果对任意有限 (或 n 个元素构成) 的比 $\mathcal{U}$ 细的可测覆盖 β, 有 $h_\mu(T,\beta)>0$ 成立, 则 $h_\mu(T,\mathcal{U})>0$.

证明　由引理 6.4.2 知 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^nU_i^c)>0$, 即 $\int_X\Pi_{i=1}^n\mathbb{E}(1_{U_i^c}|P_\mu)(x)\mathrm{d}\mu(x)>0$. 因此, 存在自然数 M, 使得 $\mu(D)>0$, 其中 $D=\left\{x\in X:\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mathbb{E}(1_{U_i^c}|P_\mu)(x)\geqslant\dfrac{1}{M}\right\}$.

对任意 $s=(s(1),s(2),\cdots,s(n))\in\{0,1\}^n$, 设 $A_s=\bigcap_{i=1}^nU_i(s(i))$, 其中 $U_i(0)=U_i$, $U_i(1)=X\setminus U_i$. 然后令 $\alpha=\{A_s:s\in\{0,1\}^n\}$. 则有

断言　对任意 $j\in\mathbb{Z}_+$ 和 X 的比 $T^{-j}\mathcal{U}$ 细的有限可测剖分 β, 有

$$H_\mu(T^{-j}\alpha|\beta\vee P_\mu)\leqslant H_\mu(\alpha|P_\mu)-\frac{\mu(D)}{M}.$$

断言的证明　仅对 $j=0$ 的情形证明. 对于一般的 $j\in\mathbb{Z}_+$, 注意到对每个 $f\in L^1(\mu)$, 有 $\mathbb{E}(T^jf|P_\mu)(x)=\mathbb{E}(f|P_\mu)(T^jx)$ 对 μ-a.e. x 成立, 所以 $H_\mu(T^{-j}\alpha|P_\mu)=H_\mu(\alpha|P_\mu)$, 进而容易将其转化为 $j=0$ 的情形 (留作习题). 不失一般性, 假设 $\beta=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$ 且 $B_i\subset U_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 设 $f(x)=\begin{cases}-x\log x, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}H_\mu(\alpha|\beta\vee P_\mu)&=H_\mu(\alpha\vee\beta|P_\mu)-H_\mu(\beta|P_\mu)\\&=\int_X\sum_{s\in\{0,1\}^n}\sum_{i=1}^nf(\mathbb{E}(1_{A_s\cap B_i}|P_\mu))\mathrm{d}\mu-\int_X\sum_{i=1}^nf(\mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu))\mathrm{d}\mu\\&=\int_X\sum_{s\in\{0,1\}^n}\sum_{i=1}^n-\mathbb{E}(1_{A_s\cap B_i}|P_\mu)\log\left(\frac{\mathbb{E}(1_{A_s\cap B_i}|P_\mu)}{\mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu)}\right)\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

$$= \int_X \sum_{s\in\{0,1\}^n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu) f\left(\frac{\mathbb{E}(1_{A_s\cap B_i}|P_\mu)}{\mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu)}\right) \mathrm{d}\mu$$

$$= \sum_{s\in\{0,1\}^n} \int_X \sum_{i,s(i)=0} \mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu) f\left(\frac{\mathbb{E}(1_{A_s\cap B_i}|P_\mu)}{\mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu)}\right) \mathrm{d}\mu, \tag{6.4.2}$$

其中 $i, s(i) = 0$ 表示所有满足 $s(i) = 0$ 的 i. 上面表达式的最后一个等式成立原因在于：对任意 $s \in \{0,1\}^n$ 和满足 $s(i) = 1$ 的 $1 \leqslant i \leqslant n$, 有 $A_s \cap B_i = \varnothing$ 成立以及 $\dfrac{\mathbb{E}(1_{A_s\cap B_i}|P_\mu)}{\mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu)}(x) \equiv 0$ 这一事实. 因 f 为凸函数, 所以 (6.4.2) 有下面的估计：

$$\begin{aligned}
H_\mu(\alpha|\beta\vee P_\mu) \leqslant & \sum_{s\in\{0,1\}^n} \int_X \left(\sum_{k,s(k)=0} \mathbb{E}(1_{B_k}|P_\mu)\right) \\
& \times f\left(\sum_{i,s(i)=0} \frac{\mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu)}{\sum\limits_{k,s(k)=0} E(1_{B_k}|P_\mu)} \frac{\mathbb{E}(1_{A_s\cap B_i}|P_\mu)}{\mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu)}\right) \mathrm{d}\mu \\
= & \sum_{s\in\{0,1\}^n} \int_X \left(\sum_{k,s(k)=0} \mathbb{E}(1_{B_k}|P_\mu)\right) f\left(\frac{\sum\limits_{i,s(i)=0} \mathbb{E}(1_{A_s\cap B_i}|P_\mu)}{\sum\limits_{k,s(k)=0} \mathbb{E}(1_{B_k}|P_\mu)}\right) \mathrm{d}\mu \\
= & \sum_{s\in\{0,1\}^n} \int_X \left(\sum_{k,s(k)=0} \mathbb{E}(1_{B_k}|P_\mu)\right) f\left(\frac{\mathbb{E}(1_{A_s}|P_\mu)}{\sum\limits_{k,s(k)=0} \mathbb{E}(1_{B_k}|P_\mu)}\right) \mathrm{d}\mu \\
= & \sum_{s\in\{0,1\}^n} \left(\int_X f(\mathbb{E}(1_{A_s}|P_\mu)) \mathrm{d}\mu \right.\\
& \left. - \int_X \mathbb{E}(1_{A_s}|P_\mu) \log\left(\frac{1}{\sum\limits_{k,s(k)=0} \mathbb{E}(1_{B_k}|P_\mu)}\right) \mathrm{d}\mu\right) \\
= & H_\mu(\alpha|P_\mu) - \sum_{s\in\{0,1\}^n} \int_X \mathbb{E}(1_{A_s}|P_\mu) \log\left(\frac{1}{\sum\limits_{k,s(k)=0} \mathbb{E}(1_{B_k}|P_\mu)}\right) \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

因 β 为剖分, 所以如果 $s(i) = 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$, 从而 $\sum\limits_{k,s(k)=0} \mathbb{E}(1_{B_k}|P_\mu) \leqslant \mathbb{E}(1_{X\setminus B_i}|P_\mu)$. 令 $b_i = \mathbb{E}(1_{X\setminus B_i}|P_\mu)$, $i = 1, \cdots, n$, 则有

$$\begin{aligned}
& \sum_{s\in\{0,1\}^n} \int_X \mathbb{E}(1_{A_s}|P_\mu) \log\left(\frac{1}{\sum\limits_{k,s(k)=0} \mathbb{E}(1_{B_k}|P_\mu)}\right) \mathrm{d}\mu \\
\geqslant & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_X \left(\sum_{s,s(i)=1} \mathbb{E}(1_{A_s}|P_\mu)\right) \log \frac{1}{b_i} \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_X \mathbb{E}(1_{U_i^c}|P_\mu)\log\frac{1}{b_i}\mathrm{d}\mu \geqslant \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{n}\int_D \log\frac{1}{b_i}\mathrm{d}\mu\\
&=\frac{1}{nM}\int_D \log\frac{1}{\Pi_{i=1}^n b_i}\mathrm{d}\mu \geqslant \frac{1}{M}\int_D \log\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}\mathrm{d}\mu = \frac{\mu(D)}{M}\log\left(\frac{n}{n-1}\right),
\end{aligned}
$$

因 $\left(\dfrac{b_1+\cdots+b_n}{n}\right)^n \geqslant b_1\cdots b_n$, 以及 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j\neq i}\mathbb{E}(1_{B_j}|P_\mu) = (n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}(1_{B_i}|P_\mu) = n-1$, 所以 $H_\mu(\alpha|\beta\vee P_\mu) \leqslant H_\mu(\alpha|P_\mu) - \dfrac{\mu(D)}{M}\log\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$. 这就完成了断言的证明.

取 $\varepsilon = \dfrac{\mu(D)}{M}\log\left(\dfrac{n}{n-1}\right) > 0$. 因 $\lim\limits_{m\to+\infty} h_\mu(T^m,\alpha) = H_\mu(\alpha|P_\mu)$ (参见引理 6.4.4), 所以存在 $l>0$, 使得 $h_\mu(T^l,\alpha) \geqslant H_\mu(\alpha|P_\mu) - \dfrac{\varepsilon}{2}$. 设 $S=T^l$. 对 X 的任意比 $\mathcal{U}_0^{n-1}$ 细的有限可测剖分 β_n. 因 $\beta \succeq T^{-i}\mathcal{U}$ 对每个 $i\in\{0,\cdots,n-1\}$, 由上述断言得

$$
\begin{aligned}
H_\mu(\beta_n) &\geqslant H_\mu(\beta_n|P_\mu)\\
&= H_\mu\left(\beta_n \vee \bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}\alpha|P_\mu\right) - H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}\alpha|\beta_n\vee P_\mu\right)\\
&\geqslant H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}\alpha|P_\mu\right) - \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu(S^{-i}\alpha|\beta_n\vee P_\mu)\\
&\geqslant H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}\alpha|P_\mu\right) - n(H_\mu(\alpha|P_\mu)-\varepsilon)\ \ (\text{由断言}).
\end{aligned}
$$

因此 $H_\mu\left(\bigvee\limits_{i=0}^{n-1} S^{-i}\mathcal{U}\right) \geqslant H_\mu\left(\bigvee\limits_{i=0}^{n-1} S^{-i}\alpha|P_\mu\right) - n(H_\mu(\alpha|P_\mu)-\varepsilon)$. 进而

$$
\begin{aligned}
h_\mu(S,\mathcal{U}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}\mathcal{U}\right)\\
&\geqslant \lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\left(H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}\alpha|P_\mu\right) - n(H_\mu(\alpha|P_\mu)-\varepsilon)\right)\\
&= h_\mu(S,\alpha) - H_\mu(\alpha|P_\mu) + \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

在此, 我们使用到如下事实: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}\alpha|P_\mu) = h_\mu(S,\alpha)$ (使用定理 5.3.8 可得可逆时的证明, 对不可逆系统可以通过自然扩充获得 (留作习题)).

最后 $h_\mu(T,\mathcal{U}) \geqslant \dfrac{1}{l}h_\mu(S,\mathcal{U}) > 0$, 这就完成了证明. □

该定理一个直接的推论是

推论 6.4.6 设 (X,T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ 和 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$ 为 X 的可测覆盖. 则 $h_\mu(T,\mathcal{U})>0$ 当且仅当 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i^c)>0$.

证明 由引理 6.4.2 和定理 6.4.5 即得本推论. □

由推论 6.4.6 和引理 6.3.5, 现在我们能证明测度熵串具有遍历分解性.

定理 6.4.7 设 (X,T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ 以及 $\mu=\int_{\mathcal{M}^e(X,T)}\theta \mathrm{d}m(\theta)$ 为 μ 的遍历分解. 则

(1) 对 m-a.e. θ, $E_n^\theta(X,T)\subseteq E_n^\mu(X,T)$, 其中 $n\geqslant 2$;

(2) 如果 $(x_i)_1^n \in E_n^\mu(X,T)$, 则对 $(x_i)_1^n$ 的每个邻域 V, $m(\{\theta: V\cap E_n^\theta(X,T)\neq\varnothing\})>0$. 因此, 适当地选择 $\Omega\subseteq \mathcal{M}^e(X,T)$ 可以做到

$$m(\Omega)=1\text{且}\overline{\bigcup\{E_n^\theta(X,T):\theta\in\Omega\}}\setminus\Delta_n(X)=E_n^\mu(X,T).$$

证明 (1) 设 $U_i, i=1,2,\cdots,n$ 为 X 满足 $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{cl}(U_i)=\varnothing$ 和 $(\Pi_{i=1}^n\mathrm{cl}(U_i))\cap E_n^\mu(X,T)=\varnothing$ 的开集. 由于 $E_n^\mu(X,T)=\mathrm{supp}\lambda_n(\mu)\setminus\Delta_n(X)$, 有 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n\mathrm{cl}(U_i))=0$. 由推论 6.4.6 知 $h_\mu(T,\mathcal{U})=0$, 其中 $\mathcal{U}=\{U_1^c,U_2^c,\cdots,U_n^c\}$. 因 $\int_{\mathcal{M}^e(X,T)}h_\theta(T,\mathcal{U})\mathrm{d}m(\theta)=h_\mu(T,\mathcal{U})=0$, 所以 $h_\theta(T,\mathcal{U})=0$ 对 m-a.e. θ 成立. 由推论 6.4.6, $\lambda_n(\theta)(\Pi_{i=1}^n U_i)=0$ 对 m-a.e. θ 成立. 因此 $(\Pi_{i=1}^n U_i)\cap E_n^\theta(X,T)=\varnothing$ 对 m-a.e. θ 成立. 由于 $E_n^\mu(X,T)\cup\Delta_n(X)$ 为 $X^{(n)}$ 的闭集, 所以它的余集可以表示为可数个形如 $\Pi_{i=1}^n U_i$ 的并集, 其中 $U_i, i=1,2,\cdots,n$ 为 X 满足 $\bigcap_{i=1}^n\mathrm{cl}(U_i)=\varnothing$ 的开集. 由定义, 对所有 θ 有 $E_n^\theta(X,T)\cap\Delta_n(X)=\varnothing$, 这样就推得对 m-a.e. θ, $E_n^\theta(X,T)\cap(E_n^\mu(X,T))^c=\varnothing$.

(2) 不失一般性, 假设 $V=\Pi_{i=1}^n A_i$, 其中 A_i 为 x_i 的闭邻域且 $\bigcap_{i=1}^n A_i=\varnothing$. 因 $\lambda_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n A_i)>0$, 有 $h_\mu(T,\{A_1^c,A_2^c,\cdots,A_n^c\})>0$. 又由于

$$\int_\Omega h_\theta(T,\{A_1^c,A_2^c,\cdots,A_n^c\})\mathrm{d}m(\theta)=h_\mu(T,\{A_1^c,A_2^c,\cdots,A_n^c\})>0,$$

所以存在 $\Omega'\subset\mathcal{M}^e(X,T)$, $m(\Omega')>0$, 使得当 $\theta\in\Omega'$ 时, 就有

$$h_\theta(T,\{A_1^c,A_2^c,\cdots,A_n^c\})>0,\quad \text{即 } \lambda_n(\theta)(\Pi_{i=1}^n A_i)>0.$$

明显地, 对 $\theta\in\Omega'$ 有 $(\Pi_{i=1}^n A_i)\cap E_n^\theta(X,T)\neq\varnothing$. 这说明 $m(\{\theta: V\cap E_n^\theta(X,T)\neq\varnothing\})>0$. □

在本节的最后部分, 我们主要证明测度熵串具有提升性质. 为此还需要下面的引理.

引理 6.4.8 设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为因子映射以及 $\mathcal{U}\in\mathcal{C}_Y$. 则对任意 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 有 $h_\mu(T,\pi^{-1}\mathcal{U})=h_{\pi\mu}(S,\mathcal{U})$.

证明 对一个动力系统 (Z,R) 和 $\mathcal{V}\in\mathcal{C}_Z$. 设 α 为由 $\mathcal{V}$ 生成的 Borel 剖分, 定义

$$\mathcal{P}^*(\mathcal{V})=\{\beta\in\mathcal{P}_Z:\beta\succeq\mathcal{V}\text{且 }\beta\text{ 的每个元素为 }\alpha\text{ 的某几个元素的并}\}. \tag{6.4.3}$$

设

$$f(x) = \begin{cases} -x\log x, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

利用以下事实:

$$f(x_1 - \delta) + f(x_2 + \delta) < f(x_1) + f(x_2)$$

对 $0 < \delta \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1 - x_1$ 成立, 不难证明 (留作习题)

$$H_\theta(\mathcal{V}) = \min_{\beta \in \mathcal{P}^*(\mathcal{V})} H_\theta(\beta) \tag{6.4.4}$$

对每个 $\theta \in \mathcal{M}(Z, R)$ 成立. 现在, 对 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\mathcal{P}^*((\pi^{-1}\mathcal{U})_0^{n-1}) = \pi^{-1}\mathcal{P}^*(\mathcal{U}_0^{n-1})$. 因此

$$\begin{aligned} H_{\pi\mu}(\mathcal{U}_0^{n-1}) &= \inf_{\beta \in \mathcal{P}^*(\mathcal{U}_0^{n-1})} H_{\pi\mu}(\beta) = \inf_{\beta \in \mathcal{P}^*(\mathcal{U}_0^{n-1})} H_\mu(\pi^{-1}\beta) \\ &= \inf_{\beta' \in \mathcal{P}^*((\pi^{-1}\mathcal{U})_0^{n-1})} H_\mu(\beta') = H_\mu((\pi^{-1}\mathcal{U})_0^{n-1}). \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

在等式 (6.4.5) 两边同时除以 n, 再令 $n \to \infty$, 得到 $h_\mu(T, \pi^{-1}\mathcal{U}) = h_{\pi\mu}(S, \mathcal{U})$. □

定理 6.4.9　设 $\pi: (Y, S) \to (X, T)$ 为因子映射, $\nu \in \mathcal{M}(Y, S)$ 以及 $\mu = \pi\nu$. 则

(1) 对每个 $(y_i)_1^n \in E_n^\nu(Y, S)$, 设 $\pi(y_i) = x_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 如果 $(x_i)_1^n \notin \Delta_n(X)$, 则 $(x_i)_1^n \in E_n^\mu(X, T)$;

(2) 对每个 $(x_i)_1^n \in E_n^\mu(X, T)$, 存在 $(y_i)_1^n \in E_n^\nu(Y, S)$ 满足 $\pi(y_i) = x_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证明　(1) 直接由定义可得. 以下证明 (2). 如果 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E_n^\mu(X, T)$. 对 $m \in \mathbb{N}$ 和 $i = 1, 2, \cdots, n$, 任取 x_i 的闭邻域 V_i^m, 使其满足 $\bigcap_{i=1}^n V_i^m = \varnothing$ 且 $\max_{i=1}^n \operatorname{diam}(V_i^m) < \dfrac{1}{m}$. 考虑开覆盖 $\mathcal{U}_m = \{(V_1^m)^c, \cdots, (V_n^m)^c\}$, 则 $h_\nu(S, \pi^{-1}\mathcal{U}_m) = h_\mu(T, \mathcal{U}_m) > 0$ (参见引理 6.4.8). 由推论 6.4.6 知 $\lambda_n(\nu)(\prod_{i=1}^n V_i^m) > 0$. 注意到 $\prod_{i=1}^n V_i^m$ 为闭集, 所以 $\prod_{i=1}^n V_i^m \cap \operatorname{supp}(\lambda_n(\mu)) \neq \varnothing$. 进而存在 $y_i^m \in \pi^{-1}(V_i^m)^c$, 使得 $(y_1^m, \cdots, y_n^m) \in \operatorname{supp}(\lambda_n(\mu))$. 适当选取子列, 不妨设 $(y_1^m, \cdots, y_n^m) \to (y_1, \cdots, y_n)$. 显然 $y_i \in \pi^{-1}(x_i)$, $i = 1, \cdots, n$ 且 $(y_1, \cdots, y_n) \in \operatorname{supp}(\lambda_n(\mu))$. 最后由定理 6.4.3 知 $(y_1, \cdots, y_n) \in E_n^\nu(Y, S)$. □

习　题　6.4

1. 设 (X, T) 为动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ 和 $K \subseteq X$. 称 K 是 μ **熵集**, 如果对任意相对于 K 可允许的剖分 α 均具有正测度熵. 证明:

(1) K 为 μ 熵集当且仅当对任意一个满足 $|\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}| \geqslant 2$ 的 $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\} \subset K$ 有 $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\} \subseteq E_n^\mu(X, T)$;

(2) K 为 μ 熵集当且仅当 $\overline{K}$ 为 μ 熵集;

(3) 如果用 $E_s^\mu(X,T)$ 记 (X,T) 的全体闭 μ 熵集且将 $E_n^\mu(X,T)$ 视为 $E_s^\mu(X,T)$ 的子集; 则 $\overline{\bigcup_{n\geqslant 2} E_n^\mu(X,T)} = E_s^\mu(X,T)$;

(4) $E_s^\mu(X,T)$ 具有类似于定理 6.4.7 的遍历分解性.

2. 设 $\pi:(Y,S)\to(X,T)$ 为因子映射, $\nu\in\mathcal{M}(Y,S)$ 和 $\mu=\pi\nu$, 证明: $\pi(E_s^\nu(Y,S))\setminus\{\{x\}:x\in X\}=E_s^\mu(X,T)$. 进而, 测度熵集具有提升性质.

3. 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 和 P_μ 是 (X,T,μ) 的 Pinsker σ 代数. 证明: 如果 $\alpha\in\mathcal{P}_X$, 则 $h_\mu(T^k,\alpha)\leqslant H_\mu(\alpha|P_\mu)$ 对每个 $k\in\mathbb{N}$.

4. 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 和 P_μ 是 (X,T,μ) 的 Pinsker σ 代数. 证明: 如果 $\alpha\in\mathcal{P}_X$, 则 $h_\mu(T,\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty} H_\mu(\alpha_0^{n-1}|P_\mu)$.

5. 证明公式 (6.4.4).

§6.5 局部变分原理

对一个动力系统 (X,T), Goodwyn (1969) 对每个 T 不变测度 μ 证明了 $h_\mu(T)\leqslant h_{\text{top}}(T)$, 随后 Goodman (1971) 证明了 $\sup_\mu h_\mu(T)\geqslant h_{\text{top}}(T)$, 这里的极大值是取遍所有 T 不变测度, 于是建立了熵的变分原理. Misiruwicz (1976) 对熵的变分原理给出了一个简短而优美的证明. 本节将用一般化熵的变分原理建立相对于给定开覆盖的熵的局部变分原理, 该局部变分原理是进一步研究拓扑熵串和测度熵串关系的一个重要而基本的工具.

确切地说, 本节的主要目的是证明如下定理.

定理 6.5.1 (局部变分原理) *设 (X,T) 为动力系统和 $\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o$. 则*

$$h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})=\sup\{h_\mu(T,\mathcal{U}):\mu\in\mathcal{M}(X,T)\},$$

且存在 T 不变的遍历测度 μ, 使得 $h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})=h_\mu(T,\mathcal{U})$.

在证明局部变分原理之前我们还要做一些准备工作. 需要说明的是: 在定理 6.5.1 中对所有开覆盖取上界, 然后利用定理 6.3.3, 就得到了经典的变分原理.

定理 6.5.2 (变分原理) *设 (X,T) 为动力系统. 那么 $h_{\text{top}}(T)=\sup\{h_\mu(T):\mu\in\mathcal{M}(X,T)\}$.*

注记 6.5.3 *不同于局部变分原理, 有时不能取到 T 不变的测度 μ, 使得 $h_{\text{top}}(T)=h_\mu(T)$, 反例参见文献 (Walters, 1982, §8.3). 把满足 $h_\mu(T)=h_{\text{top}}(T)$ 的测度 μ 称为具有***最大熵的测度***, 关于这个主题可参见文献 (Walters, 1982, §8.3).*

首先, 我们需要如下一个十分关键的引理:

引理 6.5.4 *设 (X,T) 为动力系统, $\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o$. 假设 $K\in\mathbb{N}$ 以及 $\{\alpha_l\}_{l=1}^K$ 为 X 的 K 个比 $\mathcal{U}$ 细的 Borel 剖分. 那么对每个 $N\in\mathbb{N}$, 存在 X 的一个具有 $\left[\dfrac{N(\mathcal{U}_0^{N-1})}{K}\right]$ 个元素的有限集 B_N, 其满足对每个 $1\leqslant l\leqslant K$, 剖分 $(\alpha_l)_0^{N-1}$ 的每个原子至多包含了*

B_N 中的一个点, 这里 $\left[\dfrac{N(\mathcal{U}_0^{N-1})}{K}\right]$ 表示 $\dfrac{N(\mathcal{U}_0^{N-1})}{K}$ 的整数部分.

证明　设 $N \in \mathbb{N}$. 对任意 $x \in X$ 和 $1 \leqslant l \leqslant K$, 用 $A_l(x)$ 表示剖分 $(\alpha_l)_0^{N-1}$ 中包含 x 的原子. 易见, 对任意 $x_1, x_2 \in X$ 和 $1 \leqslant l \leqslant K$, x_1 和 x_2 在 $(\alpha_l)_0^{N-1}$ 同一个原子中当且仅当 $A_l(x_1) = A_l(x_2)$.

设 B'_N 为 X 满足以下条件 $(\star)$ 的极大子集:

$(\star)$ $(\alpha_l)_0^{N-1}, l = 1, 2, \cdots, k$ 每个原子至多包含了 B'_N 的一个点.

以下说明 B'_N 的元素个数不少于 $\left[\dfrac{N(\mathcal{U}_0^{N-1})}{K}\right]$. 如若不然, 设 $B'_N = \{x_1, \cdots, x_d\}$, 其中 $d < \left[\dfrac{N(\mathcal{U}_0^{N-1})}{K}\right]$. 取 $B = (\bigcup_{i=1}^d \bigcup_{l=1}^K A_l(x_i))$. 注意到, 对每个 $1 \leqslant i \leqslant d$ 和 $1 \leqslant l \leqslant K$, $A_l(x_i)$ 为 $(\alpha_l)_0^{N-1}$ 的一个原子, 因此它包含于 $\mathcal{U}_0^{N-1}$ 某个元素中. 特别地, B 被 $\mathcal{U}_0^{N-1}$ 至多 $dK < K\left[\dfrac{N(\mathcal{U}_0^{N-1})}{K}\right] \leqslant N(\mathcal{U}_0^{N-1})$ 个元素的并所覆盖. 因此 $B \neq X$.

任取 $x \in X \setminus B$, 有 $x \notin \bigcup_{i=1}^d \bigcup_{l=1}^K A_l(x_i)$. 注意到对任意 $1 \leqslant i \leqslant d$ 和 $1 \leqslant l \leqslant K$, $A_l(x) \cap A_l(x_i) = \varnothing$. 可得 $B'_N \bigcup \{x\}$ 也为 X 满足条件 $(\star)$ 的有限子集, 这与 B'_N 的极大性相矛盾. 最后, 取 B_N 为 B'_N 的具有 $\left[\dfrac{N(\mathcal{U}_0^{N-1})}{K}\right]$ 个元素的某个子集, 这就完成了引理的证明. □

现在证明开覆盖熵的第一个变分不等式.

定理 6.5.5 (Blanchard-Host-Glasner 定理 (Blanchard etc., 1997))　*设 (X, T) 为动力系统以及 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o$. 那么存在 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ 满足 $h_\mu^+(T, \mathcal{U}) \geqslant h_{\text{top}}(T, \mathcal{U})$.*

证明　设 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_d\}$. 定义

$$\mathcal{U}(P) = \{\alpha \in \mathcal{P}_X : \alpha = \{A_1, \cdots, A_d\} \text{满足} A_m \subset U_m, \forall m \in \{1, \cdots, d\}\}. \tag{6.5.1}$$

情形 1. 首先假设 X 为零维空间. 此时 X 的既开又闭的子集全体为可数集且它们构成了 X 的一组可数基, 这样 $\mathcal{U}(P)$ 中全由既开又闭的子集构成的剖分的全体是一个可数集, 用 $\{\alpha_l : l \geqslant 1\}$ 表示这个可数集的一个枚举.

固定 $n \in \mathbb{N}$. 由引理 6.5.4 知, 存在具有 $\left[\dfrac{N(\mathcal{U}_n^{n^2+n-1})}{n}\right]$ 个元素的有限子集 C_n, 使得 $(\alpha_l)_n^{n^2+n-1}, 1 \leqslant l \leqslant n$ 的每个原子至多包含 C_n 的一个点. 设 ν_n 为在 C_n 上等分布的概率测度, 则对每个 $0 \leqslant i, l \leqslant n$, $T^{-i}(\alpha_l)_0^{n^2+n-1}$(比 $(\alpha_l)_n^{n^2+n-1}$ 细) 的每个元素包含了离散测度 ν_n 的至多一个原子. 因 $N(\mathcal{U}_0^{n^2+n-1}) \leqslant N(\mathcal{U}_0^{n-1}) N(\mathcal{U}_n^{n^2+n-1}) \leqslant d^n N(\mathcal{U}_n^{n^2+n-1})$, 有

$$N(\mathcal{U}_n^{n^2+n-1}) \geqslant d^{-n} N(\mathcal{U}_0^{n^2+n-1}).$$

这样, 对任意 $1 \leqslant i, l \leqslant n$, 有

$$\begin{aligned} H_{T^i\nu_n}((\alpha_l)_0^{n^2+n-1}) &= H_{\nu_n}(T^{-i}(\alpha_l)_0^{n^2+n-1}) \\ &= \log\left[\frac{N(\mathcal{U}_n^{n^2+n-1})}{n}\right] \geqslant \log\left[\frac{N(\mathcal{U}_0^{n^2+n-1})}{nd^n}\right]. \end{aligned}$$

固定满足 $m \leqslant n$ 的自然数 m, 并且设 $n^2+n = km+b$, 其中 $0 \leqslant b \leqslant m-1$. 则对 $1 \leqslant i, l \leqslant n$, 有

$$\begin{aligned} H_{T^i\nu_n}((\alpha_l)_0^{n^2+n-1}) &= H_{T^i\nu_n}\left((\alpha_l)_{km}^{n^2+n-1} \vee \bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-mj}(\alpha_l)_0^{m-1}\right) \\ &\leqslant H_{T^i\nu_n}((\alpha_l)_{km}^{n^2+n-1}) + \sum_{j=0}^{k-1} H_{T^i\nu_n}(T^{-mj}(\alpha_l)_0^{m-1}) \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} H_{T^{i+mj}\nu_n}((\alpha_l)_0^{m-1}) + m\log d. \end{aligned}$$

对每个 $1 \leqslant l \leqslant n$, 把上式从 $i=0$ 到 $m-1$ 求和, 就得到

$$\begin{aligned} m\log\left[\frac{N(\mathcal{U}_0^{n^2+n-1})}{nd^n}\right] &\leqslant \sum_{i=0}^{m-1} H_{T^i\nu_n}((\alpha_l)_0^{n^2+n-1}) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1} H_{T^{i+mj}\nu_n}((\alpha_l)_0^{m-1}) + m^2\log d \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n^2+n-1} H_{T^i\nu_n}((\alpha_l)_0^{m-1}) + m^2\log d. \end{aligned}$$

再令 $\mu_n = \dfrac{1}{n^2+n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n^2+n-1} T^i\nu_n$. 因 $H((\alpha_l)_0^{m-1})$ 为 $\mathcal{M}(X)$ 上的凸函数, 对每个 $1 \leqslant l \leqslant n$, 有

$$\begin{aligned} H_{\mu_n}((\alpha_l)_0^{m-1}) &\geqslant \frac{1}{n^2+n}\sum_{i=0}^{n^2+n-1} H_{T^i\nu_n}((\alpha_l)_0^{m-1}) \\ &\geqslant \frac{m}{n^2+n}\left(\log\left[\frac{N(\mathcal{U}_0^{n^2+n-1})}{nd^n}\right] - m\log d\right). \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

假设 μ_{n_k} 在弱 * 拓扑下收敛到 $\mu \in \mathcal{M}(X)$, 其中当 $k \to \infty$ 时, $n_k \to \infty$. 显然 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. 固定 $m, l \in \mathbb{N}$, 因 $(\alpha_l)_0^{m-1}$ 的每个元素既开又闭, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}H_\mu((\alpha_l)_0^{m-1}) &= \lim_{k\to\infty} H_{\mu_{n_k}}((\alpha_l)_0^{m-1}) \\ &\geqslant \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k^2+n_k}\left(\log\left[\frac{N(\mathcal{U}_0^{n_k^2+n_k-1})}{n_kd^{n_k}}\right] - m\log d\right) = h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}). \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

现在, 在不等式 (6.5.3) 中先固定 $l \in \mathbb{N}$, 再令 $m \to +\infty$, 就得到 $h_\mu(T,\alpha_l) \geqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})$.

对任何一个 $\beta \succeq \mathcal{U}$, 能找到 $\beta' \in \mathcal{U}^*$ 满足 $\beta \succeq \beta'$. 因 X 为零维空间, 对任意 $\delta > 0$, 存在 α_l, 使得 $\mu(\beta'\Delta\alpha_l) < \delta$. 因此, 由引理 5.4.5 知 $h_\mu(T,\beta') \geqslant \inf_{l\in\mathbb{N}} h_\mu(T,\alpha_l)$, 进而

$$h_\mu(T,\beta) \geqslant h_\mu(T,\beta') \geqslant \inf_{l\in\mathbb{N}} h_\mu(T,\alpha_l).$$

由 β 的任意性, 得到

$$h_\mu^+(T,\mathcal{U}) = \inf_{\beta\in\mathcal{P}_X,\beta\succeq\mathcal{U}} h_\mu(T,\beta) = \inf_{l\in\mathbb{N}} h_\mu(T,\alpha_l) \geqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}).$$

这就完成了情形 1 的证明.

情形 2. 一般情形. 因为 X 紧度量空间, 首先可以构造一个康托集 K 和一个连续满射 $f: K \to X$. 再令

$$Z = \{z \in K^{\mathbb{Z}_+} : f(z_{n+1}) = Tf(z_n)\text{对每个}n \in \mathbb{Z}_+\},$$

并定义 $\varphi: Z \to X$ 满足 $\pi(z) = f(z_0)$ 对 $z \in K^{\mathbb{Z}_+}$, 显然, Z 为零维紧度量空间 $K^{\mathbb{Z}_+}$(赋予乘积拓扑) 的闭子集且在 $K^{\mathbb{Z}_+}$ 上的左转移映射 R 下不变. 因此 (Z,R) 为一个动力系统, 进而知 $\varphi: (Z,R) \to (X,T)$ 为因子映射.

由情形 1, 存在 $\nu \in \mathcal{M}(Z,R)$, 使得 $h_\nu^+(R,\varphi^{-1}(\mathcal{U})) \geqslant h_{\text{top}}(R,\varphi^{-1}(\mathcal{U})) = h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})$. 即对 Z 的每个比 $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ 细的 Borel 剖分 β, 有 $h_\nu(R,\beta) \geqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})$ 成立. 设 $\mu = \varphi\nu$. 则对 X 的每个比 $\mathcal{U}$ 细的 Borel 剖分 α, $\varphi^{-1}(\alpha)$ 为比 $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ 细的 Borel 剖分, 并且

$$h_\mu(T,\alpha) = h_\nu(R,\varphi^{-1}(\alpha)) \geqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}).$$

因此 $h_\mu^+(T,\mathcal{U}) \geqslant h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})$, 定理得证. □

注记 6.5.6　Glasner 和 Weiss (1995) 证明了对每个动力系统 (X,T), 存在零维系统 (Z,R) 为其扩充且 $h_{\text{top}}(T) = h_{\text{top}}(R)$. 20 世纪 80 年代, Auslander 提出一个问题:“什么样的动力系统有等熵的符号扩充”. 这个问题在 Boyle 和 Downarowicz (2004) 最近的工作中得到了圆满解决.

定理 6.5.7　设 (X,T) 为可逆的动力系统和 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o$. 则存在 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, 使得

$$h_\mu(T,\mathcal{U}) = h_{\text{top}}(T,\mathcal{U}).$$

证明　设 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_M\} \in \mathcal{C}_X^o$.

情形 1. 首先假设 X 为零维空间. 由于 X 的既开又闭的子集全体为可数集且它们构成了 X 的一组可数基, 因此, $\mathcal{U}(P)$(见 (6.5.1)) 中全由既开又闭的子集构成的剖分的全体是一个可数集, 设 $\{\alpha_l : l \geqslant 1\}$ 是这个可数集的一个枚举.

清楚地, 对任意 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$,

$$h_{\mu}^{+}\Big(T^k,\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\mathcal{U}\Big)=\inf_{s_k\in\mathbb{N}^k}h_{\mu}\Big(T^k,\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}\Big).\tag{6.5.4}$$

现在, 对每个 $k\in\mathbb{N}$ 和 $s_k\in\mathbb{N}^k$, 定义

$$\begin{aligned}M(k,s_k)=\Big\{\mu\in\mathcal{M}(X,T):\frac{1}{k}h_{\mu}\Big(T^k,\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}\Big)\\ \geqslant\frac{1}{k}h_{\text{top}}(T^k,\mathcal{U}_0^{k-1})=h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})\Big\},\end{aligned}$$

这里使用了 $\frac{1}{k}h_{\text{top}}(T^k,\mathcal{U}_0^{k-1})=h_{\text{top}}(T,\mathcal{U})$ 这一事实.

从定理 6.5.5 知, 存在 $\mu_k\in\mathcal{M}(X,T^k)$, 使得

$$h_{\mu_k}^{+}(T^k,\mathcal{U}_0^{k-1})\geqslant h_{\text{top}}(T^k,\mathcal{U}_0^{k-1}).$$

因对每个 $s_k\in\mathbb{N}^k$, $\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}$ 是 $\mathcal{U}_0^{k-1}$ 的加细, 有

$$h_{\mu_k}\Big(T^k,\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}\Big)\geqslant h_{\text{top}}(T^k,\mathcal{U}_0^{k-1}).\tag{6.5.5}$$

设 $\nu_k=\dfrac{\mu_k+T\mu_k+\cdots+T^{k-1}\mu_k}{k}$. 注意到 $T^i\mu_k\in\mathcal{M}(X,T^k)$ 对每个 $i\in\{0,1,\cdots,k-1\}$ 成立, 知 $\nu_k\in\mathcal{M}(X,T)$. 对 $s_k\in\mathbb{N}^k$ 和 $j\in\{1,2,\cdots,k-1\}$, 定义

$$P^js_k=\underbrace{s_k(k-j)s_k(k-j+1)\cdots s_k(k-1)}_{j}\underbrace{s_k(0)s_k(1)\cdots s_k(k-1-j)}_{k-j}\in\mathbb{N}^k.$$

设 $P^0s_k=s_k$. 易见当 $j\in\{0,1,2,\cdots,k-1\}$ 时, 有

$$\begin{aligned}h_{T^j\mu_k}\Big(T^k,\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}\Big)&=h_{\mu_k}\Big(T^k,\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{P^js_k(i)}\Big)\\&\geqslant h_{\text{top}}(T^k,\mathcal{U}_0^{k-1})\ \ (\text{由 (6.5.5)}).\end{aligned}$$

进而, 对每个 $s_k\in\mathbb{N}^k$,

$$\begin{aligned}h_{\nu_k}\Big(T^k,\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}\Big)&=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\Big(h_{T^i\mu_k}\Big(T^k,\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}\Big)\Big)\\&\geqslant h_{\text{top}}(T^k,\mathcal{U}_0^{k-1}).\end{aligned}$$

因此, 得到 $\nu_k \in \bigcap_{s_k\in\mathbb{N}^k} M(k,s_k)$. 令 $M(k)=\bigcap_{s_k\in\mathbb{N}^k} M(k,s_k)\neq\varnothing$.

因对每个 $s_k\in\mathbb{N}^k$, $\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}$ 为既开又闭的覆盖, $\mu\mapsto h_\mu(\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}, T^k)$ 是从 $\mathcal{M}(X,T)$ 到 $\mathbb{R}$ 的上半连续的映射. 这样对 $s_k\in\mathbb{N}^k$ 而言, $M(k,s_k)$ 为 $\mathcal{M}(X,T)$ 的非空闭子集, 这说明 $M(k)$ 为 $\mathcal{M}(X,T)$ 的非空闭子集.

现在我们说明, 如果 $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ 满足 $k_1|k_2$, 则 $M(k_2)\subseteq M(k_1)$. 事实上, 设 $\mu\in M(k_2)$, 然后令 $k=\dfrac{k_2}{k_1}$. 对 $s_{k_1}\in\mathbb{N}^{k_1}$, 取 $s_{k_2}=s_{k_1}\cdots s_{k_1}(k次)\in\mathbb{N}^{k_2}$. 因

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_1}h_\mu\left(T^{k_1},\bigvee_{i=0}^{k_1-1}T^{-i}\alpha_{s_{k_1}(i)}\right)&=\frac{1}{k_1}\frac{1}{k}h_\mu\left(T^{kk_1},\bigvee_{j=0}^{k-1}T^{-jk_1}\bigvee_{i=0}^{k_1-1}T^{-i}\alpha_{s_{k_1}(i)}\right)\\&=\frac{1}{k_2}h_\mu\left(T^{k_2},\bigvee_{i=0}^{k_2-1}T^{-i}\alpha_{s_{k_2}(i)}\right)\geqslant h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U}).\end{aligned}$$

所以 $\mu\in M(k_1,s_{k_1})$, 进而 $\mu\in M(k_1)$. 这说明 $M(k_2)\subseteq M(k_1)$. 因对任意 $k_1,k_2\in\mathbb{N}$, $\varnothing\neq M(k_1k_2)\subseteq M(k_1)\cap M(k_2)$, 有 $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}M(k)\neq\varnothing$. 取 $\nu\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}M(k)$. 对每个 $k\in\mathbb{N}$, 从式 (6.5.4) 知

$$\frac{1}{k}h_\nu^+(T^k,\mathcal{U}_0^{k-1})=\inf_{s_k\in\mathbb{N}^k}\frac{1}{k}h_\nu\left(T^k,\bigvee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\alpha_{s_k(i)}\right)\geqslant h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U}).$$

进而从引理 6.3.2(3) 知

$$h_\nu(T,\mathcal{U})=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}h_\nu^+(T^k,\mathcal{U}_0^{k-1})\geqslant h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U}).$$

结合这一事实和引理 6.3.2(7), 得到 $h_\nu(T,\mathcal{U})=h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})$.

情形 2. 一般情形. 此证明完全类似于定理 6.5.5 情形 2 的证明. □

定理 6.5.1 的证明 由引理 6.3.2(7), 我们仅需证明存在 $\theta\in\mathcal{M}^e(X,T)$, 使得 $h_\theta(T,\mathcal{U})\geqslant h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})$.

仅考虑 T 为满射的情形 (对 T 非满射情形, 留作习题), 设 $\pi_1:(\widetilde{X},\widetilde{T})\to(X,T)$ 为 (X,T) 的自然扩充. 则 $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 为可逆系统. 通过定理 6.5.7, 存在 $\nu\in\mathcal{M}(\widetilde{X},\widetilde{T})$, 使得

$$h_\nu(\widetilde{T},\pi_1^{-1}(\mathcal{U}))=h_{\mathrm{top}}(\widetilde{T},\pi_1^{-1}\mathcal{U}).$$

设 $\mu=\pi_1\nu$, 则 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 容易看出 $h_\mu(T,\mathcal{U})\geqslant h_\nu(\widetilde{T},\pi_1^{-1}(\mathcal{U}))$ (参见引理 6.3.1(4)). 因此 $h_\mu(T,\mathcal{U})\geqslant h_\nu(\widetilde{T},\pi_1^{-1}(\mathcal{U})=h_{\mathrm{top}}(\widetilde{T},\pi_1^{-1}\mathcal{U}))=h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})$.

设 $\mu=\displaystyle\int_{\mathcal{M}^e(X,T)}\theta\mathrm{d}m(\theta)$ 为 μ 的遍历分解, 则由定理 6.3.4 和 $h_\mu(T,\mathcal{U})\geqslant h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})$ 知, 存在 $\theta\in\mathcal{M}^e(X,T)$, 使得 $h_\theta(T,\mathcal{U})\geqslant h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})$. 最后, 利用引理 6.3.2(7) 即得 $h_\theta(T,\mathcal{U})=h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})$. 这就完成了定理 6.5.1 的证明. □

习 题 6.5

1. 完成定理 6.5.2 的证明.

2. 完成定理 6.5.7 情形 2 的证明.

3. 设 (X,T) 为动力系统和 $\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^o$. 令 $M=\{\mu\in\mathcal{M}(X,T):h_\mu(T,\mathcal{U})=h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})\}$, 证明:

(1) M 为 $M(X,T)$ 的非空紧的凸子集;

(2) M 的每个端点为遍历测度;

(3) 如果 $\mu\in M$ 和 $\mu=\int_{\mathcal{M}^e(X,T)}\theta \mathrm{d}m(\theta)$ 是 μ 的遍历分解, 则对 m-a.e. $\theta\in\mathcal{M}^e(X,T)$, 有 $\theta\in M$.

4. 举例说明存在动力系统 (X,T) 满足 $h_{\mathrm{top}}(T)<\infty$ 和 $h_\mu(T)<h_{\mathrm{top}}(T)$ 对 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$.

5. 完成定理 6.5.1 的证明中对 T 非满射情形的证明.

§6.6 熵串的变分关系

本节将证明, 如果 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 则 $E_n(X,T)\supseteq E_n^\mu(X,T)$ 对每个 $n\geqslant 2$ 成立, 且存在 $\theta\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得 $E_n(X,T)=E_n^\theta(X,T)$ 对每个 $n\geqslant 2$ 成立. 进一步地, 我们将举例说明不一定存在 $\mu\in\mathcal{M}^e(X,T)$ 满足 $E_n(X,T)=E_n^\mu(X,T)$. 首先有

定理 6.6.1 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 则对每个 $n\geqslant 2$, 有

$$E_n(X,T)\supseteq E_n^\mu(X,T)=\mathrm{supp}(\lambda_n(\mu))\setminus\Delta_n(X).$$

证明 设 $(x_i)_{i=1}^n\in E_n^\mu(X,T),\mathcal{U}$ 为相对于 $(x_i)_{i=1}^n$ 可允许的有限开覆盖. 易见, 任意比 $\mathcal{U}$ 细的可测剖分 α 为相对于 $(x_i)_{i=1}^n$ 可允许的剖分. 由于 $(x_i)_1^n\in E_n^\mu(X,T)$, 所以 $h_\mu(T,\alpha)>0$. 由定理 6.4.5 知 $h_\mu(T,\mathcal{U})>0$, 进而 $h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U})\geqslant h_\mu(T,\mathcal{U})>0$. □

设 (X,T) 为可逆的动力系统, $\mu\in\mathcal{M}^e(X,T)$, $\pi:(X,\mathcal{B}_X,T,\mu)\to(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 是 $(X,\mathcal{B}_X,T,\mu)$ 的 Pinsker 因子 (即 $\pi^{-1}\mathcal{D}=P_\mu$) 以及 $\mu=\int_Y\mu_y\mathrm{d}\nu$ 为 μ 在 ν 上的测度分解. 则对每个 $n\in\mathbb{N}$, 不难证明

$$\lambda_n(\mu)=\int_Y\underbrace{\mu_y\times\mu_y\times\cdots\times\mu_y}_{n}\mathrm{d}\nu(y),\quad 其中\ \lambda_n(\mu)\ 由\ (6.4.1)\ 定义. \tag{6.6.1}$$

引理 6.6.2 设 (X,T) 为可逆的动力系统, $\mu\in\mathcal{M}^e(X,T)$, $\pi:(X,\mathcal{B}_X,T,\mu)\to(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 是 $(X,\mathcal{B}_X,T,\mu)$ 的 Pinsker 因子 (即 $\pi^{-1}\mathcal{D}=P_\mu$) 以及 $\mu=\int_Y\mu_y\mathrm{d}\nu$ 为 μ 在 ν 上的测度分解. 如果 $h_\mu(T)>0$, 则有

(1) 对 ν-a.e. $y\in Y$, μ_y 为非原子的;

(2) $\pi:(X,\mathcal{B}_X,T,\mu)\to(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 为弱混合扩充, 进而对每个 $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_n(\mu)$ 是遍历测度.

证明　(1) 由于 μ 是遍历的, Rohlin 的一个经典结果 (参见定理 2.7.10) 告诉我们: 要么存在某个 $k\in\mathbb{N}$, 使得对 ν-a.e. $y\in Y$ 而言, μ_y 是等分布在 k 个点上的测度; 要么 μ_y 为非原子对 ν-a.e. $y\in Y$. 因此, 如果 (1) 不成立, 则存在某个 $k\in\mathbb{N}$, 使得对 ν-a.e. $y\in Y$ 而言, μ_y 是等分布在 k 个点上的测度. 现在, 我们说明 $h_\mu(T)=0$. 对 $\alpha\in\mathcal{P}_X$,

$$\begin{aligned}h_\mu(T,\alpha)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H_\mu(\alpha_0^{n-1}|P_\mu)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_Y H_{\mu_y}(\alpha_0^{n-1})\mathrm{d}\nu(y)\\&\leqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_Y\log k\mathrm{d}\nu(y)\\&=0.\end{aligned}$$

因此 $h_\mu(T)=0$, 矛盾.

(2) 如果 $\pi:(X,\mathcal{B}_X,T,\mu)\to(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 不为弱混合扩充, 则由 Furstenberg-Zimmer 定理 (参见定理 2.7.15) 知, 存在保测系统 $(Z,\mathcal{Z},\eta,R)$ 和同态 $\pi_1:(X,\mathcal{B}_X,T,\mu)\to(Z,\mathcal{Z},\eta,R)$, $\pi_2:(Z,\mathcal{Z},\eta,R)\to(Y,\mathcal{D},\nu,S)$, 使得 $\pi=\pi_1\pi_2$ 且 π_2 为非平凡的紧扩充. 可以证明 $h_\eta(R)=h_\mu(S)=0$ (留作习题), 从而 $\pi_1^{-1}\mathcal{Z}\subseteq P_\mu=\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}\mathcal{D}$, 这说明 $\mathcal{Z}=\pi_2^{-1}\mathcal{D}$, 即 π_2 是平凡扩充, 矛盾. 这就说明了 π 是弱混合扩充, 进而由 Fusterberg 的一个经典结果 (参见引理 2.7.13) 知 $\lambda_n(\mu)$ 为遍历测度. □

引理 6.6.3　*设 (X,T) 为动力系统. 如果 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 为遍历测度, 则对每个 $n\geqslant 2$, 有*

$$\overline{E_n^e(X,T)}\setminus\Delta_n(X)\supseteq\operatorname{supp}(\lambda_n(\mu))\setminus\Delta_n(X)=E_n^\mu(X,T).$$

证明　只证明 T 为同胚时的情形, 一般情形留作习题. 如果 $h_\mu(T)=0$, 则有 $\operatorname{supp}(\lambda_n(\mu))\setminus\Delta_n(X)=E_n^\mu(X,T)=\varnothing$.

以下假设 $h_\mu(T)>0$. 设 P_μ 为 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的 Pinsker σ 代数. 设 $\pi:(X,\mathcal{B},\mu,T)\to(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 为 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的 Pinsker 因子, 以及 $\mu=\int_Y\mu_y\mathrm{d}\nu$ 为 μ 相对于 (Y,ν) 的测度分解. 由引理 6.6.2(1) 知, 对 ν-a.e. $y\in Y$, μ_y 为非原子的, 因此

$$\lambda_n(\mu)(\Delta_n)=\int_Y\mu_y\times\mu_y\times\cdots\times\mu_y(\Delta_n)\mathrm{d}\nu(y)=0.$$

这样, $\operatorname{supp}(\lambda_n(\mu))\setminus\Delta_n\neq\varnothing$. 由于 $\lambda_n(\mu)$ 为遍历测度 (见引理 6.6.2(2)). 这样可知, $(\operatorname{supp}(\lambda_n(\mu)),T^{(n)})$ 为拓扑传递的. 因 $\operatorname{supp}(\lambda_n(\mu))$ 在 X^n 的坐标置换下保持不变, 所以对 $(\operatorname{supp}(\lambda_n(\mu)),T^{(n)})$ 的每个传递点 $(x_i)_1^n$, 有 $x_i\neq x_j$, 如果 $i\neq j$.

从定理 6.6.1 知 $(x_i)_1^n \in E_n^e(X,T)$. 因为 $\overline{E_n^e(X,T)}$ 为 X^n 的闭的 $T^{(n)}$ 不变的子集 (参见注记 6.2.6), 有 $\overline{E_n^e(X,T)} \setminus \Delta_n(X) \supset \mathrm{supp}(\lambda_n(\mu)) \setminus \Delta_n(X) (= E_n^\mu(X,T))$. □

有了以上准备, 现在便可证明

定理 6.6.4 *设 (X,T) 为动力系统. 则存在 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, 使得对每个 $n \geqslant 2$,*

$$E_n(X,T) = E_n^\mu(X,T)(= \mathrm{supp}(\lambda_n(\mu)) \setminus \Delta_n(X)).$$

证明 设 $n \geqslant 2$. 首先有

断言 对任意 $(x_i)_1^n \in E_n(X,T)$ 和 x_i 的邻域 U_i, 存在 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ 满足 $E_n^\mu(X,T) \cap (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \neq \varnothing$.

断言的证明 不失一般性, 假设 U_i 为 x_i 的闭邻域且满足：当 $x_i \neq x_j$ 时, $U_i \cap U_j = \varnothing$; 而当 $x_i = x_j$ 时, $U_i = U_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. 设 $\mathcal{U} = \{U_1^c, U_2^c, \cdots, U_n^c\}$. 明显地, 有 $h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U}) > 0$. 由定理 6.5.1 知, 存在 $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, 使得 $h_\mu(T,\mathcal{U}) = h_{\mathrm{top}}(T,\mathcal{U}) > 0$. 进而由推论 6.4.6 知 $\lambda_n(\mu)(\prod_{i=1}^n U_i) > 0$, 即 $\mathrm{supp}(\lambda_n(\mu)) \cap \Pi_{i=1}^n U_i \neq \varnothing$. 因 $\prod_{i=1}^n U_i \cap \Delta_n(X) = \varnothing$, 从定理 6.4.3 知 $E_n^\mu(X,T) \cap (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \neq \varnothing$. 这就完成了断言的证明.

根据以上断言, 可选择 $E_n(X,T)$ 的稠密可数点列 $\{(x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m) : m \geqslant 1\}$, 使得对某一 $\mu_n^m \in \mathcal{M}(X,T)$, 有 $(x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m) \in E_n^{\mu_n^m}(X,T)$. 设 $\mu = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m}\mu_n^m\Big)$. 因为对 X 的任意有限可测剖分 α, $n \geqslant 2$ 以及 $m \in \mathbb{N}$, 有 $h_\mu(T,\alpha) \geqslant \frac{1}{2^{m+n-1}} h_{\mu_n^m}(T,\alpha)$, 所以 $E_n^{\mu_n^m}(X,T) \subset E_n^\mu(X,T)$. 特别地, $(x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m) \in E_n^\mu(X,T)$. 进而,

$$E_n^\mu(X,T) \supset \overline{\{(x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m); m \geqslant 1\}} \setminus \Delta_n(X) = E_n(X,T),$$

这也就是说, $E_n^\mu(X,T) = E_n(X,T)$. □

推论 6.6.5 *设 (X,T) 为动力系统. 如果它为一致正熵系统, 则存在具有全支撑的 T 不变测度 μ, 使得 $E_2^\mu(X,T) = E_2(X,T)$.*

在此我们要强调的是推论 6.6.5 不能加强为存在具有全支撑的遍历测度 μ, 使得 $E_2^\mu(X,T) = E_2(X,T)$. 以下例子说明了这一点.

例 6.6.6 *存在一致正熵系统, 它不具有全支撑的遍历测度.*

证明 我们将用以下 B_{k+1} 代替定理 6.1.11 中的 A_{k+1}. 首先令 $B_1 = (1020)$, 再归纳地定义

$$B_{k+1} = B_k 0^{m_1^k} D_1^k \cdots D_{n_k}^k D_{n_k+1}^k \cdots D_{2n_k}^k \cdots D_{(2^{n_k}-1)n_k+1}^k \cdots D_{2^{n_k}n_k}^k 0^{m_2^k},$$
$$n_{k+1} = |B_{k+1}| \text{和} \mathcal{U}_{k+1} = \{B_{k+1}, \sigma^{\phi(k+1)}(B_{k+1})0^{\phi(k+1)}\},$$

其中 $m_1^k \geqslant n_k(n_k^2 2^{n_k+1} + n_k)$, $m_2^k \geqslant n_k m_1^k$.

接着取 $y=\lim B_k$, $Y=\omega(y,\sigma)$. 则不难说明 (Y,σ) 具有属性 P_2, 所以由引理 6.1.3 知 (Y,σ) 为一致正熵系统. 以下说明在 Y 上不具有全支撑的遍历测度.

采用反证法. 假设为 (Y,σ) 具有全支撑的遍历测度 μ. 则 μ 的 generic 点显然为传递点. 任取 μ 的 generic 点 z. 因 $1_{[B_1]}$ 为 Y 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, 所以

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}1_{[B_1]}\sigma^i(z)\to\int 1_{[B_1]}\mathrm{d}\mu=\mu[B_1]>0.$$

设 $N(B_1,C)$ 为 B_1 出现在 C 中的次数. 则存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得当 $k>k_0$ 时, 有

$$\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n-1}1_{[B_1]}\sigma^i(z)\geqslant\frac{2}{n_{k_0}}\ \text{和}\ \frac{N(B_1,B_k)}{n_k}\leqslant\frac{n_k-m_2^{k-1}}{n_k}<\frac{1}{n_{k_0}}.$$

归纳地, 可以说明, 对 $k>k_0$, 如果 $z=(z_1,z_2,\cdots)$ 和 $C_k=(z_1,\cdots,z_{n_k})$, 则 C_k 仅出现在

$$0^{m_1^i}D_1^i\cdots D_{n_i}^iD_{n_i+1}^i\cdots D_{2n_i}^i\cdots D_{(2^{n_i}-1)n_i+1}^i\cdots D_{2^{n_i}n_i}^i0^{m_2^i},$$

这里 $i\in\mathbb{N}$ 满足 $\phi(i)\leqslant k_0$. 这说明 z 不为传递点, 矛盾. □

注记 6.6.7 我们还不知道是否存在这样的一致正熵系统, 它具有全支撑的、弱混合或强混合的不变测度, 但它不为完全一致正熵系统.

定理 6.6.8 设 (X,T) 为动力系统. 则对每个 $n\geqslant 2$, 有 $E_n(X,T)=\overline{E_n^e(X,T)}\setminus\Delta_n(X)$.

证明 由定理 6.6.4, 存在 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得 $E_n(X,T)=E_n^\mu(X,T)$ 对每个 $n\geqslant 2$ 成立. 设 $\mu=\int_{\mathcal{M}^e(X,T)}\theta\mathrm{d}m(\theta)$ 为 μ 的遍历分解, 则从定理 6.4.7 知, 适当选取 $\Omega\subseteq\mathcal{M}^e(X,T)$, 有

$$\overline{\bigcup\{E_n^\theta(X,T):\theta\in\Omega\}}\setminus\Delta_n=E_n^\mu(X,T).$$

现在对每个 $\theta\in\Omega$, 由引理 6.6.3 知 $E_n^\theta(X,T)\subset\overline{E_n^e(X,T)}$. 从而 $E_n(X,T)\subset\overline{E_n^e(X,T)}$. 因 $\overline{E_n^e(X,T)}\subset E_n'(X,T)\subset E_n(X,T)\cup\Delta_n(X)$, 有 $E_n(X,T)=\overline{E_n^e(X,T)}\setminus\Delta_n(X)$. □

作为本节的结束, 我们给出 n 一致正熵系统和完全一致正熵系统的一个刻画. 我们说动力系统 (X,T) 的可测剖分 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为**拓扑非平凡的**, 如果 $\overline{A_i}\neq X$ 对每个 $1\leqslant i\leqslant n$ 成立.

引理 6.6.9 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 则 $E_n^\mu(X,T)=X^n\setminus\Delta_n(X)$ 当且仅当对 X 任意由 n 个元素构成的拓扑非平凡可测剖分 α, 有 $h_\mu(T,\alpha)>0$, 其中 $n\geqslant 2$.

证明 设 $E_n^\mu(X,T)=X^n\setminus\Delta_n(X)$. 对 X 的任意拓扑非平凡的可测剖分 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$, 选取 $x_i\in X\setminus\overline{A_i}, i=1,2,\cdots,n$. 清楚地, $(x_i)_1^n\in X^n\setminus\Delta_n(X)$, 并且 α 为相对于 $(x_i)_1^n$ 可允许的剖分. 从而 $h_\mu(T,\alpha)>0$.

反之, 假设对 X 的任意由 n 个元素构成的拓扑非平凡可测剖分 α, 有 $h_\mu(T,\alpha)>0$. 设 $(x_i)_1^n\in X^n\setminus\Delta_n(X)$. 对任意相对于 $(x_i)_1^n$ 可允许的可测剖分 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$, α为拓扑非平凡的. 从而 $h_\mu(T,\alpha)>0$. 这就说明 $(x_i)_1^n\in E_n^\mu(X,T)$. □

定理 6.6.10 设 (X,T) 为动力系统, $n\geqslant 2$. 则

(1) (X,T) 为 n 一致正熵当且仅当存在 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得对 X 的任意由 n 个元素构成的拓扑非平凡可测剖分 α, 有 $h_\mu(T,\alpha)>0$;

(2) (X,T) 为完全一致正熵系统当且仅当存在 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得对 X 的任意由有限个元素构成的拓扑非平凡可测剖分 α, 有 $h_\mu(T,\alpha)>0$.

这是定理 6.6.4 和引理 6.6.9 的直接推论.

最后, 我们不加证明地给出下面一个十分有用的定理 (Huang-Ye, 2006). 此定理的纯组合证明见文献 (Kerr-Li, 2007).

定理 6.6.11 设 (X,T) 为动力系统, 那么 $(x_1,\cdots,x_n)\in E_n(X,T)$ 充分必要对于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的任意邻域 $U_1\times\cdots\times U_n$, 存在 $\mathbb{Z}_+$ 的正密度集合 $D=\{d_1,d_2,\cdots\}$, 使得

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}T^{-d_i}U_{s(i)}\neq\varnothing$$

对于任意 $s\in\{1,2,\cdots,n\}^D$ 成立.

习 题 6.6

1. 证明公式 (6.6.1).
2. 设 (X,T) 为动力系统. 证明:
(1) 对 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 有 $E_s^\mu(X,T)\subseteq E_s(X,T)$;
(2) 存在 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得 $E_s^\mu(X,T)=E_s(X,T)$.
3. 设 $\pi:(X,\mathcal{B},\mu,T)\to(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 为可逆保测系统间的扩充, 则

$$h_\mu(T)=h_\nu(S)+\sup_{\alpha\in\mathcal{P}_X}H_\mu(\alpha|\alpha^-\vee\pi^{-1}(\mathcal{D})).$$

进而, 如果 π 为紧扩充, 则 $h_\eta(R)=h_\nu(S)$.

4. 对一般的动力系统证明引理 6.6.3.
5. 设 (X,T) 为具有正熵的动力系统. 证明: 对每个 $n\geqslant 2$, $\overline{E_n(X,T)}$ 为没有孤立点的闭集.

§6.7 注　记

在本章中, §6.1 和 §6.2 的内容主要取材于文献 (Blanchard, 1992; Blanchard, 1993; Blanchard-Lacroix, 1993; Huang-Ye, 2006). §6.3 主要取材于文献 (Glasner-Weiss, 2004; Huang etc., 2004b; Huang etc., 2006; Romagnoli, 2003). §6.4 的素材主要来源于文献 (Blanchard etc., 1995; Glasner, 1997; Glasner-Weiss, 1994; Glasner-Weiss, 1995b; Huang-Ye, 2006). §6.5 主要取材于文献 (Blanchard etc., 1997; Huang etc., 2004b; Huang etc., 2006). §6.6 的素材来源于文献 (Huang-Ye, 2006), 定理 6.6.11 的组合方法证明参见文献 (Kerr-Li, 2007). 另外, 本章的大部分内容都可以推广到相对化的情况, 见文献 (Huang etc., 2006; Huang etc., 2007a).

第 7 章　序列熵与局部化

1967 年, Kushnirenko (1967) 给出了一个新的测度同构不变量：测度序列熵. 它是保测系统测度熵的推广, 同时也是区分具有相同测度熵和谱属性系统 (特别是零熵系统) 的重要不变量. 与之对应的是, 1974 年, Goodman (1974) 对拓扑动力系统引入了拓扑序列熵. 本章将首先介绍测度序列熵, 并且给出测度离散谱系统的序列熵刻画; §7.2 将给出几类测度混合系统的序列熵刻画; §7.3 引入拓扑序列熵, 并给出几类拓扑混合系统的序列熵刻画; §7.4 将引入拓扑序列熵对和测度序列熵对, 并讨论两者的相互关系; §7.5 主要研究相对于任意自然数序列其序列熵为零的动力系统 (称为 null 系统) 的结构.

§7.1　测度序列熵与 Kushnirenko 定理

本节首先引入测度序列熵的概念, 然后介绍 Kushnirenko 对可逆的测度离散谱系统的序列熵刻画 (Kushnirenko, 1967). 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $S=\{t_1<t_2<\cdots\}$ 为非负整数序列. 对 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的有限可测剖分 α, 将 α **沿着** S **的序列熵**定义为

$$h_\mu^S(T,\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\alpha\right)=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\sum_{A\in\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\alpha}-\mu(A)\log\mu(A).$$

不难获得如下常用的公式：

$$h_\mu^S(T,\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}H_\mu\left(T^{-t_j}\alpha\middle|\bigvee_{i=1}^{j-1}T^{-t_i}\alpha\right).$$

将$(X,\mathcal{B},\mu,T)$ **沿着** S **的序列熵**定义为

$$h_\mu^S(T)=\sup_\alpha h_\mu^S(T,\alpha),$$

其中上确界取遍 X 的所有有限可测剖分. 当 $S=\mathbb{Z}_+$ 时, $h_\mu^S(T)$ 即为通常的测度熵, 此时一般省略其上标 $\mathbb{Z}_+$.

命题 7.1.1　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, α_n 为 X 满足 $\alpha_n\nearrow\mathcal{B}$ 的有限可测剖分序列. 则对任意非负整数序列 $S=\{t_1<t_2<\cdots\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}h_\mu^S(T,\alpha_n)=h_\mu^S(T)$.

证明　对任意 X 的有限可测剖分 β 及给定 $k,n\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} H_\mu\Big(\bigvee_{i=1}^k T^{-t_i}\beta\Big) &\leqslant H_\mu\Big(\bigvee_{i=1}^k T^{-t_i}(\beta\vee\alpha_n)\Big) \\ &\leqslant H_\mu\Big(\bigvee_{i=1}^k T^{-t_i}\alpha_n\Big)+H_\mu\Big(\bigvee_{i=1}^k T^{-t_i}\beta|\bigvee_{i=1}^k T^{-t_i}\alpha_n\Big) \\ &\leqslant H_\mu\Big(\bigvee_{i=1}^k T^{-t_i}\alpha_n\Big)+\sum_{i=1}^k H_\mu\Big(T^{-t_i}\beta|\bigvee_{i=1}^k T^{-t_i}\alpha_n\Big) \\ &\leqslant H_\mu\Big(\bigvee_{i=1}^k T^{-t_i}\alpha_n\Big)+kH_\mu(\beta|\alpha_n). \end{aligned}$$

在上述不等式两边同时除以 k, 再对 k 取上极限即得 $h_\mu^S(T,\beta)\leqslant h_\mu^S(T,\alpha_n)+H_\mu(\beta|\alpha_n)$. 由于 $H_\mu(\beta|\alpha_n)\to H_\mu(\beta|\mathcal{B})=0$(利用 Martingale 定理), 有 $h_\mu^S(T,\beta)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}h_\mu^S(T,\alpha_n)$. 因此 $h_\mu^S(T)=\sup\limits_\beta h_\mu^S(T,\beta)=\lim\limits_{n\to\infty}h_\mu^S(T,\alpha_n)$. □

本小节余下部分的主要目的是给出 Kushnirenko 对可逆测度离散谱系统的序列熵刻画. 为此需要介绍一些概念和引理. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 在可分的复 Hilbert 空间 $\mathcal{H}=L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 上, 定义酉算子 $U_T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, 使得对每个 $f\in\mathcal{H}$, 有 $U_T(f)=f\circ T$. 非零函数 $f\in\mathcal{H}$ 称为 T **的特征函数**, 如果存在复常数 $\lambda\in\mathbb{C}$, 使得 $U_T(f)=\lambda f$. 此时 λ 也称为**相对于 f 的特征值**. 易见, 非零常值函数一定为 T 的特征函数, 并且 T 的每个特征值 λ 的模为 1, 即 $|\lambda|=1$. 注意到, 如果 $f\in\mathcal{H}$ 为系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的特征函数, 则 $\overline{\{U_T^nf:n\in\mathbb{Z}\}}$ 为 $\mathcal{H}$ 的紧子集. 一般地, 称使得 $\overline{\{U_T^nf:n\in\mathbb{Z}\}}$ 为 $\mathcal{H}$ 的紧子集的函数 f 为**几乎周期函数**.

我们说 $\mathcal{H}$ 的子集 $\mathcal{H}_1$ 为**代数**, 如果 $\mathcal{H}_1$ 为 $L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$ 的线性子空间, 且对任意 $f,g\in\mathcal{H}_1$, 有 $fg\in\mathcal{H}_1$, 这里, $L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$ 为全体有界 $\mathcal{B}$ 可测函数构成的线性子空间. 显然, 系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 所有有界的几乎周期函数全体 (定义为 $\mathcal{A}_c$) 形成了 $\mathcal{H}$ 的一个 U_T 不变和复共轭不变的代数, 即 $\mathcal{A}_c$ 为 $\mathcal{H}$ 的线性子空间且对任意 $f,g\in\mathcal{A}_c$, 有 $U_T(f)$, fg 和 $\overline{f}$ 均属于 $\mathcal{A}_c$. 对实的几乎周期函数 f 和 $M>0$, f 的截断函数

$$f_M(x)=\begin{cases} f(x), & 如果|f(x)|<M, \\ \mathrm{sign}(f(x))\cdot M, & 如果|f(x)|\geqslant M \end{cases}$$

为有界的几乎周期函数. 这说明 $\mathcal{A}_c$ 在 $\mathcal{H}$ 中的闭包包含了全体实的几乎周期函数. 进而由于几乎周期函数的实部和虚部仍为几乎周期函数, $\mathcal{A}_c$ 在 $\mathcal{H}$ 中的闭包 (定义为 $\mathcal{H}_c$) 恰为几乎周期函数全体.

显然, $\mathcal{H}$ 中特征函数的线性组合全体的闭包包含于 $\mathcal{H}_c$, 事实上, $\mathcal{H}_c$ 恰为特征函数的线性组合全体的闭包, 且可以将 $\mathcal{H}_c^\perp$ 的元素刻画出来. 这就是著名的 Koopman-

von Neumann 谱混合定理 ((Koopman-Neumann, 1932; Bergelson, 1996), 在本章最后的附录中将给出它的证明).

定理 7.1.2 (Koopman-von Neumann 谱混合定理)

$$\mathcal{H}_c = \overline{\mathrm{span}\{f \in \mathcal{H} : \exists \lambda \in \mathbb{C}, \text{使得 } U_T(f) = \lambda f\}},$$

并且

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c{}^{\perp} = \{f \in \mathcal{H} : &\text{存在} S \subset \mathbb{N}, d(S) = 1, \text{使得} \forall g \in \mathcal{H},\\ &\lim_{n \to +\infty, n \in S} \langle U_T^n f, g\rangle = 0\},\end{aligned} \tag{7.1.1}$$

这里 $d(S)$ 为 S 的密度以及 $< \cdot, \cdot >$ 为 $\mathcal{H}$ 的内积.

在 Koopman-von Neumann 谱混合定理中, 如果 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$, 则称系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 或 T 为**离散谱的**, 此时系统的特征函数的线性组合张成了整个 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$. 由于非零常值函数为 T 的特征函数, 所以 $\mathcal{H}_c$ 至少为 $\mathcal{H}$ 的一维线性子空间. 由 Koopman-von Neumann 谱混合定理, 不难验证, $\mathcal{H}_c$ 为 $\mathcal{H}$ 的一维线性子空间当且仅当系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为弱混合的 (作为练习).

下面进一步研究 $\mathcal{H}_c$. 首先需要一个经典结论 (Zimmer, 1976a, 定理 1.2):

引理 7.1.3 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, $\mathcal{H}_1$ 是由 $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ 中有界函数构成的复共轭不变的代数. 则存在 $\mathcal{B}$ 的子 σ 代数 $\mathcal{A}$, 使得 $\overline{\mathcal{H}_1} = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. 进而, 如果 T 可逆且 $\mathcal{H}_1$ 为 U_T 不变的, 则 $\mathcal{A}$ 为 T 不变的.

证明 设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{B}$ 中由 $\mathcal{D} = \{f^{-1}(B) | f \in \mathcal{H}_1, B\text{为 } \mathbb{R} \text{ 的 Borel 子集}\}$ 生成的最小的 σ 代数. 显然, $\mathcal{H}_1 \subseteq L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. 由于 $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为 $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的闭线性子空间, $\mathrm{cl}(\mathcal{H}_1) \subseteq L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

对于反向的包含关系 $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq \overline{\mathcal{H}_1}$, 由于 $\overline{\mathcal{H}_1}$ 为 $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的闭线性子空间以及 $\mathcal{A}$ 可测的特征函数的线性组合在 $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ 中稠密, 我们只需证明: 如果 $A \in \mathcal{A}$, 则特征函数 $1_A \in \overline{\mathcal{H}_1}$. 设 $\mathcal{D}_1 = \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{D}\}$ 和 $\mathcal{D}_0$ 为 $\mathcal{D}_1$ 中有限个互不相交元素的并构成的集族. 则 $\mathcal{D}_0$ 为由 $\mathcal{D}$ 生成的代数.

因代数 $\mathcal{D}_0$ 生成了 σ 代数 $\mathcal{A}$, 我们只需证明: 如果 $A \in \mathcal{D}_0$, 则特征函数 $1_A \in \overline{\mathcal{H}_1}$ 即可. 进而, 因 $\mathcal{D}_0$ 的每个元素可以表示为 $\mathcal{D}_1$ 中有限个互不相交元素的并, 我们只需证明: 如果 $A \in \mathcal{D}_1$, 则特征函数 $1_A \in \overline{\mathcal{H}_1}$ 即可.

设 $f_i \in \mathcal{H}_1$, $R_i = ||f_i||_\infty$ 以及 $B_i \subseteq [-R_i, R_i]$ 为 $\mathbb{R}$ 的 Borel 子集, $i = 1, 2, \cdots, k$. 设 $g_i(x) = 1_{B_i}(x), i = 1, 2, \cdots, k$. 则对每个 g_i, 存在 $\mathbb{R}$ 上的多项式序列 $P_{i,n}$, 使得 $\lim\limits_{n \to +\infty} P_{i,n}(x) = 1_{B_i}(x)$ 对 $x \in [-R_i, R_i]$ 成立. 现在, 因 $\mathcal{H}_1$ 为代数, 易见 $\Pi_{i=1}^k P_{i,n} \circ f_i \in \mathcal{H}_1$. 令 $n \to +\infty$, 有 $\Pi_{i=1}^k P_{i,n} \circ f_i(x) \to \Pi_{i=1}^k g_i \circ f_i(x)$ 对 μ-a.e. $x \in X$. 当然, 上述收敛也在 $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ 意义下成立, 因此 $\Pi_{i=1}^k g_i \circ f_i \in \overline{\mathcal{H}_1}$. 即 $1_{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(B_i)} = \Pi_{i=1}^k 1_{f_i^{-1}(B_i)} = \Pi_{i=1}^k 1_{B_i} \circ f_i \in \overline{\mathcal{H}_1}$, 这就完成了证明. □

注意到, $\mathcal{H}_c$ 为 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 的 U_T 不变和共轭不变的代数 $\mathcal{A}_c$ 的闭包, 从引理 7.1.3 知道, 存在 $\mathcal{B}$ 的 T 不变的子 σ 代数 $\mathcal{K}_\mu$, 使得 $\mathcal{H}_c = L^2(X,\mathcal{K}_\mu,\mu)$. 称 $\mathcal{K}_\mu$ 为 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的 **Kronecker 代数**. 由 Koopman-von Neumann 谱混合定理知, 系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为离散谱的当且仅当 $\mathcal{K}_\mu = \mathcal{B}$; 系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为弱混合的当且仅当 $\mathcal{K}_\mu = \{X,\varnothing\}$.

定理 5.3.9 告诉我们: 如果 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统, 则对 X 的有限可测剖分 α, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} h_\mu(T^n,\alpha) = H_\mu(\alpha|P_\mu)$ 成立, 其中 P_μ 为 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的 Pinsker σ 代数. 以下的定理 7.1.6 说明对 $\mathcal{K}_\mu$ 具有类似的性质. 为此, 需要如下的两个引理.

引理 7.1.4　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 则对 X 的任意有限可测剖分 $\alpha\subset\mathcal{K}_\mu$ 以及任意非负整数序列 S, 有 $h_\mu^S(T,\alpha)=0$.

证明　设 $\alpha = \{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 满足 $A_i\in\mathcal{K}_\mu, i=1,2,\cdots,n$. 由于 $\bigvee_{i=1}\{A_i,A_i^c\}\succeq\alpha$, 因此, 为说明 $h_\mu^S(T,\alpha)=0$ 对任意非负整数序列 S 成立, 只需说明对任意 $B\in\mathcal{K}_\mu$ 以及任意非负整数序列 S, 有 $h_\mu^S(T,\{B,B^c\})=0$ 成立.

设 $B\in\mathcal{K}_\mu$, $S=\{a_1<a_2<\cdots\}\subseteq\mathbb{Z}_+$ 以及 $\beta=\{B,B^c\}$. 因 1_B 为几乎周期函数, 所以 $\overline{\{U^n1_B : n\in\mathbb{Z}\}}$ 为 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 的紧子集. 注意到 $\|U^n1_B - U^m1_B\| = \mu(T^{-n}B\Delta T^{-m}B)$, 使用引理 5.4.5 容易获得, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $n\in\mathbb{N}$, 能找到某 $i(n)\leqslant N$, 使得 $H_\mu(T^{-a_n}\beta|T^{-a_{i(n)}}\beta)+H_\mu(T^{-a_{i(n)}}\beta|T^{-a_n}\beta)<\varepsilon$.

这样对 $n>N$, 有 $H(T^{-a_n}\beta|\bigvee_{i=1}^{n-1}T^{-a_i}\beta)\leqslant H(T^{-a_n}\beta|T^{-a_{i(n)}}\beta)<\varepsilon$. 进而

$$h_\mu^S(T,\beta)=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}H_\mu\left(T^{-a_k}\beta\middle|\bigvee_{i=1}^{k-1}T^{-a_i}\beta\right)\leqslant\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, $h_\mu^S(T,\beta)=0$. □

引理 7.1.5　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 则对 X 的任意有限可测剖分 α 以及非负整数序列 S, 有 $h_\mu^S(T,\alpha)\leqslant H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)$.

证明　因 $(\mathcal{B},\mu)$ 为可分的, 所以存在可数个由 $\mathcal{K}_\mu$ 中的集构成的有限剖分 $\{\beta_k : k\in\mathbb{N}\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty}H_\mu(\alpha|\beta_k)=H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)$. 因此对固定的 $k\in\mathbb{N}$ 以及 $S=\{0\leqslant t_1<t_2<\cdots\}\subseteq\mathbb{Z}_+$, 有

$$\begin{aligned}h_\mu^S(T,\alpha)&=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\alpha\right)\\&\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}(\alpha\vee\beta_k)\right)-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\beta_k\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\left(H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}(\alpha\vee\beta_k)\right)-H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\beta_k\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty}\sup \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} T^{-t_i}\alpha | \bigvee_{i=1}^{n} T^{-t_i}\beta_k\right)\\
&\leqslant \lim_{n\to+\infty}\sup \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_\mu(T^{-t_i}\alpha|T^{-t_i}\beta_k)\\
&= H_\mu(\alpha|\beta_k).
\end{aligned}
$$

在上面的推导过程中, 第一个不等式使用了 $h_\mu^S(T,\beta_k)=0$ 对 $k\in\mathbb{N}$ 成立这个事实. 由于 k 的任意性, 有 $h_\mu^S(T,\alpha)\leqslant H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)$. □

现在证明

定理 7.1.6 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 那么对给定的 X 的有限可测剖分 α, 存在非负整数序列 S, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)=H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)$.

证明 注意到, 对 $A\in\mathcal{B}$, 有 $1_A-\mathbb{E}(1_A|\mathcal{K}_\mu)\in\mathcal{H}_c^\perp$. 因此, 由定理 7.1.2 知, 存在 $S'\subset\mathbb{Z}_+$ 满足 $d(S')=1$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty,n\in S'}\langle U_T^n(1_A-\mathbb{E}(1_A|\mathcal{K}_\mu)),1_B\rangle=0$ 对所有 $B\in\mathcal{B}$ 成立. 进一步, 有

断言 对 X 的任意有限的可测剖分 β, 能找到 $S'\subset\mathbb{Z}_+$ 满足 $d(S')=1$, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M\in\mathbb{N}$, 使得当 $m\geqslant M, m\in S'$ 时, $H_\mu(T^{-m}\alpha|\beta)\geqslant H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)-\varepsilon$.

断言的证明 设 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$, $\beta=\{B_1,B_2,\cdots,B_l\}$. 由证明开始时的讨论知, 存在 $S'\subset\mathbb{Z}_+$, $d(S')=1$, 使得对 $1\leqslant i\leqslant k$, $1\leqslant j\leqslant l$, 有

$$\lim_{n\to+\infty,n\in S'}\langle U_T^n(1_{A_i}-\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu)),1_{B_j}\rangle=0.$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to+\infty,n\in S'} H_\mu(T^{-n}\alpha|\beta)\\
&=\liminf_{n\to+\infty,n\in S'}\sum_{i,j}-\mu(T^{-n}A_i\cap B_j)\log\left(\frac{\mu(T^{-n}A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)}\right)\\
&=\liminf_{n\to+\infty,n\in S'}\sum_{i,j}-\langle U_T^n 1_{A_i},1_{B_j}\rangle\log\left(\frac{\langle U_T^n 1_{A_i},1_{B_j}\rangle}{\mu(B_j)}\right)\\
&=\liminf_{n\to+\infty,n\in S'}\sum_{i,j}-\langle U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu),1_{B_j}\rangle\log\left(\frac{\langle U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu),1_{B_j}\rangle}{\mu(B_j)}\right).
\end{aligned}
$$

设 $a_{ij}^n=-\langle U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu),1_{B_j}\rangle\log\left(\dfrac{\langle U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu),1_{B_j}\rangle}{\mu(B_j)}\right)$, $\mu_{B_j}(\cdot)=\mu(\cdot\cap B_j)/\mu(B_j)$.

由于 $-x\log x$ 为凸函数以及 $\dfrac{\langle U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu),1_{B_j}\rangle}{\mu(B_j)}=\displaystyle\int_{B_j}U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu)\mathrm{d}\mu_{B_j}$, 可以推

得

$$\begin{aligned}a_{ij}^n &= -\mu(B_j)\left(\int_{B_j} U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu)\mathrm{d}\mu_{B_j}\right)\log\left(\int_{B_j} U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu)\mathrm{d}\mu_{B_j}\right)\\ &\geqslant \mu(B_j)\int_{B_j} -U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu)\log(U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu))\mathrm{d}\mu_{B_j}\\ &\geqslant \int_{B_j} -U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu)\log(U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu))\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} a_{ij}^n &\geqslant \sum_{i,j}\int_{B_j} -U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu)\log(U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu))\mathrm{d}\mu\\ &= \sum_{i}\int_{X} -U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu)\log(U_T^n\mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu))\mathrm{d}\mu\\ &= H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu).\end{aligned}$$

这说明 $\liminf\limits_{n\to+\infty,n\in S} H_\mu(T^{-n}\alpha|\beta)\geqslant H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)$, 断言得证.

现在可以取非负整数序列 $S=\{0\leqslant t_1<t_2<\cdots\}$, 使得

$$H_\mu\left(T^{-t_n}\alpha\middle|\bigvee_{i=1}^{n-1}T^{-t_i}\alpha\right)\geqslant H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)-\frac{1}{2^n}.$$

从而

$$\begin{aligned}h_\mu^S(T,\alpha) &= \lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\alpha\right)=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}H_\mu\left(T^{-t_k}\alpha\middle|\bigvee_{i=1}^{k-1}T^{-t_i}\alpha\right)\\ &\geqslant \lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)-\frac{1}{2^k}\right)=H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu).\end{aligned}$$

□

注记 7.1.7　从定理 7.1.6 证明不难看出, 对任意 $F\in F_{\text{pud}}$, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)=H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)$ (留作练习).

由引理 7.1.4 和定理 7.1.6 可得以下推论:

推论 7.1.8　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 则 $A\in\mathcal{K}_\mu$ 当且仅当对任意非负整数序列 S, 有 $h_\mu^S(T,\{A,A^c\})=0$ 成立.

定义 7.1.9　设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 如果对每个非负整数序列 S, 均有 $h_\mu^S(T)=0$, 则称系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为**测度 null 系统**.

有了以上准备, 我们可以给出 Kushnirenko (1967) 对可逆测度离散谱系统的序列熵刻画.

定理 7.1.10 (Kushnirenko 定理) 可逆保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为离散谱系统当且仅当它为测度 null 系统.

证明 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为测度 null 系统, 则由测度 null 系统的定义以及推论 7.1.8, 可得 $\mathcal{K}_\mu=\mathcal{B}$. 因此 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为离散谱系统; 反之, 如果 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为离散谱系统, 则 $\mathcal{K}_\mu=\mathcal{B}$. 从而由推论 7.1.8 知, 对任意的 $A\in\mathcal{B}$ 和非负整数序列 S, 有 $h^S_\mu(T,\{A,A^c\})=0$ 成立, 这就说明 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为测度 null 系统. □

由定理 7.1.6, 我们也可以给出测度弱混合的序列熵刻画.

定理 7.1.11 可逆保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为测度弱混合当且仅当对 X 的每个有限可测剖分 α, 存在非负整数序列 S, 使得 $h^S_\mu(T,\alpha)=H_\mu(\alpha)$ 当且仅当对 X 的非平凡的有限可测剖分 α, 存在非负整数序列 S, 使得 $h^S_\mu(T,\alpha)>0$.

习 题 7.1

1. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统. 则对任意非负整数序列 S 和 $k\in\mathbb{N}$, 有 $h^S_{\mu^k}(T^{(k)})=kh^S_\mu(T)$, 其中 $\mu^k=\mu\times\mu\times\cdots\times\mu(k\text{次})$.

2. 举例说明存在保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$, $(Y,\mathcal{D},\nu,R)$ 以及非负整数序列 S, 使得

$$h^S_{\mu\times\nu}(T\times R)\neq h^S_\mu(T)+h^S_\nu(R).$$

3. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 证明: 所有有界的几乎周期函数全体形成了 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 的一个 U_T 不变和复共轭不变的代数.

4. 证明对实的几乎周期函数 f 和 $M>0$, f 的截断函数 f_M 为有界的几乎周期函数.

5. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 证明:

(1) U_T 的所有特征函数的线性组合全体的闭包包含于 $\mathcal{H}_c$;

(2) $\mathcal{H}_c$ 为 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 的一维线性子空间当且仅当系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为弱混合的.

6. 证明注记 7.1.7.

7. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统以及 α 为 X 的有限可测剖分. 证明: 如果 $h_\mu(T,\alpha)>0$, 则对任意非负整数序列 S, 有 $h^S_\mu(T,\alpha)>0$. 提示: 使用在定理 6.4.5 证明中出现的断言.

§7.2 测度序列熵与混合性

本节将给出测度弱混合系统的另外一些序列熵刻画, 与此同时, 我们也将讨论测度 mild 混合系统以及测度强混合系统的序列熵刻画.

设 $(X,\mathcal{B},T,\mu)$ 为保测系统. 对复 Hilbert 空间 $\mathcal{H}=L^2(X,\mathcal{B},\mu)$, 定义保距算子 $U_T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, 使得对 $f\in\mathcal{H}$, 有 $U_T(f)=f\circ T$; 当系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 可逆时, U_T 为酉算子. 设 F 为一取定的非负整数序列. 由于 $\mathcal{H}$ 为可分度量空间, 不难证明存在 $S=\{s_1<s_2<\cdots\}\subset F$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}\langle g,U^{s_i}_T f\rangle$ 对任意 $f,g\in\mathcal{H}$ 均存在. 现取定 $f\in\mathcal{H}$, 定义 $J:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 为 $J(g)=\lim\limits_{i\to\infty}\langle g,U^{s_i}f\rangle$. 显然, J 为 $\mathcal{H}$ 上连续线性泛函. 由 Riesz

表示定理, 存在 $S(f)\in\mathcal{H}$, 使得 $J(g)=\langle g,S(f)\rangle$ 对任意 $g\in\mathcal{H}$ 均成立. 不难看出, 当 $f\geqslant 0$ 时, $S(f)\geqslant 0$ 且 $\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_X S(f)(x)\mathrm{d}\mu(x)$.

引理 7.2.1 对 X 的任一取定的有限可测剖分 α, 存在递增序列 $S'\subseteq S$, 使得

$$h_\mu^{S'}(T,\alpha)\geqslant\sum_{A\in\alpha}\int_X -S(1_A)\log S(1_A)\mathrm{d}\mu.$$

该引理的证明类似于定理 7.1.6 的证明 (留作练习).

下面的引理是推论 7.1.8 的一般化.

引理 7.2.2 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $B\in\mathcal{B}$ 以及 R 为无限非负整数序列. 则 $\overline{\{U_T^n 1_B:n\in R\}}$ 为 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 紧子集当且仅当对任意无限序列 $S'\subset R$, 有 $h_\mu^{S'}(T,\{B,B^c\})=0$.

证明 充分性. 完全类似于引理 7.1.4 的证明.

必要性. 反设 $\overline{\{U_T^n 1_B:n\in R\}}$ 不为 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 的紧子集, 则存在 $\varepsilon>0$ 及无限序列 $F\subset R$, 使得对 $a,b\in F,a\neq b$, 有 $\mu(T^{-a}B\Delta T^{-b}B)=||U_T^a 1_B-U_T^b 1_B||_{L^2(\mu)}\geqslant\varepsilon$. 由本节开始的讨论, 存在 $S=\{s_1<s_2<\cdots\}\subset F$, 使得对任意 $f,g\in\mathcal{H}$, 有

$$\lim_{i\to\infty}\langle g,U_T^{s_i}f\rangle=\langle g,S(f)\rangle. \tag{7.2.1}$$

由引理 7.2.1, 我们能找到递增序列 $S'\subset S$, 使得

$$h_\mu^{S'}(T,\{B,B^c\})\geqslant\int_X\left(-S(1_B)\log S(1_B)-S(1_{B^c})\log S(1_{B^c})\right)\mathrm{d}\mu.$$

注意到 $h_\mu^{S'}(T,\{B,B^c\})=0$, 有 $-S(1_B)(x)\log S(1_B)(x)=0$ 对 $x\in X$ μ-a.e. 成立. 因此 $S(1_B)$ 为特征函数且 $\langle 1_X,S(1_B)\rangle=||S(1_B)||_{L^2(\mu)}$. 在方程 (7.2.1) 中取 $f=1_B$, $g=1_X$, 则有 $\lim_{i\to\infty}\langle 1_X,U_T^{s_i}1_B\rangle=\langle 1_X,S(1_B)\rangle$, 进而 $||S(1_B)||_{L^2(\mu)}=||1_B||_{L^2(\mu)}$. 这样就得到 $\lim_{i\to\infty}U_T^{s_i}1_B=S(1_B)$. 于是对充分大的 $i>j$, 有 $\mu(T^{-s_i}B\Delta T^{-s_j}B)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, 这与 F 的选取矛盾. □

对一般的保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$(不一定可逆), 仍然可以定义其**Kronecker 代数**

$$\mathcal{K}_\mu=\{B\in\mathcal{B}: 使得\ \overline{\{U^n 1_B:n\in\mathbb{Z}_+\}}\ 为\ L^2(X,\mathcal{B},\mu)\ 紧子集\}.$$

容易看出, 对于可逆保测系统, 该定义与在 §7.1 中定义的 Kronrcker 代数是一致的. 在引理 7.2.2 中取 $R=\mathbb{Z}_+$, 有

命题 7.2.3 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $\mathcal{K}_\mu$ 为其 Kronecker 代数. 则 $B\in\mathcal{K}_\mu$ 当且仅当对任意无限序列 $S'\subset\mathbb{Z}_+$, 有 $h_\mu^{S'}(T,\{B,B^c\})=0$.

使用引理 7.1.3 不难获得

命题 7.2.4 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $\mathcal{K}_\mu$ 为其 Kronecker 代数. 则 $f\in L^2(X,\mathcal{K}_\mu,\mu)$ 当且仅当 $\overline{\{T^nf:n\in\mathbb{Z}_+\}}$ 为 $L^2(X,\mathcal{B}(X),\mu)$ 的紧子集.

以下我们将使用测度序列熵对几类测度混合系统进行刻画. 回忆一下, $F_{\alpha_1}=\{S\subset\mathbb{Z}_+|d(S)=1\}$, $\mathcal{D}$ 为平移不变的滤子且 $F_{\text{pud}}=\{S\subset\mathbb{Z}_+|\bar{d}(S)>0\}$.

定理 7.2.5 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 则以下陈述彼此等价:

(1) $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为弱混合的;

(2) 对任意满足 $0<\mu(B)<1$ 的 $B\in\mathcal{B}$ 和任意 $F\in F_{\text{pud}}$, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_\mu^S(T,\{B,B^c\})>0$;

(3) 对 X 任意非平凡有限可测剖分 α 和 $F\in F_{\text{pud}}$, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)>0$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (3) 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为弱混合的, 则 $\mathcal{K}_\mu=\{X,\varnothing\}$. 再由注记 7.1.7, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)=H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)=H_\mu(\alpha)>0$, 这就证明了性质 (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) 是明显地; 最后 (2) $\Rightarrow$ (1) 来自于定理 7.1.11. □

设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统, 函数 $f\in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 称为**刚性函数**, 如果存在无限非负整数序列 $F=\{t_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}T^{t_n}f=f$ 在 L^2 模下成立. 对固定的无限非负整数序列 $F=\{t_n\}_{n=1}^\infty$, 易见, 全体满足 $\lim\limits_{n\to\infty}T^{t_n}f=f$ 在 L^2 模下成立的有界函数 $f\in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 形成了 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 的一个 U_T 不变和共轭不变的代数 (这个代数定义为 $\mathcal{D}_F$). $\mathcal{D}_F$ 在 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 中的闭包恰为满足满足 $\lim\limits_{n\to\infty}T^{t_n}f=f$ 在 L^2 模下成立的函数 $f\in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 全体 (该闭包定义为 $\mathcal{H}_F$). 由引理 7.1.3, 存在 $\mathcal{B}$ 的 T 不变的子 σ 代数 $\mathcal{K}_F$ 满足 $\mathcal{H}_F=L^2(X,\mathcal{K}_F,\mu)$.

测度系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 称为**mild 混合**的, 如果它没有非常值的刚性函数 (该定义等价于对每个无限非负整数序列 F 而言 $\mathcal{K}_F$ 为平凡的, 它与定义 2.3.8 给出 mild 混合定义相等价 (Furstenberg-Weiss, 1978; Furstenberg, 1982)).

定理 7.2.6 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 则以下陈述彼此等价:

(1) $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为 mild 混合的;

(2) 对任意满足 $0<\mu(B)<1$ 的 $B\in\mathcal{B}$ 及任意 IP 集 F, 存在无限序列 $A\subset F$, 使得 $h_\mu^S(T,\{B,B^c\})>0$;

(3) 对 X 任意非平凡有限剖分 α 及任意 IP 集 F, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)>0$;

(4) 对任意满足 $0<\mu(B)<1$ 的 $B\in\mathcal{B}$ 及任意无限集 F, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_\mu^S(T,\{B,B^c\})>0$;

(5) 对 X 任意非平凡有限剖分 α 及任意无限集 F, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)>0$.

证明 (2) $\Leftrightarrow$ (3),(4) $\Leftrightarrow$ (5) 以及 (4) $\Rightarrow$ (2) 是明显的.

(1) ⇒ (4) 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为 mild 混合的. 如果存在 X 的非平凡剖分 $\alpha=\{B,B^c\}$ 及无限集 F, 使得对任意无限序列 $S\subset F$, 有 $h_\mu^S(T,\alpha)=0$. 则由引理 7.2.2, $\overline{\{U^n1_B:n\in F\}}$ 为 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 的紧子集. 进而存在非负整数序列 $\{n_1<n_2<\cdots\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}T^{n_i}1_B=1_B$ 在 L^2 模下成立, 即 1_B 为非常值的刚性函数, 这与 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为 mild 混合矛盾.

(2) ⇒ (1) 假设对 X 的任意有限非平凡剖分 α 及 IP 集 F, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)>0$. 若 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 不是 mild 混合的, 则存在满足 $0<\mu(B)<1$ 的 $B\in\mathcal{B}$ 及无限自然数序列 $\{n_1<n_2<\cdots\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}T^{n_i}1_B=1_B$ 在 L^2 模下成立. 不失一般性, 设 $||T^{n_i}1_B-1_B||<\dfrac{1}{2^i}$ 对每个 $i\in\mathbb{N}$ 成立.

令 F 为由 $n_1<n_2<\cdots$ 生成的 IP 集. 则 $\overline{\{U^n1_B:n\in F\}}$ 为 $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ 紧致子集. 由引理 7.2.2, 对任意无限序列 $S\subset F$, $h_\mu^S(T,\{B,B^c\})=0$, 与假设相矛盾. □

定理 7.2.7 *$(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为可逆保测系统. 则*

(1) $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为弱混合的当且仅当对任意 $F\in k\mathcal{D}$, 存在 $S\subseteq F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)=H_\mu(\alpha)$ 对任意有限可测剖分 α 成立;

(2) $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为 mild 混合的当且仅当对任意 IP 集 F, 存在 $S\subseteq F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)=H_\mu(\alpha)$ 对任意有限可测剖分 α 成立.

证明作为习题.

注记 7.2.8 *上述结论 (1) 是 Hulse(1982) 的一个经典结果, 同时 Hulse 还获得了以下结论: $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为强混合的当且仅当对任意无限集 F, 存在 $S\subseteq F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)=H_\mu(\alpha)$ 对任意有限可测剖分 α 成立.*

习 题 7.2

1. 证明引理 7.2.1.

2. 证明命题 7.2.4.

3. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, 证明: Kronecker 代数 $\mathcal{K}_\mu$ 为一个 σ 代数且 $T^{-1}\mathcal{K}_\mu\subseteq\mathcal{K}_\mu$, 当系统可逆时 $T^{-1}\mathcal{K}_\mu=\mathcal{K}_\mu$.

4. 证明定理 7.2.7.

5. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为强混合系统, 证明: 对任意无限集 F, 存在 $S\subseteq F$, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)=H_\mu(\alpha)$ 对任意有限可测剖分 α 成立.

§7.3 拓扑序列熵与混合性

在前一小节, 我们使用测度序列熵刻画了几类测度混合属性, 本节将对拓扑动力系统作类似的讨论. 首先介绍拓扑序列熵的概念.

对动力系统 (X,T), 非负整数序列 $S=\{s_1<s_2<\cdots\}$ 及 X 的有限开覆盖 $\mathcal{U}$, 定义开覆盖 $\mathcal{U}$ **沿着** S **的拓扑序列熵**为

$$h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\log N\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-s_i}\mathcal{U}\right).$$

系统 (X,T) **沿着** S **的拓扑序列熵**定义为

$$h_{\text{top}}^S(T)=\sup_{\mathcal{U}}h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}),$$

其中 $\mathcal{U}$ 取遍 X 的有限开覆盖.

设 (X,T) 为动力系统及 $S=\{s_1<s_2<\cdots\}$ 为非负整数序列. 如果 X 的两个开覆盖 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 满足 $\mathcal{U}\succeq\mathcal{V}$, 则 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})\geqslant h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{V})$. 另外, 也有 $h_{\text{top}}^S(T,T^{-1}\mathcal{U})\leqslant h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})$, 且当 T 为满射时, $h_{\text{top}}^S(T,T^{-1}\mathcal{U})=h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})$.

命题 7.3.1 设 (X,T) 为动力系统. 如果 $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 满足 $\text{diam}(\mathcal{U}_n)\to 0$ 的开覆盖序列, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}_n)=h_{\text{top}}^S(T)$.

证明 仅讨论 $h_{\text{top}}^S(T)$ 为有限数的情形, 对 $h_{\text{top}}^S(T)=+\infty$ 的情形可类似证明. 给定 $\varepsilon>0$, 存在开覆盖 $\mathcal{U}$ 满足 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})>h_{\text{top}}^S(T)-\varepsilon$. 如果 δ 为 $\mathcal{U}$ 的 Lebesgue 数, 则当 $\text{diam}(\mathcal{U}_n)<\delta$ 时, 有 $\mathcal{U}_n\succeq\mathcal{U}$, 当然更有 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}_n)\geqslant h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})$. 因而当 n 充分大时, 有 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}_n)>h_{\text{top}}^S(T)-\varepsilon$. 由 ε 的任意性, 即得

$$\lim_{n\to\infty}h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}_n)=h_{\text{top}}^S(T).$$ □

我们也可以通过沿着序列的分离集和张成集给出拓扑序列熵等价定义.

定义 7.3.2 设 (X,T) 为具有度量 d 的动力系统, $S=\{s_1<s_2<\cdots\}$ 为非负整数序列.

(1) 对 $n\geqslant 1$ 和 $\varepsilon>0$, 称有限集 $A\subset X$ 为一个(S,n,ε) **分离集**, 如果对 A 中任意两个不同的点 x,y, 存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 满足 $d(T^{s_i}x,T^{s_i}y)\geqslant\varepsilon$; 用 $\text{sr}_T(S,n,\varepsilon)$ 表示 (X,T) 具有最多元素个数的 (S,n,ε) 分离集的元素个数;

(2) 对 $n\geqslant 1$ 和 $\varepsilon>0$, 称有限集 $A\subset X$ 为一个(S,n,ε) **张成集**, 如果对 X 的任意点 x, 存在 $y\in A$, 使得 $d(T^{s_i}x,T^{s_i}y)<\varepsilon, i=1,2,\cdots,n$; 用 $\text{sp}_T(S,n,\varepsilon)$ 表示 (X,T) 具有最少元素个数的 (S,n,ε) 张成集的元素个数.

现在定义

$$\text{sr}_T(S,\varepsilon)=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\log\text{sr}_T(S,n,\varepsilon),$$

$$\text{sp}_T(S,\varepsilon)=\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{1}{n}\log\text{sp}_T(S,n,\varepsilon).$$

易见, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\mathrm{sr}_T(S,\varepsilon)$ 和 $\mathrm{sp}_T(S,\varepsilon)$ 关于 ε 单调上升. 因此, 极限

$$\mathrm{sr}_T(S,d)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{sr}_T(S,\varepsilon)\text{和}\mathrm{sp}_T(S,d)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{sp}_T(S,\varepsilon)$$

存在.

引理 7.3.3　对每个 $n\in\mathbb{N}$.

(1) $\mathrm{sp}_T(S,n,\varepsilon)\leqslant \mathrm{sr}_T(S,n,\varepsilon)\leqslant \mathrm{sp}_T\left(S,n,\frac{\varepsilon}{2}\right)$;

(2) $\mathrm{sp}_T(S,\varepsilon)\leqslant \mathrm{sr}_T(S,\varepsilon)\leqslant \mathrm{sp}_T\left(S,\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 因此

(3) $\mathrm{sp}_T(S,d)=\mathrm{sr}_T(S,d)$.

证明完全类似于引理 5.1.17 的证明.

以下命题说明通过沿着序列的分离集和张成集可给出拓扑序列熵等价定义.

命题 7.3.4　设 (X,T) 为动力系统. 则对任意非负整数序列 $S=\{s_1<s_2<\cdots\}$, 有

$$h^S_{\mathrm{top}}(T)=\mathrm{sp}_T(S,d)=\mathrm{sr}_T(S,d).$$

特别地, $\mathrm{sp}_T(S,d)=\mathrm{sr}_T(S,d)$ 不依赖于相容度量 d 的选取.

证明完全类似于命题 5.1.18 的证明.

引理 7.3.5　设 (X,T) 为动力系统. 则对任意非负整数序列 $S=\{s_1<s_2<\cdots\}$, 有

$$h^S_{\mathrm{top}}(T^{(k)})=kh^S_{\mathrm{top}}(T). \tag{7.3.1}$$

证明　仅证明 $k=2$ 时的情形, 一般情形类似可证. 设 d 为 X 上的相容度量, $X\times X$ 的相容度量取为

$$d((x,y),(x',y'))=\max\{d(x,x'),d(y,y')\}.$$

当 E 为 X 的 (S,n,ε) 张成集时, $E\times E$ 为 $X\times X$ 的 (S,n,ε) 张成集. 这说明 $\mathrm{sp}_{T\times T}(S,n,\varepsilon)\leqslant\{\mathrm{sp}_T(S,n,\varepsilon)\}^2$, 因此 $h^S_{\mathrm{top}}(T\times T)\leqslant 2h^S_{\mathrm{top}}(T)$.

另一方面, 如果 E 为 X 的 (S,n,ε) 分离集, 则 $E\times E$ 为 $X\times X$ 的 (S,n,ε) 分离集. 这说明 $\mathrm{sr}_{T\times T}(S,n,\varepsilon)\geqslant\{\mathrm{sr}_T(S,n,\varepsilon)\}^2$. 因此 $h^S_{\mathrm{top}}(T\times T)\geqslant 2h^S_{\mathrm{top}}(T)$. □

注记 7.3.6　设 (X,T), (X',T') 为动力系统. Lemanczyk(1985) 指出一般情况下以下公式并不成立:

$$h^S(X\times X',T\times T')=h^S(X,T)+h^S(X',T').$$

定理 7.3.7　设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 则对任意非负整数序列 $S=\{s_1<s_2<\cdots\}$, 有 $h^S_\mu(X,T)\leqslant h^S_{\mathrm{top}}(X,T)$.

证明 首先, 有

断言 设 (Y,R) 为动力系统, $\nu\in\mathcal{M}(Y,R)$, 则 $h_{\text{top}}^S(Y,R)\geqslant h_\nu^S(Y,R)-(\log 2+1)$.

断言的证明 设 $\beta=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 为 Y 的有限 Borel 剖分. 取 $\varepsilon>0$(待定). 因测度 ν 为正则的, 所以存在紧集 $B_j\subset A_j, 1\leqslant j\leqslant k$, 使得 $\nu(A_j\setminus B_j)<\varepsilon$. 设 $\alpha=\{B_0,B_1,\cdots,B_k\}$, 其中 $B_0=Y\setminus\bigcup_{j=1}^k B_j$. 现在可取充分小的 ε, 使得 $H_\nu(\beta|\alpha)+H_\nu(\alpha|\beta)\leqslant 1$(见引理 5.4.5). 进而 $h_\nu^S(R,\beta)\leqslant h_\nu^S(R,\alpha)+H_\nu(\beta|\alpha)\leqslant h_\nu^S(R,\alpha)+1$. 取 $\mathcal{U}=\{B_0\cup B_1,B_0\cup B_2,\cdots,B_0\cup B_k\}$. 因对每个 $i\neq 0$, $B_0\cup B_i=Y\setminus\bigcup_{j\notin\{0,i\}}B_j$ 为开集, $\mathcal{U}$ 为 Y 的一个开覆盖. 注意到 $H_\nu(\bigvee_{i=1}^n R^{-s_i}\alpha)\leqslant\log N(\bigvee_{i=1}^n R^{-s_i}\alpha)$ 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 成立, 这里, $N(\bigvee_{i=1}^n R^{-s_i}\alpha)$ 表示剖分 $\bigvee_{i=1}^n R^{-s_i}\alpha$ 非空元素的个数, 易见 $2^nN(\bigvee_{i=1}^n R^{-s_i}\mathcal{U})\geqslant N(\bigvee_{i=1}^n R^{-s_i}\alpha)$. 因此,

$$h_\nu^S(R,\beta)\leqslant h_\nu^S(R,\alpha)+1\leqslant h_{\text{top}}^S(R,\mathcal{U})+\log 2+1.$$

进而 $h_{\text{top}}^S(R)\geqslant h_\nu^S(R)-(\log 2+1)$. 这就完成了断言的证明.

现在对任意 $k\in\mathbb{N}$, 设 $\mu^k=\mu\times\mu\times\cdots\times\mu$($k$次). 由于对 X 的每个可测剖分 α, 容易算得 $h_{\mu^k}^S(T^{(k)},\alpha\times\alpha\times\cdots\times\alpha)=kh_\mu^S(T,\alpha)$, 因此 $kh_\mu^S(T)\leqslant h_{\mu^k}^S(T^{(k)})$. 进而

$$kh_\mu^S(T)\leqslant h_{\mu^k}^S(T^{(k)})\leqslant h_{\text{top}}^S(T^{(k)})+\log 2+1=kh_{\text{top}}^S(T)+\log 2+1. \tag{7.3.2}$$

在不等式 (7.3.2) 两边除以 k, 再让 k 趋于无穷可得 $h_\mu^S(T)\leqslant h_{\text{top}}^S(T)$. □

注记 7.3.8 对序列熵没有类似于熵的变分原理成立, 例如, 对任意非平凡拓扑弱混合的唯一遍历可逆系统 (X,T), 如果其唯一不变的测度 μ 为集中在不动点的点测度, 则根据 Kushnirenko 定理, 有 $h_\mu^S(T)=0$. 然而, 由于 (X,T) 为弱混合的, 存在非负整数序列 S, 使得 $h_{\text{top}}^S(T)>0$(此点参见下面的定理 7.3.10). 在此需要指出的是, 不难构造一个两符号的子转移 (X,σ), 它是非平凡拓扑弱混合的唯一遍历可逆系统, 且其唯一不变的测度 μ 为集中在不动点的点测度.

以下给出几类拓扑混合系统的序列熵刻画. 动力系统 (X,T) 的开覆盖 $\mathcal{U}$ 称为**非平凡的**, 如果它的每个元素在 X 中非稠密. 特别地, 把由两个元素构成的非平凡开覆盖称为**标准覆盖**. 动力系统 (X,T) 的开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 称为**不可约的**, 如果对每个 $i\in I$, 有 $\text{int}(U_i\setminus\bigcup_{j\in I,j\neq i}U_j)\neq\varnothing$.

定理 7.3.9 设 (X,T) 为动力系统. 则以下等价:

(1) (X,T) 为 mild 混合的;

(2) 对每个标准覆盖 $\mathcal{U}$ 及 IP 集 F, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})>0$;

(3) 对每个非平凡的有限开覆盖 $\mathcal{U}$ 及 IP 集 F, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})>0$;

(4) 对每个不可约的开覆盖 $\mathcal{U}$ 及 IP 集 F, 存在无限序列 $S\subset F$, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})=\log N(\mathcal{U})$.

证明 (4) $\Rightarrow$ (2) 和 (3) $\Rightarrow$ (2) 是明显的.

(2) $\Rightarrow$ (1) 假设对每个标准覆盖 $\mathcal{U}$ 及 IP 集 F, 存在无限序列 $S \subset F$, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}) > 0$. 如果 (X,T) 不是 mild 混合的, 则由定理 1.4.11 知, 存在 X 的非空开集 U_1, U_2 和 IP 集 F, 使得

$$N(U_1,U_1) \cap N(U_1,U_2) \cap (F-F) = \varnothing.$$

由于 $0 \in (F-F)$, 所以 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. 取 $x_i \in U_i$ 及 x_i 的闭邻域 $V_i \subset U_i$, 其中 $i=1,2$. 这样, $\mathcal{V} = \{V_1^c, V_2^c\}$ 为 X 的标准覆盖. 由于对任意 $n \in (F-F)$, 有 $U_1 \cap T^{-n}U_1 = \varnothing$ 或 $U_1 \cap T^{-n}U_2 = \varnothing$ 成立, 于是, 存在序列 $\{W_n\}_{n\in(F-F)}$, 使得 $V_1 \subseteq T^{-n}W_n$ 对每个 $n \in (F-F)$ 成立, 其中 $W_n = V_1^c$ 或 V_2^c.

现在, 由假设, 存在无限非负整数序列 $S = \{t_1 < t_2 < \cdots\} \subset F$ 满足

$$h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{V}) > 0. \tag{7.3.3}$$

对每个 $x \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 可以考虑第一个使得 $T^{t_i}x \in V_1$ 的 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$(如果这样的 i 存在的话). 容易验证 $\mathcal{V}_n = \bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\mathcal{V}$ 有一个由如下子集构成的子覆盖:

$$T^{-t_1}V_1^c \cap \cdots \cap T^{-t_{i-1}}V_1^c \cap T^{-t_i}W_0 \cap T^{-t_{i+1}}W_{t_{i+1}-t_i} \cap \cdots \cap T^{-t_n}W_{t_n-t_i}, \quad i=1,\cdots,n$$

以及$\bigcap_{i=1}^n T^{-t_i}V_1^c$. 这说明对所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $H(\mathcal{V}_n) \leqslant n+1$. 进而 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{V}) = 0$, 与式 (7.3.3) 相矛盾.

(1) $\Rightarrow$ (4) + (3) 假设 (X,T) 为 mild 混合的. 对任意 l 个非空开集 $U_1, U_2, \cdots, U_l$ 和 IP 集 $F = \text{FS}(\{p_i\}_{i=1}^\infty)$, 有

断言 取定 $M \in \mathbb{N}$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $C_n = \{M \leqslant t_1^n < t_2^n < t_3^n < \cdots < t_n^n\} \subset F$, 使得 $\bigcap_{i=1}^n T^{-t_i^n}U_{s(i)} \neq \varnothing$ 对任意 $s \in \{1,2,\cdots,l\}^n$ 成立.

断言的证明 首先对 $n=1$, 断言明显成立. 假设对 $n=k$, 断言成立. 下设 $n=k+1$. 由于对 $n=k$ 时断言成立, 所以存在 $C_k = \{M \leqslant t_1^k < t_2^k < t_3^k < \cdots < t_k^k\} \subset F$, 使得对任意 $s \in \{1,2,\cdots,l\}^k$, 有 $\bigcap_{i=1}^k T^{-t_i^k}U_{s(i)} \neq \varnothing$.

取 $m_k \in \mathbb{N}$ 充分大, 使 $C_k \subseteq \text{FS}(\{p_i\}_{i=1}^{m_k-1})$. 设 $F_{m_k} = \text{FS}(\{p_i\}_{i=m_k+1}^\infty)$, 注意到

$$\left[\bigcap_{s\in\{1,2,\cdots,l\}^k}\bigcap_{j=1}^l N\left(\bigcap_{i=1}^k T^{-t_i^k}U_{s(i)}, U_j\right)\right] \cap (F_{m_k} - F_{m_k})$$

为无限集, 于是存在 $a_1, a_2 \in F_{m_k}$, 使得

$$(a_1 - a_2) \in \bigcap_{s\in\{1,2,\cdots,l\}^k}\bigcap_{j=1}^l N\left(\bigcap_{i=1}^k T^{-t_i^k}U_{s(i)}, U_j\right) \text{ 且} a_1 - a_2 > t_k^k.$$

设 $t_i^{k+1}=t_i^k+a_2, i=1,2,\cdots,k$ 及 $t_{k+1}^{k+1}=a_1$. 则 $C_{k+1}=\{M\leqslant t_1^{k+1}<t_2^{k+1}<\cdots<t_{k+1}^{k+1}\}\subset F$, 且对任意 $s\in\{1,2,\cdots,l\}^k$ 和 $j=1,2,\cdots,l$, 有 $\bigcap_{i=1}^k T^{-t_i^k}U_{s(i)}\cap T^{-(a_1-a_2)}U_j\neq\varnothing$ 成立, 即对任意 $r\in\{1,2,\cdots,l\}^{k+1}$, 有 $\bigcap_{i=1}^{k+1}T^{-t_i^{k+1}}U_{r(i)}\neq\varnothing$. 即断言对 $k+1$ 也成立. 由归纳法, 断言得证.

把具有上述断言特性的有限集 C_n 称为**相对于 $U_1,U_2,\cdots,U_l$ 的完全混乱集**. 以下证明 (4). 对 X 的每个不可约的开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_l\}$ 及 IP 集 F, 设 $W_i=\mathrm{int}(U_i\setminus\bigcup_{j\neq i}U_j), i=1,2,\cdots,l$, 则 $\{W_i\}$ 为互不相交的开集. 由以上断言, 存在 F 的相对于 $W_1,W_2,\cdots,W_l$ 的完全混乱的有限子集序列 S_{n_i} 满足 $\max S_{n_i}<\min S_{n_{i+1}}$ 以及 $|S_{n_i}|(=n_i)=(i+1)!-i!$, 其中 $i=1,2,\cdots$.

取 $S=\bigcup_{i=1}^\infty S_{n_i}\subseteq F$, $\Gamma_m=\bigcup_{i=1}^m S_{n_i}$. 则

$$h_{\mathrm{top}}^S(T,\mathcal{U})\geqslant\liminf_{m\to\infty}\frac{\log N\left(\bigvee_{j\in\Gamma_m}T^{-j}\mathcal{U}\right)}{\sum_{i=1}^m n_i}\geqslant\liminf_{m\to\infty}\frac{\log N\left(\bigvee_{j\in S_{n_m}}T^{-j}\mathcal{U}\right)}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

$$=\liminf_{m\to\infty}\frac{\log l^{n_m}}{\sum_{i=1}^m n_i}=\lim_{m\to\infty}\frac{n_m}{\sum_{i=1}^m n_i}\log l=\log l=\log N(\mathcal{U}).$$

这就证明了 (4).

最后, 对 X 的非平凡的开覆盖 $\mathcal{V}=\{V_1,\cdots,V_k\}$ 和 IP 集 F, 取 $x_j\in\mathrm{int}V_j^c, j=1,2,\cdots,k$. 令 $\{y_1,y_2,\cdots,y_l\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 满足: 当 $1\leqslant s<t\leqslant l$ 时, $y_s\neq y_t$. 由于 $\bigcap_{j=1}^k\mathrm{int}V_j^c=\varnothing$, 知 $l\geqslant 2$. 进而可以取 $y_i, i=1,2,\cdots,l$ 的互不相交的闭邻域 W_i, 使得 $\mathcal{U}=\{W_1^c,W_2^c,\cdots,W_l^c\}$ 为比 $\mathcal{V}$ 粗的开覆盖. 令 $P=\{W_1,W_2,\cdots,W_l\}$. 注意到

$$(l-1)^{|E|}N\left(\bigvee_{j\in E}T^{-j}\mathcal{U}\right)\geqslant\left|\left\{A:A\in\bigcap_{j\in E}T^{-j}P\text{ 且 }A\neq\varnothing\right\}\right|,$$

其中 $E\subset\mathbb{Z}_+$ 为有限集. 完全类似于 (4) 的证明, 能够找到无限序列 $S=\bigcup_{i=1}^\infty S_{n_i}\subseteq F$ 和 $\Gamma_m=\bigcup_{i=1}^m S_{n_i}$, 使得

$$h_{\mathrm{top}}^S(T,\mathcal{U})\geqslant\liminf_{m\to\infty}\frac{\log N\left(\bigvee_{j\in\Gamma_m}T^{-j}\mathcal{U}\right)}{\sum_{i=1}^m n_i}\geqslant\liminf_{m\to\infty}\frac{\log N\left(\bigvee_{j\in S_{n_m}}T^{-j}\mathcal{U}\right)}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

$$\geqslant \liminf_{m\to\infty} \frac{\log \dfrac{1}{(l-1)^{n_m}} |\{A : A \in \bigcap_{j\in E} T^{-j}P\}|}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

$$= \liminf_{m\to\infty} \frac{\log \dfrac{1}{(l-1)^{n_m}} l^{n_m}}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{n_m}{\sum_{i=1}^{m} n_i} \log \frac{l}{l-1} = \log \frac{l}{l-1} > 0.$$

因此 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{V}) \geqslant h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}) > 0$, 这就证明了 (3). □

借鉴定理 7.3.9 的证明, 我们不难获得以下对弱混和系统的序列熵刻画.

定理 7.3.10 设 (X,T) 为动力系统. 则以下等价:

(1) (X,T) 为弱混合的;

(2) 对每个标准覆盖 $\mathcal{U}$, 存在无限序列 $S \subset \mathbb{Z}_+$, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}) > 0$;

(3) 对每个非平凡的有限开覆盖 $\mathcal{U}$, 存在无限序列 $S \subset \mathbb{Z}_+$, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}) > 0$;

(4) 对每个不可约的开覆盖 $\mathcal{U}$, 存在无限序列 $S \subset \mathbb{Z}_+$, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}) = \log N(\mathcal{U})$.

最后讨论强混合性与序列熵的关系. 借鉴定理 7.3.9 的证明, 有

定理 7.3.11 设 (X,T) 为强混合系统. 则以下性质成立:

(1) 对 X 的每个非平凡的有限开覆盖 $\mathcal{U}$ 及无限非负整数序列 F, 存在无限序列 $S \subset F$, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}) > 0$;

(2) 对 X 的每个不可约的开覆盖 $\mathcal{U}$ 及无限非负整数序列 F, 存在无限序列 $S \subset F$, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}) = \log N(\mathcal{U})$.

注记 7.3.12 上述性质 (1) + (2) 并不能推出强混合性. 反例如下: 称动力系统 (X,T) 具有性质 P, 如果对 X 的任意有限个非空开集 $U_1, U_2, \cdots, U_n$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对每个 $k \geqslant 2$ 和 $s = (s(1), s(2), \cdots, s(k)) \in \{1, 2, \cdots, n\}^k$, 能找到 $x \in X$, 使得 $x \in \bigcap_{i=0}^{k-1} T^{-iN} U_{s(k)}$. 不难验证, 具有性质 P 系统具有上述性质 (1) + (2)(作为练习). 在文献 (Blanchard, 1992) 中的例 5, Blanchard 构造了有限符号 A 上的子转移 (X,σ), 使得 (X,σ) 具有性质 P(Blanchard, 1992 的命题 4 说明了这一点), 但 (X,σ) 不为强混合系统.

习 题 7.3

1. 举例说明公式 $h^S(X \times X', T \times T') = h^S(X,T) + h^S(X',T')$ 并不成立.

2. 举例说明存在非平凡拓扑弱混合的唯一遍历可逆系统 (X,T) 其唯一不变的测度 μ 为集中在不动点的点测度.

3. 证明定理 7.3.10 和 7.3.11.

4. 证明每个性质 P 的系统具有定理 7.3.11 的性质 $(1)+(2)$.

5. 设 (X,T) 为拓扑 K 系统. 证明: 对 X 的每个非平凡的有限开覆盖 $\mathcal{U}$ 及无限非负整数序列 S, 有 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})>0$. 提示: 使用习题 7.1.7.

§7.4 序列熵对

本节首先将局部化序列熵的概念引入拓扑序列熵对和测度序列熵对. 随后, 使用 Kronecker 代数对测度序列熵对进行刻画, 进而讨论两种序列熵对之间相互关系. 需要指出的是, 本节所采用的方法和技巧基本上雷同于我们在讨论熵对时所采用的方法和技巧. 但因序列熵不具有变分原理, 在结论上并不完全一致.

定义 7.4.1 设 (X,T) 为动力系统.

(1) 设 $(x_1,x_2)\in X\times X\setminus\Delta_X$. 如果对任意相对于 $\{x_1,x_2\}$ 可允许的开覆盖 $\mathcal{U}$, 存在非负整数序列 S, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})>0$, 则称 (x_1,x_2) 为**序列熵对**;

(2) 如果每对点 $(x_1,x_2)\in X\times X\setminus\Delta_X$ 为序列熵对, 则称 (X,T) 为**一致正序列熵系统**;

(3) 如果对任意非负整数序列 S, 有 $h_{\text{top}}^S(T)=0$, 则称 (X,T) 为**null 系统**.

注记 7.4.2 易见 (X,T) 为一致正序列熵系统当且仅当对 X 任意的标准覆盖 $\mathcal{U}$, 存在非负整数序列 S, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})>0$. 进而由定理 7.3.10 知, (X,T) 为弱混合系统当且仅当 (X,T) 为一致正序列熵系统.

用 $SE(X,T)$ 表示 (X,T) 全体的序列熵对, 再用 $SE'(X,T)$ 表示 $SE(X,T)$ 的闭包. 显然 $E(X,T)\subset SE(X,T)$. 序列熵对也具有熵对所具有的几个重要属性.

命题 7.4.3 设 (X,T) 为动力系统.

(1) 如果存在 X 的开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2\}$ 满足对某非负整数序列 S, 有 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})>0$, 则存在点 $x_i\in U_i^c, i=1,2$, 使得 (x_1,x_2) 为序列熵对;

(2) 如果存在非负整数序列 S, 使得 $h_{\text{top}}^S(T)>0$, 则 $SE'(X,T)$ 为 $X\times X$ 非空的 $T\times T$ 不变闭子集;

(3) 设 $\pi:(Y,R)\to(X,T)$ 为因子映射,

(i) 如果 $(x_1,x_2)\in SE(X,T)$, 则存在 $(y_1,y_2)\in SE(Y,S)$ 满足 $\pi(y_i)=x_i, i=1,2$;

(ii) 如果 $(y_1,y_2)\in SE(Y,S)$ 且 $\pi(y_1)\neq\pi(y_2)$, 则 $(\pi(y_1),\pi(y_2))\in SE(X,T)$;

(4) 假设 W 为 (X,T) 的 T 不变闭子集. 如果 (x_1,x_2) 为 $(W,T|_W)$ 的序列熵对, 则它也为 (X,T) 的序列熵对.

由上述命题知, 系统 (X,T) 为 null 系统当且仅当 $SE(X,T)=\varnothing$; (X,T) 为弱混合系统当且仅当 $SE(X,T)=X\times X\setminus\Delta_X$. 在定理 6.2.7 中, 我们已经说明每个动力系统存在拓扑 Pinsker 因子, 即最大的零熵因子. 在此类似地有

定理 7.4.4 对动力系统 (X,T) 而言, 包含 $SE(X,T)$ 的最小的闭的 $T\times T$ 不变等价关系诱导了它的**最大的 null 因子**.

容易证明, 任何等度连续系统必为 null 系统 (参见命题 8.1.8). 但是反之并不成立, 以下例子说明了这一点.

例 7.4.5 设 α 为 $(0,1)$ 中的一个无理数. 取

$$A_0=\left\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}:0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\right\},\qquad A_1=\left\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}:\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1\right\}\ \text{以及}$$

$$X=\left\{x\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}}:\bigcap_{i=-\infty}^{\infty}A_{x_i}\neq\varnothing\right\}.$$

则 X 为 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 的闭子集且 $\sigma(X)=X$, 其中 σ 为 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上的转移映射, 即 $(\sigma(x))_n=x_{n+1}$, 当 $x\in X$. 子转移 (X,σ) 为非等度连续的极小 null 系统.

证明 设 $\mathbb{T}$ 为复平面上的单位圆周, R_α 为 $\mathbb{T}$ 上满足 $R_\alpha(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z$ 的无理旋转. 则 $(\mathbb{T},R_\alpha)$ 为极小等度连续系统. 不难看出对每个 $x\in X$, $\bigcap_{i=-\infty}^{\infty}A_{x_i}$ 为独点集. 因此, 可以定义因子映射 $\pi:(X,\sigma)\to(\mathbb{T},R_\alpha)$, 使得 $\pi(x)\in\bigcap_{i=-\infty}^{\infty}A_{x_i}$ 对每个 $x\in X$ 成立.

对 $x\in X$ 和任意 X 的非空矩形集 U, 存在 $i\leqslant j\in\mathbb{Z}$ 和 $u\in\{1,2\}^{j-i+1}$, 使得 $U=\{y\in X:y_i\cdots y_j=u\}$. 由于 $(\mathbb{T},R_\alpha)$ 为极小系统, $\mathrm{int}(\pi(\mathrm{U}))\neq\varnothing$ 以及 $N(x,U)\supset N(\pi(x),\mathrm{int}(\pi(\mathrm{U})))$, 所以 $N(x,U)$ 为 syndetic 集. 这说明 (X,σ) 为极小系统.

由于存在正常数 $C>0$, 使得 $\sup_{n\in\mathbb{Z}}d(\sigma^n x,\sigma^n y)>C$ 对每对 $x\neq y\in X$ 成立, 系统 (X,σ) 不是等度连续系统. 最后, 我们说明 (X,σ) 为 null 系统. 取 $\mathcal{U}=\{[0],[1]\}$, 其中 $[i]=\{x\in X:x_0=i\},i=0,1$. 对任意非负整数序列 S, 不难说明 $N(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-s_i}\mathcal{U})=2n$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立. 因此 $h_{\mathrm{top}}^{S}(\sigma,\mathcal{U})=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log N(\bigvee_{i=1}^{n}\sigma^{-s_i}\mathcal{U})=0$. 进而对每个 $m\in\mathbb{N}$, 有 $h_{\mathrm{top}}^{S}(T,\bigvee_{i=-m}^{m}\sigma^{-i}\mathcal{U})\leqslant 2mh_{\mathrm{top}}^{S}(\sigma,\mathcal{U})=0$ 成立. 因 $\mathrm{diam}(\bigvee_{i=-m}^{m}\sigma^{-i}\mathcal{U})\searrow 0$, 由命题知 $h_{\mathrm{top}}^{S}(\sigma)=0$. 再由 S 的任意性知 (X,σ) 为 null 系统.

我们进一步分析 (X,σ) 的结构. 对于 $z\in\mathbb{T}\setminus(\mathrm{orb}(1,R_\alpha)\cup\mathrm{orb}(-1,R_\alpha))$, $\pi^{-1}(z)$ 是独点集; 对于 $z\in\mathrm{orb}(1,R_\alpha)\cup\mathrm{orb}(-1,R_\alpha)$, $\mathrm{Card}\pi^{-1}(z)=2$. 设 $X_0=\{x\in X:\mathrm{Card}\pi^{-1}\pi(x)=1\}$, 则 $X\setminus X_0$ 为可数集. 进而 X_0 为 X 稠密的 G_δ 集, 这说明 (X,σ) 为极小等度连续系统 $(\mathbb{T},R_\alpha)$ 的几乎一对一的扩充. □

以下定义和研究测度序列熵对. 在这一过程中, 许多地方的结果和证明类似于测度熵对的相应的结果和证明. 只不过对于测度熵对讨论过程中我们使用 Pinsker

σ 代数, 而对于测度序列熵对的讨论我们使用 Kronecker σ 代数. 设 (X,T) 为动力系统, $\mathcal{B}_X$ 为空间 X 的 Borel σ 代数以及 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 现在定义 X^n 上的测度 $\chi_n(\mu)$, 使得

$$\chi_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n A_i)=\int_X \Pi_{i=1}^n \mathbb{E}(1_{A_i}|\mathcal{K}_\mu)\mathrm{d}\mu.$$

对任意 $A_i\in\mathcal{K}_\mu, i=1,2,\cdots,n$ 成立, 其中 $\mathcal{K}_\mu$ 为 $(X,\mathcal{B}_X,\mu,T)$ 的 Kronecker σ 代数. 当 $n=2$ 时, 将 $\chi_2(\mu)$ 简记为 $\chi(\mu)$.

定义 7.4.6 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 以及 $(x_1,x_2)\in X\times X\setminus\Delta_X$. 如果对任意相对于 $\{x_1,x_2\}$ 可允许的可测剖分 α, 存在非负整数序列 S, 使得 $h^S_{\rm top}(T,\alpha)>0$, 则称 (x_1,x_2) 为**相对于测度 μ 的序列熵对** (或简称μ **序列熵对**).

用 $SE_\mu(X,T)$ 表示 μ 序列熵对全体. 以下研究 $SE_\mu(X,T)$ 的结构, 引理 7.4.7 和定理 7.4.9 的证明完全类似于第 6 章中相应结论的证明.

引理 7.4.7 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 如果 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$ $(n\geqslant 2)$ 为 X 的可测覆盖, 则 $\chi_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i^c)>0$ 当且仅当对任意有限的 (或 n 个集组成的) 比 $\mathcal{U}$ 细的可测剖分 α, 存在非负整数序列 S, 使得 $h^S_\mu(T,\alpha)>0$.

注记 7.4.8 对 X 的可测剖分 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$, 其中 $n\geqslant 2$. 由引理 7.4.7, 不难看出, $\chi_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n A_i^c)>0$ 当且仅当存在非负整数序列 S, 使得 $h^S_\mu(T,\alpha)>0$. 特别地, 对 $\alpha=\{A,A^c\}$, $\chi(\mu)(A\times A^c)>0$ 当且仅当存在非负整数序列 S, 使得 $h^S_\mu(T,\alpha)>0$.

现在给出 $SE_\mu(X,T)$ 的刻画.

定理 7.4.9 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 则 $SE_\mu(X,T)=\operatorname{supp}(\chi(\mu))\setminus\Delta_X$.

定义 7.4.10 设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 以及 S 为非负整数序列. 对 X 的可测覆盖 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$, 定义覆盖 $\mathcal{U}$ **沿着 S 相对于 μ 的序列熵**如下:

$$h^S_\mu(T,\mathcal{U})=\inf_{\beta\in\mathcal{P}_X:\beta\succeq\mathcal{U}} h^S_\mu(T,\beta).$$

以下讨论测度序列熵对与拓扑序列熵对的相互关系, 为此需要更多的有关覆盖和剖分序列熵的结果.

定理 7.4.11 设 (X,T) 为可逆动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 以及 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$ 为 X 的开覆盖. 如果 $\chi_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i^c)>0$, 则存在非负整数序列 $S=\{0\leqslant t_1<t_2<\cdots\}$, 使得

$$h^S_{\rm top}(T,\mathcal{U})>0 \text{ 并且} h^S_\mu(T,\mathcal{U})>0.$$

证明　因 $\chi_n(\mu)(\Pi_{i=1}^n U_i^c) = \int_X \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(1_{U_i^c}|\mathcal{K}_\mu)\mathrm{d}\mu > 0$, 存在 $M \in \mathbb{N}$, 使得 $\mu(D'_M) > 0$, 其中

$$D'_M = \left\{x \in X : \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{E}(1_{U_i^c}|\mathcal{K}_\mu)(x) \geqslant \frac{2}{M}\right\}.$$

对任意 $s = (s(1), s(2), \cdots, s(n)) \in \{0,1\}^n$, 设 $A_s = \bigcap_{i=1}^n U_i(s(i))$, 其中 $U_i(0) = U_i$, $U_i(1) = U_i^c$, 然后令 $\alpha = \{A_s : s \in \{0,1\}^n\}$.

设 $\gamma_j \subset \mathcal{K}_\mu$ 为递增的有限 σ 代数且满足 $\bigvee_{j=1}^{+\infty} \gamma_j = \mathcal{K}_\mu$. 由 Martingale 收敛定理 $\lim_{j\to\infty} \mathbb{E}(1_{U_i^c}|\gamma_j) = \mathbb{E}(1_{U_i^c}|\mathcal{K}_\mu)$ 在 μ-a.e. 和 $L^1(\mu)$ 模的意义下同时成立. 因此不难看出, 存在某个 $j \in \mathbb{N}$, 使得

(1) 如果设 $D_M = \left\{x \in X : \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{E}(1_{U_i^c}|\gamma_j)(x) \geqslant \frac{1}{M}\right\}$, 则 $\mu(D_M) > \frac{\mu(D'_M)}{2}$;

(2) $H_\mu(\alpha|\gamma_j) < H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu) + \frac{\mu(D'_M)}{4M} \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$.

为方便起见, 令 $\gamma = \gamma_j$, 类似于在定理 6.4.5 证明中出现的断言, 我们有以下断言：对每个比 $\mathcal{U}$ 细的剖分 β, 以下不等式成立：

$$H_\mu(\alpha|\beta \vee \gamma) \leqslant H_\mu(\alpha|\gamma) - \frac{\mu(D_M)}{M} \log\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

取 $\varepsilon = \frac{\mu(D_M)}{M} \log\left(\frac{n}{n-1}\right) > 0$. 从定理 7.1.6 知, 存在无限非负整数序列 $S = \{0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots\}$, 使得 $h_\mu^S(T, \alpha) = H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)$.

设 $n \in \mathbb{N}$,$\beta \in \mathcal{P}_X$ 满足 $\beta \succeq \bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\mathcal{U}$. 因 $T^{t_i}\beta, i \in \{1, \cdots, n\}$ 为 $\mathcal{U}$ 的加细, 有

$$\begin{aligned}
H_\mu\left(\beta \Big| \bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\gamma\right) &= H_\mu\left(\beta \vee \bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\alpha \Big| \bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\gamma\right) \\
&\quad - H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\alpha \Big| \beta \vee \bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\gamma\right) \\
&\geqslant H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\alpha \Big| \bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\gamma\right) - \sum_{i=1}^n H_\mu(\alpha|T^{t_i}\beta \vee \gamma) \\
&\geqslant H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\alpha\right) - H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\gamma\right) - n(H_\mu(\alpha|\gamma) - \varepsilon) \\
&\geqslant H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\alpha\right) - H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\gamma\right) \\
&\quad - n(H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu) + \frac{\mu(D'_M)}{4M} \log\left(\frac{n}{n-1}\right) - \varepsilon) \\
&\geqslant H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\alpha\right) - H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\gamma\right) - n\left(H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu) - \frac{\varepsilon}{2}\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\inf_{\beta\in\mathcal{P}_X:\beta\succeq\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\mathcal{U}}H_\mu(\beta)\\
\geqslant&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\alpha\right)-H_\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\gamma\right)-n\left(H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}\\
\geqslant&h_\mu^S(T,\alpha)-h_\mu^S(T,\gamma)-H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)+\frac{\varepsilon}{2}\\
=&\frac{\varepsilon}{2}\quad(\text{因}h_\mu^S(T,\alpha)=H_\mu(\alpha|\mathcal{K}_\mu)\text{和}h_\mu^S(T,\gamma)=0).
\end{aligned}\tag{7.4.1}$$

现在由不等式 (7.4.1) 即得 $h_\mu^S(T,\mathcal{U})>0$. 最后我们说明 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})>0$. 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 取有限可测剖分 $\beta_n\succeq\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\mathcal{U}$ 满足 $\log N(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\mathcal{U})\geqslant H_\mu(\beta_n)$. 这样,

$$\begin{aligned}
h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})&=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-t_i}\mathcal{U})\\
&\geqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu(\beta_n)>0\ (\text{由不等式 (7.4.1)}).
\end{aligned}$$
□

注记 7.4.12 在本定理中, 我们要求系统是可逆的, 我们不知道可逆性条件是否可以去掉.

有了以上准备, 现在我们能够证明:

定理 7.4.13 设 (X,T) 为可逆动力系统和 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 则 $SE_\mu(X,T)\subseteq SE(X,T)$.

证明 设 $(x_1,x_2)\in SE_\mu(X,T)$ 和 $\mathcal{U}$ 为 X 的相对于 (x_1,x_2) 可允许的开覆盖. 易见, 任意比 $\mathcal{U}$ 细的有限可测剖分 α 为相对于 (x_1,x_2) 可允许的剖分, 进而从测度序列熵对的定义我们知, 存在非负整数序列 S, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)>0$. 再由引理 7.4.7 和定理 7.4.11, 存在非负整数序列 S, 使得 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U})>0$. 因此 $(x_1,x_2)\in SE(X,T)$, 这就完成了定理的证明. □

注记 7.4.14 任何拓扑弱混合的以一个集中在一个不动点上的点测度为唯一不变测度的系统 (X,T) 满足 $SE(X,T)=X\times X\setminus\Delta_X$, $SE_\mu(X,T)=\varnothing$. 这说明我们不是总能找到不变测度 μ, 使得 $SE_\mu(X,T)=SE(X,T)$, 这一点与熵对是完全不同的. 产生这一现象的主要原因在于对序列熵而言没有类似于熵的变分原理.

为将上述结论推广到不可逆系统, 需要证明测度序列熵对具有提升性质.

定理 7.4.15 设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为动力系统间的因子映射, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 以及 $\nu=\pi(\mu)$. 则

(1) 对每个 $(x_1,x_2)\in SE_\mu(X,T)$, 设 $\pi(x_i)=y_i$, $i\in\{1,2\}$. 如果 $y_1\neq y_2$, 那么 $(y_1,y_2)\in SE_\nu(Y,S)$;

(2) 对每个 $(y_1,y_2)\in SE_\nu(Y,S)$, 存在 $(x_1,x_2)\in SE_\mu(X,T)$ 满足 $\pi(x_i)=y_i$, $i\in\{1,2\}$.

证明　由定义 (1) 是明显成立的.

(2) 设 $\mathcal{Z}=\pi^{-1}(\mathcal{K}_\nu)$, 则有 $\mathcal{Z}=\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)\cap\mathcal{K}_\mu$. 设 $(y_1,y_2)\in SE_\nu(Y,S)$. 取 $y_i,i\in\{1,2\}$ 的任意闭邻域 V_i, 使得 $V_1\cap V_2=\varnothing$, 则 $\chi(\nu)(V_1\times V_2)>0$. 设 $U_i=\pi^{-1}(V_i),i=1,2$. 有

断言　$\chi(\mu)(U_1\times U_2)>0$.

断言的证明　假设 $\chi(\mu)(U_1\times U_2)=0$. 设 $\mathcal{U}=\{U_1^c,U_2^c\}$. 因 $U_1\cap U_2=\varnothing$, 所以 $\mathcal{U}$ 为 X 的开覆盖. 由引理 7.4.7, 存在 X 的可测剖分 $\alpha=\{A_1,A_2\}$, 使得 $A_i\subset U_i^c$, 并且 $h_\mu^S(T,\alpha)=0$ 对所有非负整数序列 S 成立. 由命题 7.2.3, 对 $i\in\{1,2\}$, 有 $A_i\in\mathcal{K}_\mu$.

命题 7.2.4 告诉我们: $f\in L^2(X,\mathcal{K}_\mu,\mu)$ 当且仅当 $\overline{\{T^nf:n\in\mathbb{Z}_+\}}$ 为 $L^2(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ 的紧子集. 设 $f\in L^2(X,\mathcal{K}_\mu,\mu)$, 则 $\overline{\{T^nf:n\in\mathbb{Z}_+\}}$ 为 $L^2(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ 的紧子集. 由于对任意 $g\in L^2(X,\mathcal{B}_X,\mu)$, 有 $||\mathbb{E}(g|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)||_{L^2(X,\mu)}\leqslant||g||_{L^2(X,\mu)}$, 所以 $\overline{\{T^n\mathbb{E}(f|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)):n\in Z\}}$ 也为紧子集. 从而 $\mathbb{E}(f|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y))\in L^2(X,\mathcal{K}_\mu,\mu)$, 即 $\mathbb{E}(f|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y))\in L^2(X,\mathcal{Z},\mu)$. 特别地, $B_i=\{\mathbb{E}(1_{A_i}|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y))>0\}\in\mathcal{Z}$, 进而存在 $C_i\in\mathcal{K}_\nu$, 使得 $B_i=\pi^{-1}(C_i),i=1,2$.

由于 $\mathbb{E}(1_{A_i}|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y))\leqslant\mathbb{E}(1_{U_i^c}|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y))=1_{U_i^c}$, 有 $B_i\subset U_i^c$ 以及 $C_i\subset V_i^c$. 注意到 $\sum\limits_{i=1}^{2}\mathbb{E}(1_{A_i}|\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y))=1$, 那么 $B_1\cup B_2=X$, 从而 $C_1\cup C_2=Y$. 取 $D_1=C_1$, $D_2=C_2\setminus C_1$, 则 $D_i\in\mathcal{K}_\nu$, $i=1,2$ 且 $Q=\{D_1,D_2\}$ 为比 $\{V_1^c,V_2^c\}$ 细的可测剖分. 由命题 7.2.3 知, 对每个非负整数序列 S, $h_\mu^S(T,Q)=0$ 成立. 进而由引理 7.4.7 知 $\chi(\nu)(V_1\times V_2)=0$, 这与 $\chi(\nu)(V_1\times V_2)>0$ 矛盾. 这就完成了断言的证明.

从断言知 $\mathrm{supp}(\chi(\mu))\cap(U_1\times U_2)\neq\varnothing$. 由 $V_i,i=1,2$ 的任意性, 推得 $\mathrm{supp}(\chi(\mu))\cap(\pi^{-1}(y_1)\times\pi^{-1}(y_2))\neq\varnothing$, 即存在 $(x_1,x_2)\in SE_\mu(X,T)$ 满足 $\pi(x_i)=y_i,i=1,2$. □

在本节最后, 有

定理 7.4.16　设 (X,T) 为动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 则 $SE_\mu(X,T)\subseteq SE(X,T)$.

证明　设 $X_\mu=\mathrm{supp}(\mu)$. 则 $T|_{X_\mu}:X_\mu\to X_\mu$ 为满射. 设 $\pi_1:(\widetilde{X_\mu},\widetilde{T|_\mu})\to(X_\mu,T|_{X_\mu})$ 为 (X,T) 的自然扩充. 取 $\widetilde{\mu}\in\mathcal{M}(\widetilde{X_\mu},\widetilde{T|_{X_\mu}})$ 满足 $\pi_1\widetilde{\mu}=\mu$, 从定理 7.4.15 和定理 7.4.13 知 $SE_\mu(X_\mu,T|_{X_\mu})=\pi_1\times\pi_1(SE_{\widetilde{\mu}}(\widetilde{X_\mu},\widetilde{T|_{X_\mu}}))\setminus\Delta_{X_\mu}\subseteq\pi_1\times\pi_1(SE(\widetilde{X_\mu},\widetilde{T|_{X_\mu}}))\setminus\Delta_{X_\mu}$. 再从命题 7.4.3 知 $\pi_1\times\pi_1(SE(\widetilde{X|_\mu},\widetilde{T|_{X_\mu}}))\setminus\Delta_{X_\mu}=SE(X_\mu,T|_{X_\mu})$. 这就说明 $SE_\mu(X_\mu,T|_{X_\mu})\subseteq SE(X_\mu,T|_{X_\mu})$. 注意到 $SE_\mu(X,T)=SE_\mu(X_\mu,T|_{X_\mu})$ 以及 $SE(X_\mu,T|_{X_\mu})\subseteq SE(X,T)$, 定理得证. □

习　题　7.4

1. 设 (X,T) 为可逆动力系统, $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$. 证明: 如果存在非负整数序列 S 和有限可测剖分 α, 使得 $h_\mu^S(T,\alpha)>0$, 则 $SE_\mu(X,T)\neq\varnothing$. 进而 $SE_\mu(X,T)=\varnothing$ 当且仅当 (X,μ,T) 具有离散谱.

2. 设 (X,T) 为可逆的动力系统, 令

$$SE_M(X,T)=\overline{\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} SE_\mu(X,T)}\setminus\Delta_X.$$

证明: 存在 T 不变的测度 ν, 使得 $SE_\nu(X,T)=SE_M(X,T)$. 进而 $SE_M(X,T)=X\times X\setminus\Delta_X$ 当且仅当存在 $\nu\in\mathcal{M}(X,T)$, 使得 $SE_\nu(X,T)=X\times X\setminus\Delta_X$.

3. 设 (X,T) 为动力系统. 如果对每个 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 和非负整数序列 S, 均有 $h_\mu^S(T)=0$, 那么称 (X,T) 为**M-null 系统**. 证明:

(1) (X,T) 为 M-null 系统当且仅当 $SE_M(X,T)=\varnothing$;

(2) 每个动力系统存在最大 M-null 因子.

4. 举例说明存在系统 (X,T) 满足 $SE_M(X,T)=\varnothing$ 但 $SE(X,T)=X\times X\setminus\Delta_X$.

§7.5 拓扑 null 系统

在 §7.1 我们已经看到, 一个保测系统为 null 系统当且仅当它具有离散谱. Halmos-von Neumann 定理 (Halmos-Neumann, 1942) 告诉我们: 具有离散谱的遍历系统同构于紧致 Abel 群上的遍历旋转. 因此, 遍历的 null 系统相当于紧致 Abel 群上的旋转. 在拓扑动力系统中, 我们说一个动力系统 (X,T) 具有**离散谱**, 如果 T 的连续特征函数的线性组合在 $C(X;\mathbb{C})$ 中稠密, 其中 $C(X;\mathbb{C})$ 是由所有 X 上连续复值函数在最大模范数下构成的 Banach 空间. Halmos-von Neumann 定理告诉我们: (1) 传递的具有离散谱的动力系统拓扑共轭于紧致度量群上的极小旋转 (即极小的等度连续系统); (2) 两个传递的具有离散谱系统拓扑共轭当且仅当它们具有相同的特征值集合. 在遍历理论中, null 系统与具有离散谱系统是相一致的, 然而, 在拓扑动力系统中, null 系统和具有离散谱的系统是两类不同的系统 (例 7.4.5 已经说明了这一点). 传递的离散谱系统的结构我们已经十分清楚了, 刻画拓扑 null 系统大致结构将是本节和下一节的一项主要任务.

在本节, 我们将给出非极小的传递系统成为 null 系统的一些必要条件. 设 (X,T), (X',T') 为动力系统. 虽然 Lemanczyk(1985) 指出一般情况下公式

$$h^S(X\times X',T\times T')=h^S(X,T)+h^S(X',T')$$

并不成立, 但此时仍然有

命题 7.5.1 *动力系统的 null 性质对因子映射、子系统、可数乘积以及逆极限保持. 特别地, 一个 T 为满射的动力系统 (X,T) 为 null 系统当且仅当它的自然扩充为 null 系统.*

证明 这是命题 7.4.3 的简单应用. □

由于一个系统为 null 系统当且仅当它没有序列熵对, 所以我们要想分析 null 系统的结构, 首先必须清楚一个点对在什么时候能成为序列熵对. 一般来说, 要想直接说明一个点对 (x,y) 是序列熵对是十分困难的事情, 但要验证 (x,y) 是否为弱混合对相对的要容易得多. 我们主要的想法是首先确定弱混合对在那些条件下能成为序列熵对, 再以此为出发点给出传递 null 系统的大致结构.

在此回顾一下弱混合对的定义: 设 (X,T) 为动力系统, $(x_1,x_2)\in X\times X\setminus\Delta_X$. 如果对 $x_i, i=1,2$ 的任意非空开邻域 U_i, 有 $N(U_1,U_1)\cap N(U_1,U_2)\neq\varnothing$, 则称 (x_1,x_2) 为**弱混合对**. 用 $\mathrm{WM}(X,T)$ 表示 (X,T) 的全体弱混合对. 以下命题说明了序列熵对与弱混合对有着密切的关系.

命题 7.5.2 设 (X,T) 为动力系统. 则 $SE(X,T)\subseteq \mathrm{WM}(X,T)$.

证明 假设 $x_1\neq x_2$ 且 $(x_1,x_2)\notin\mathrm{WM}(X,T)$. 那么存在 $x_i, i=1,2$ 的邻域 U_i', 使得 $N(U_1',U_1')\cap N(U_1',U_2')=\varnothing$. 再取 $x_i, i=1,2$ 的闭邻域 U_i, 使得 $U_i\subset U_i', i=1,2$ 且 $U_1\cap U_2=\varnothing$. 显然 $N(U_1,U_1)\cap N(U_1,U_2)=\varnothing$. 从而对任意 $n\in\mathbb{Z}_+$, 有 $U_1\cap T^{-n}U_1=\varnothing$ 或 $U_1\cap T^{-n}U_2=\varnothing$. 进而, 对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$, 可以取 $W_n=U_1^c$ 或 U_2^c, 使得 $U_1\subset T^{-n}W_n$.

令 $\mathcal{U}=\{U_1^c,U_2^c\}$. 对 $n\in\mathbb{N}$ 以及任意非负整数序列 $S=\{0\leqslant s_1<s_2<\cdots\}$, 对每个 $x\in X$, 考虑最小的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $T^{s_i}x\in U_1$(如果存在如此的 i 的话). 因此, 覆盖 $\bigvee_{i=1}^n T^{-s_i}\mathcal{U}$ 有一个由如下集合组成的子覆盖:

$$T^{-s_1}U_1^c\cap\cdots\cap T^{-s_{i-1}}U_1^c\cap T^{-s_i}W_0\cap T^{-s_{i+1}}W_{s_{i+1}-s_i}\cap\cdots\cap T^{-s_n}W_{s_n-s_i},\\ i=1,2,\cdots,n,n+1.$$

这样, 对所有 $n\in\mathbb{N}$, $N(\bigvee_{i=1}^n T^{-s_i}\mathcal{U})\leqslant n+1$, 进而 $h_{\mathrm{top}}^S(T,\mathcal{U})=0$. 这说明 $(x_1,x_2)\notin SE(X,T)$, 由此证明了 $SE(X,T)\subseteq\mathrm{WM}(X,T)$. □

注记 7.5.3 即便对极小系统, $SE(X,T)$ 也可能为 $\mathrm{WM}(X,T)$ 的真子集. 如我们在例 7.4.5 中构造了一个极小的非等度连续的 null 可逆系统 (X,σ), 这个系统满足 $SE(X,T)=\varnothing$ 但 $\mathrm{WM}(X,T)\neq\varnothing$(参见定理 3.5.15).

为了给出弱混合对成为序列熵对的一些充分条件, 我们还需要如下的命题:

命题 7.5.4 设 (X,T) 为动力系统, $(x_1,x_2)\in X\times X\setminus\Delta_X$. 如果对 $x_i, i=1,2$ 的任意邻域 U_i, 存在非负整数序列 $S=\{0\leqslant t_1<t_2<\cdots\}$, 使得对任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $s=(s(1),\cdots,s(n))\in\{1,2\}^n$, 有 $\bigcap_{i=1}^n T^{-t_i}U_{s(i)}\neq\varnothing$, 则 $(x_1,x_2)\in SE(X,T)$.

证明 设 U_i 为 $x_i, i=1,2$ 的闭邻域且 $U_1\cap U_2=\varnothing$. 由题设知, 存在序列 $0\leqslant t_1<t_2<t_3<\cdots$, 使得对任意 $n>0$, $s\in\{1,2\}^n$, 我们能找到 $x_s\in\bigcap_{i=1}^n T^{-t_i}U_{s(i)}$.

设 $S=\{0\leqslant t_1<t_2<t_3<\cdots\}$, $X_n=\{x_s:s\in\{1,2\}^n\}$. 注意到对每个 $s\in\{1,2\}^n$, 有 $|\bigcap_{i=1}^n T^{-t_i}U_{s(i)}^c\cap X_n|=1$. 结合这一事实和

$|X_n| = 2^n$, 可得 $N(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\mathcal{U}) = 2^n$, 其中 $\mathcal{U} = \{U_1^c, U_2^c\}$. 因此 $h_{\text{top}}^S(T,\mathcal{U}) = \lim_{n\to+\infty} \sup \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=1}^n T^{-t_i}\mathcal{U}) = \log 2$, 进而 $(x_1, x_2) \in SE(X,T)$. □

现在我们先给出弱混合对成为序列熵对的一个充分条件. 设 $\pi: X \to Y$ 为连续映射, 如果 X 的非空开集在 π 下的像集具有非空内部, 则称 π 为**半开的**.

引理 7.5.5 设 (X,T) 为动力系统, $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$. 令 $A = \overline{\text{orb}((x_1,x_2), T\times T)}$, 如果向第一坐标的投影映射 $\pi_1: A \to X$ 为半开的, 则 $(x_1,x_2) \in SE(X,T)$ 当且仅当 $(x_1,x_2) \in \text{WM}(X,T)$.

证明 假设 $(x_1,x_2) \in \text{WM}(X,T)$ 且 $\pi_1: A \to X$ 为半开的. 要想说明 $(x_1,x_2) \in SE(X,T)$, 由命题 7.5.4, 只需证明以下断言.

断言 对 x_1, x_2 的任意邻域 U_1, U_2, 存在序列 $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$, 使得对每个 $l > 0$ 和 $s \in \{1,2\}^l$, 都能找到 $M_s \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{M_s}(x_1) \in \bigcap_{i=1}^l T^{-t_i} U_{s(i)}$ 且 $T^{M_s}(x_j) \in U_j, j = 1,2$.

断言的证明 固定 x_1, x_2 的开邻域 U_1, U_2. 因 $\pi_1: A \to X$ 为半开的, 所以 $W_1 = \text{int}(\pi_1((U_1 \times U_2)\cap A))$ 为 X 的非空开集且 $W_1 \subset U_1$. 令 $W_2 = U_2$.

由于 $(W_1 \times W_2)\cap A$ 为 A 的非空开集以及 (x_1,x_2) 的轨道在 A 中稠密, 因此, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得

$$(T\times T)^n(x_1,x_2) \in (W_1 \times W_2)\cap A. \tag{7.5.1}$$

因弱混合对是 $T\times T$ 不变的以及 $(x_1,x_2) \in \text{WM}(X,T)$, 从而 $(T^n(x_1), T^n(x_2)) \in \text{WM}(X,T)$. 这样, 由 (7.5.1) 知 $N(W_1,W_1)\cap N(W_1,W_2) \neq \varnothing$. 因此, 存在 $t_1 \geqslant 0$, 使得 $W_1 \cap T^{-t_1}W_1 \neq \varnothing$, $W_1 \cap T^{-t_1}W_2 \neq \varnothing$. 由于 (x_1,x_2) 的轨道在 A 中稠密, 存在 $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $(T^{M_i}(x_1), T^{M_i}(x_2)) \in ((W_1 \cap T^{-t_1}W_i)\times U_2)\cap A$, $i=1,2$. 这样, 对 $i,j = 1,2$, 有 $T^{M_i}(x_1) \in U_1 \cap T^{-t_1}U_2$ 且 $T^{M_i}(x_j) \in U_j$.

现在假设 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_l, l \geqslant 1$ 已经定义好且满足对任意 $s \in \{1,2\}^l$, 存在 $M_s \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{M_s}(x_1) \in \bigcap_{i=1}^l T^{-t_i}U_{s(i)}$ 且 $T^{M_s}(x_j) \in U_j$, $j = 1,2$.

以下定义 t_{l+1}. 取 $\delta > 0$, 使得对 X 中任意满足 $d(z_1,x_1) < \delta$, $d(z_2,x_2) < \delta$ 的 z_1, z_2, 有 $T^{M_s}(z_1) \in \bigcap_{i=1}^l T^{-t_i}U_{s(i)}$, $T^{M_s}(z_j) \in U_j$, $j = 1,2$ 对每个 $s \in \{1,2\}^l$ 成立. 令 $U_1^\delta = \{z \in X: d(z,x_1) < \delta\}$, $U_2^\delta = \{z \in X: d(z,x_2) < \delta\}$.

因 $\pi_1: A \to X$ 为半开的, $W_1^\delta = \text{int}(\pi_1((U_1^\delta \times U_2^\delta)\cap A))$ 为非空开集且 $W_1^\delta \subset U_1^\delta$. 令 $W_2^\delta = U_2^\delta$. 同上面的讨论, 有 $N(W_1^\delta, W_1^\delta)\cap N(W_1^\delta, W_2^\delta) \neq \varnothing$. 不失一般性 (必要时取 δ 更小一些), 不妨设 $N(W_1^\delta, W_1^\delta)\cap N(W_1^\delta, W_2^\delta) \subset \{t_1+1, t_1+2, \cdots\}$. 因此, 存在 $t_{l+1} > t_l$ 满足 $W_1^\delta \cap T^{-t_{l+1}}W_i^\delta \neq \varnothing$, $i = 1,2$. 现在我们能选择 $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}_+$, 使得对 $i,j = 1,2$, 有 $T^{P_i}(x_1) \in W_1^\delta \cap T^{-t_{l+1}}W_i^\delta$, $T^{P_i}(x_j) \in U_j^\delta$ 成立.

对 $r \in \{1,2\}^{l+1}$, 取 $s \in \{1,2\}^l$ 满足 $s(i) = r(i), i = 1,2,\cdots,l$, 再设 $r(l+1) = k$. 令 $M_r = M_s + P_k$. 则 $T^{M_r}(x_1) = T^{M_s}(T^{P_k}(x_1)) \in \bigcap_{i=1}^l T^{-t_i}U_{s(i)}$.

由于 $T^{t_{l+1}}T^{P_k}(x_1) \in W_k^\delta$, 所以 $T^{t_{l+1}}T^{M_r}(x_1) = T^{M_s}T^{t_{l+1}}T^{P_k}(x_1) \in U_k$. 因此 $T^{M_r}(x_1) \in \bigcap_{i=1}^{l} T^{-t_i}U_{s(i)} \bigcap T^{-t_{l+1}}U_k = \bigcap_{i=1}^{l+1} T^{-t_i}U_{r(i)}$. 与此同时, 也有 $T^{M_r}(x_j) = T^{M_s}T^{P_k}(x_j) \in U_j$. 这就完成了断言的证明. □

当 T 为同胚时, 定义 $\mathrm{orb}_{\mathbb{Z}}(x_1, x_2) = \{(T \times T)^n(x_1, x_2) : n \in \mathbb{Z}\}$. 完全类似于引理 7.5.5 的证明, 有

引理 7.5.6 设 (X,T) 为可逆动力系统, $x_1, x_2 \in X$ 满足 $x_1 \neq x_2$. 令 $A = \overline{\mathrm{orb}_{\mathbb{Z}}(x_1, x_2)}$, 如果向第一坐标的投影映射 $\pi_1 : A \to X$ 为半开的, 则 $(x_1, x_2) \in SE(X,T)$ 当且仅当 $(x_1, x_2) \in \mathrm{WM}(X,T)$.

推论 7.5.7 设 (X,T) 为传递系统, x_1 为 T 的传递点以及 p 为 T 的不动点. 则 $(x_1, p) \in SE(X,T)$ 当且仅当 $(x_1, p) \in \mathrm{WM}(X,T)$.

证明 取 $A = \overline{\mathrm{orb}((x_1,p), T \times T)}$, 则 $A = X \times \{p\}$. 显然, 投影映射 $\pi_1 : A \to X$ 为半开的, 由引理 7.5.5 即知推论成立. □

设 S 为 $\mathbb{Z}_+$ 的子集. 我们回忆一下 S 的上半 Banach 密度定义为

$$BD^\star(S) = \lim_{|I| \to +\infty} \sup \frac{|S \cap I|}{|I|},$$

其中 I 取遍 $\mathbb{Z}_+$ 的有限子区间. 如果对每个 $a < 1$, 存在自然数 N, 使得对 $\mathbb{Z}_+$ 的任意长度大于 N 有限子区间 I, 有 $|S \cap I| \geqslant a|I|$ 成立, 我们就说 S 的下半 Banach 密度为 1. 设 (X,T) 为动力系统. 如果对 X 的每对非空开集 U, V, 回复时间集 $N(U,V)$ 具有正上半 Banach 密度, 就称 (X,T) 为**上半 Banach 传递的**. 定理 2.6.5 已经说明: 如果 (X,T) 为 E 系统, 则对 X 的每对非空开集 U, V, 回复时间集 $N(U,V)$ 为 syndetic 集. 因此 E 系统是上半 Banach 传递系统. 现在我们能证明

定理 7.5.8 设 (X,T) 为动力系统. 如果 (X,T) 为非极小的上半 Banach 传递系统, 则 $SE(X,T) \neq \varnothing$, 即 (X,T) 不为 null 系统.

证明 不失一般性, 不妨设 (X,T) 有不动点 p (使用命题 7.4.3). 任取 (X,T) 的传递点 x_1, 以下说明 $(x_1, p) \in SE(X,T)$. 由推论 7.5.7, 只需说明 $(x_1, p) \in \mathrm{WM}(X,T)$. 设 U_1,U_2 分别为 x_1,p 的邻域. 现在有两种可能的情形:

情形 1. (X,T) 为 E 系统. 因 (X,T) 为 E 系统, $N(U_1, U_1)$ 为 syndetic 集 (参见定理 2.6.5). 由于 p 为不动点, $N(x_1, U_2)$ 为 thick 集. 进而 $N(U_1, U_2) = N(x_1, U_2) - N(x_1, U_1)$ 为 thick 集. 结合上面的两个事实, 有 $N(U_1, U_1) \cap N(U_1, U_2) \neq \varnothing$. 从而 $(x_1, p) \in \mathrm{WM}(X,T)$.

情形 2. (X,T) 不为 E 系统. 不妨设 (X,T) 为唯一遍历系统且点测度 δ_p 为唯一的不变测度 (否则我们将所有不变测度的支撑并在一起, 再将这个并的闭包收缩成一点, 这就得到 (X,T) 的一个因子系统, 该因子系统是非极小的上半 Banach 传递的唯一遍历系统, 且唯一的不变测度是集中在不动点上的点测度. 如果该因子系

统有序列熵对, 则 (X,T) 有序列熵对). 有

断言 $N(x_1,U_2)$ 的下半 Banach 密度为 1.

断言的证明 如果断言不成立, 则 $N(x_1,U_2^c)$ 具有正上半 Banach 密度. 因此存在 $k\in\mathbb{N}$ 以及 $a_k<b_k$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{b_k-a_k}|N(x_1,U_2^c)\cap\{a_k,a_k+1,\cdots,b_k-1\}|>0 \text{ 和 } \lim_{k\to+\infty}(b_k-a_k)=+\infty.$$

现在, 设 $\mu_k=\dfrac{1}{b_k-a_k}\sum\limits_{i=a_k}^{b_k-1}\delta_{T^ix_1}$. 设 $\mu=\lim\limits_{i\to+\infty}\mu_{k_i}$ 为 $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 在弱* 拓扑下的极限点. 清楚地, μ 为 (X,T) 的不变测度且

$$\begin{aligned}\mu(U_2^c)\geqslant\lim_{i\to+\infty}\mu_{k_i}(U_2^c)&=\lim_{i\to+\infty}\frac{1}{b_{k_i}-a_{k_i}}\sum_{i=a_{k_i}}^{b_{k_i}-1}\delta_{T^ix_1}(U_2^c)\\&=\lim_{i\to+\infty}\frac{|N(x_1,U_2^c)\cap\{a_{k_i},a_{k_i}+1,\cdots,b_{k_i}-1\}|}{b_{k_i}-a_{k_i}}>0.\end{aligned}$$

从而 $\mu\neq\delta_p$, 这与 (X,T) 的唯一遍历矛盾. 这就完成了断言的证明.

因 (X,T) 为上半 Banach 传递系统, $N(U_1,U_1)$ 具有正上半 Banach 密度. 由断言, $N(x_1,U_2)$ 的下半 Banach 密度为 1, 说明 $N(U_1,U_2)=N(x_1,U_2)-N(x_1,U_1)$ 的下半 Banach 密度也为 1. 从而 $N(U_1,U_1)\cap N(U_1,U_2)\neq\varnothing$. 因此 $(x_1,p)\in\mathrm{WM}(X,T)$. □

在本节最后, 我们提出一个仍未解决的问题:

问题 7.5.9 *是否存在传递非极小的 null 系统?*

习 题 7.5

1. 设 $X=\{x_\infty\}\cup\{x_i:i\in\mathbb{Z}\}$, 其中 $x_\infty\neq x_i, i\in\mathbb{Z}, x_i\neq x_j,\ i\neq j$ 以及 $\lim\limits_{|i|\to+\infty}x_i=x_\infty$. 定义映射 $T:X\to X$, 使得 x_∞ 为不动点且 $T(x_i)=x_{i+1}$, $i\in\mathbb{Z}$. 证明: (X,T) 为 null 系统. 特别地, 如果非游荡点集 $\Omega(T)$ 为独点集, 则 (X,T) 为 null 系统.

2. 设 (X,T) 是一个非平凡的传递系统. 如果存在 (X,T) 的子系统 (Y,T), 使得 (X,T) 弱不交于 (Y,T), 则 $(X\times Y,T\times T)$ 的传递点 $(x,y)\in SE(X,T)$ 当且仅当 $(x,y)\in\mathrm{WM}(X,T)$.

3. 证明极端扩散系统的最大的 null 因子是平凡系统.

4. 证明引理 7.5.6.

§7.6 极小 null 系统的结构

本节将利用极小同胚系统的结构定理来研究极小 null 系统的结构. 因此本节首先考虑的对象是可逆极小系统, 然后利用自然扩充去考虑一般的极小动力系统.

首先给出一些基本定义. 设 (X,T) 为具有度量 d 的可逆动力系统, 设 (x_1,x_2) 为 X 的点对. 如果存在 $n_i \in \mathbb{Z}$ 满足 $|n_i| \to +\infty$ 以及 $d(T^{n_i}(x_1),T^{n_i}(x_2)) \to 0$, 则称 (x_1,x_2) 为**双边的 proximal 对**; 如果 (x_1,x_2) 不为双边的 proximal 对, 则称 (x_1,x_2) 为**双边的 distal 对**. 设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为可逆动力系统间的因子映射. 如果满足 $\pi(x_1)=\pi(x_2)$ 的点对 (x_1,x_2) 均为双边的 proximal 对 (相应地, 双边的 distal 对), 则称 $\pi: X\to Y$ 为**proximal(相应地, distal)扩充**; 如果存在 X 的一个稠密的 G_δ 集 X_0, 使得对任意 $x\in X_0$ 有 $\pi^{-1}\pi(x)=\{x\}$, 则称 $\pi: X\to Y$ 为**几乎一对一扩充**; 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $\pi(x_1)=\pi(x_2)$, $d(x_1,x_2)<\delta$ 能推出 $d(T^n(x_1),T^n(x_2))<\varepsilon$ 对任意 $n\in\mathbb{Z}$ 成立, 则称 $\pi:X\to Y$ 为**等度连续扩充**(有时也称等度连续扩充为等距扩充). 容易看出, 等距扩充一定为 distal 扩充.

设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为极小可逆系统间的扩充. 如果存在可数序数 η 和极小可逆系统簇 $X_\lambda\,(0\leqslant\lambda\leqslant\eta)$, 使得 (i) $X_0=Y$, $X_\eta=X$; (ii) 对每个 $\lambda<\eta$, 存在扩充 $\pi_\lambda: X_{\lambda+1}\to X_\lambda$, 使得 π_λ 或为几乎一对一扩充或为等距扩充; (iii) 对每个极限序数 $\nu\leqslant\eta$, 系统 X_ν 为系统 $X_\lambda\,(\lambda<\nu)$ 的逆极限系统; (iv) π 为扩充 $\phi_\lambda(\lambda<\eta)$ 的超限复合. 就称扩充 π 为**严格的 HPI 扩充**. 进而, 极小系统间的扩充 $\pi:X\to Y$ 称为**HPI 扩充**, 如果存在极小系统间的几乎一对一扩充 $\psi:Z\to X$, 使得 $\pi\circ\psi:Z\to Y$ 为严格的 HPI 扩充.

命题 7.6.1　*设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为极小可逆系统间的扩充. 如果 π 既为 proximal 扩充又为 HPI 扩充, 则 π 为几乎一对一的扩充.*

证明　由于 π 为 HPI 扩充, 存在极小系统间的几乎一对一扩充 $\psi:Z\to X$, 使得 $\pi\circ\psi:Z\to Y$ 为严格的 HPI 扩充. 进而存在可数序数 η 和极小可逆系统簇 $X_\lambda\,(0\leqslant\lambda\leqslant\eta)$, 使得 (i) $X_0=Y$, $X_\eta=Z$; (ii) 对每个 $\lambda<\eta$, 存在扩充 $\pi_\lambda:X_{\lambda+1}\to X_\lambda$, 使得 π_λ 或为几乎一对一扩充或为等距扩充; (iii) 对每个极限序数 $\nu\leqslant\eta$, 系统 X_ν 为系统 $X_\lambda\,(\lambda<\nu)$ 的逆极限系统; (iv) $\pi\circ\psi$ 为扩充 $\phi_\lambda(\lambda<\eta)$ 的超限复合.

现在, 我们说明对每个 $\lambda<\eta$, 扩充 $\pi_\lambda:X_{\lambda+1}\to X_\lambda$ 为几乎一对一扩充. 如若不然, 假设存在 $\theta<\eta$, 使得 $\pi_\theta:X_{\theta+1}\to X_\theta$ 为非同构的等距扩充, 这样我们能找到 $x,y\in X_{\theta+1}$, 使得 $\pi_\theta(x)=\pi_\theta(y)$ 且 (x,y) 为双边的 distal 点对. 设 $\pi':Z\to X_{\theta+1}$ 为扩充 $\phi_\lambda(\theta+1\leqslant\lambda<\eta)$ 的超限复合. 任取 $x'\in{\pi'}^{-1}(x)$, $y'\in{\pi'}^{-1}(y)$, 则 (x',y') 为 distal 点对且 $\pi\circ\psi(x')=\pi\circ\psi(y')$. 但另一方面, 由于两个 proximal 扩充复合后仍为 proximal 扩充, 从而 $\pi\circ\psi$ 为 proximal 扩充. 特别地, (x',y') 为双边的 proximal 点对, 这与 (x',y') 为双边的 distal 点对矛盾.

由于几乎一对一扩充的可数超限复合仍为几乎一对一扩充, 从而 $\pi\circ\psi$ 为几乎一对一扩充. 又因 ψ 为几乎一对一扩充, 所以 π 为几乎一对一扩充. □

为进一步研究极小 null 系统的结构, 需要去考虑对于极小系统什么时候一个弱混合对能成为序列熵对. 首先有

引理 7.6.2 设 $\pi:(X,T)\to(Y,T)$ 为极小可逆系统间的扩充, $x_1,x_2\in X$ 满足 $x_1\neq x_2$, $\pi(x_1)=\pi(x_2)$. 如果 (x_1,x_2) 为乘积空间的极小点, 则 $(x_1,x_2)\in SE(X,T)$ 当且仅当 $(x_1,x_2)\in \mathrm{WM}(X,T)$.

证明 设 $A=\overline{\mathrm{orb}((x_1,x_2),T\times T)}$, 首先说明 $\pi_1:A\to X$ 为半开的. 设 U 为 A 的非空开集, 取 A 的非空开集 U_1, 使得 $\overline{U_1}\subset U$. 因 $(A,T\times T)$ 为极小系统, 所以存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $\bigcup_{i=0}^{k}(T\times T)^iU_1=A$. 进而 $\bigcup_{i=0}^{k}T^i\pi_1(\overline{U_1})=X$, 因 T 为同胚以及 $\pi_1(\overline{U_1})$ 为闭集. 由 Baire 定理知 $\mathrm{int}(\pi_1(\overline{U_1}))\neq\varnothing$. 进而 $\mathrm{int}(\pi_1(U))\neq\varnothing$. 这就说明 π 为半开的. 最后, 由引理 7.5.6 知, $(x_1,x_2)\in SE(X,T)$ 当且仅当 $(x_1,x_2)\in\mathrm{WM}(X,T)$. □

注记 7.6.3 完全类似地, 我们可以证明极小系统间的同态为半开的.

推论 7.6.4 设 $\pi:(X,T)\to(Y,T)$ 为极小可逆系统间的 distal 扩充, $x_1,x_2\in X$ 满足 $x_1\neq x_2$, $\pi(x_1)=\pi(x_2)$. 则 $(x_1,x_2)\in SE(X,T)$ 当且仅当 $(x_1,x_2)\in\mathrm{WM}(X,T)$.

证明 由引理 7.6.2, 只需说明 (x_1,x_2) 为乘积空间的极小点. 设 $\mathcal{E}(X,T)$ 为系统 (X,T) 的 Ellis 半群, $I\subset\mathcal{E}(X,T)$ 为 $\mathcal{E}(X,T)$ 的极小左理想. 由于 x_1 为极小点, 根据命题 3.3.13, 存在极小幂等元 $u\in I$, 使得 $ux_1=x_1$. 注意到 (x_2,ux_2) 为双边的 proxiaml 对且 $\pi(x_2)=\pi(x_1)=\pi(ux_1)=\pi(ux_2)$ 以及 π 为 distal 扩充, 有 $x_2=ux_2$, 即 $u(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$. 从而 (x_1,x_2) 为 $(X\times X,T\times T)$ 的极小点. □

推论 7.6.5 如果 (X,T) 为极小 distal 系统, 则 $SE(X,T)=Q(X,T)\setminus\Delta_X$, 这里 $Q(X,T)$ 为 (X,T) 的局部 proxiaml 关系.

证明 因 (X,T) 为 distal 系统, 从而 T 可逆且 $\pi:X\to Y$ 为 distal 扩充, 其中 (Y,S) 为平凡系统. 因此, 由定理 3.5.9 和推论 7.6.4 知 $SE(X,T)=\mathrm{WM}(X,T)=Q(X,T)\setminus\Delta_X$. □

有了以上准备, 现在我们可以证明本节的主要结果:

定理 7.6.6 设 (X,T) 为极小 null 的可逆系统. 则 (X,T) 为一个极小等度连续系统的几乎一对一扩充, 即**几乎自守系统**.

证明 设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为 (X,T) 的最大等度连续因子. 如果令 $R_\pi=\{(x,y)\in X\times X:\pi(x)=\pi(y)\}$, 则 $R_\pi=Q(X,T)=\mathrm{WM}(X,T)\cup\Delta_X$. 对 $(x_1,x_2)\in R_\pi\setminus\Delta_X$, 由于 $(x_1,x_2)\in\mathrm{WM}(X,T)$ 但 $(x_1,x_2)\notin SE(X,T)$, 有 (x_1,x_2) 不为乘积空间的极小点. 因此 Δ_X 为系统 $(R_\pi,T\times T)$ 唯一的极小集, 从而 $R_\pi\subset PR(X,T)$. 即 π 为 proximal 扩充.

以下说明 $\pi:X\to Y$ 为 HPI 扩充. 如果 $\pi:X\to Y$ 不为 HPI 扩充, 由 Woude 的一个结果 (参见定理 3.6.7(2)) 知, 存在 $A\subset R_\pi$, 使得 $(A,T\times T)$ 为 (X,T) 的双边传递的非极小子系统, 且向两个坐标的投影映射 $\pi_i:A\to X, i=1,2$ 为半开的. 因 $(A,T\times T)$ 为双边传递的, 从而存在 $(x_1,x_2)\in A, x_1\neq x_2$, 使得 $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_{\mathbb{Z}}((x_1,x_2),T\times T))=A$.

注意到 $(x_1,x_2)\in PR(X,T)\setminus\Delta_X\subseteq \mathrm{WM}(X,T)$, 由引理 7.5.6 知 $(x_1,x_2)\in SE(X,T)$, 这与 (X,T) 为 null 系统相矛盾.

现在, 由于 π 即为 proximal 扩充又为 HPI 扩充, 从命题 7.6.1 知 π 为几乎一对一的扩充. □

由于几乎自守系统也可能具有正熵, 所以极小 null 性严格介于极小等度连续性和几乎自守性之间. 下面的引理使我们对极小 null 的可逆系统的结构能说得更多.

定理 7.6.7　设 (X,T) 为极小 null 的可逆系统, 则 (X,T) 为唯一遍历系统.

证明　由定理 7.6.6 知, 存在极小等度连续系统 (Y,S) 满足 $\pi: X\to Y$ 为几乎一对一扩充. 设 ν 为 (Y,S) 唯一的不变测度. 任取 (X,T) 的不变测度 μ, 设 $\mu=\int_Y \mu_y \mathrm{d}\nu(y)$ 是 μ 在 ν 上测度分解. 则对 ν-a.e. $y\in Y$, μ_y 是 X 上的 Borel 测度且 $\mathrm{supp}(\mu_y)\subset\pi^{-1}(y)$, 有

断言　对 ν-a.e. $y\in Y$, μ_y 是集中在一个点的点测度.

断言的证明　设 $W=\{(x,y)\in X\times X:\pi(x)=\pi(y)\}$. 因对 ν-a.e. $y\in Y$ 有 $\mathrm{supp}(\mu_y)\subseteq\pi^{-1}(y)$, 所以对 ν-a.e. $y\in Y$ 而言, $\mathrm{supp}(\mu_y\times\mu_y)\subset\pi^{-1}(y)\times\pi^{-1}(y)\subset W$. 从而

$$\mu\times_Y\mu(W)=\int_{y\in Y}\mu_y\times\mu_y(W)\mathrm{d}\nu=1.$$

如果 $\mu\times_Y\mu(\Delta_X)\neq 1$, 则 $\mu\times_Y\mu(W\setminus\Delta_X)>0$. 因此存在 $(W,T\times T)$ 的遍历测度 w, 使得 $w(W\setminus\Delta_X)>0$. 由于 Δ_X 为 $(W,T\times T)$ 唯一的极小集, 所以 $\mathrm{supp}(w)$ 为非极小的 E 系统. 由定理 7.5.8 知 $SE(\mathrm{supp}(w),T\times T)\neq\varnothing$, 这与 $(X\times X,T\times T)$ 为 null 系统相矛盾. 这就说明 $\mu\times_Y\mu(\Delta_X)=1$. 注意到

$$\mu\times_Y\mu(\Delta_X)=\int_{y\in Y}\mu_y\times\mu_y(\Delta_X)\mathrm{d}\nu=1,$$

有 $\mu_y\times\mu_y(\Delta_X)=1$, ν-a.e. $y\in Y$. 这蕴含着对 ν-a.e. $y\in Y$ 而言 μ_y 是集中在一个点 $c(y)$ 的点测度 $\delta_{c(y)}$. 断言得证.

现在说明 (X,T) 为唯一遍历的. 假设 μ^1, μ^2 为 (X,T) 的两个不变测度. 令 $\mu=\dfrac{1}{2}(\mu^1+\mu^2)$. 从断言知 μ_y^i 为集中在一个点 $c^i(y)$, ν-a.e. $y\in Y$. 从而对 ν-a.e. $y\in Y$ 而言 μ_y 集中在点 $c^1(y)$, $c^2(y)$ 上. 再次运用断言知 $c^1(y)=c^2(y)$, ν-a.e. $y\in Y$. 这说明 $\mu^1=\mu^2$. 这就证明了 (X,T) 为唯一遍历的. □

在本节的最后, 我们说明对一般的极小 null 系统也有类似结构. 为此, 我们需要给出动力系统和其自然扩充之间序列熵的关系以及另外一些性质的几个引理.

引理 7.6.8　设 (X,T) 为满足 T 为满射的动力系统及 $\pi_1:(\widetilde{X},\widetilde{T})\to(X,T)$ 为其自然扩充. 则对任意非负整数序列 S, 有 $h_{\mathrm{top}}^S(T)=h_{\mathrm{top}}^S(\widetilde{T})$.

证明 设 $\pi_k:\widetilde{X}\to X$ 为向第 k 个坐标的投影. 取 X 的开覆盖序列 $\mathcal{U}_n$ 满足 $\mathrm{diam}(\mathcal{U}_n)\to 0$, 则 $\{\pi_k^{-1}\mathcal{U}_n\}_{n,k=1}^{\infty}$ 为直径趋于零的开覆盖序列, 当 $n,k\to+\infty$. 因 $h_{\mathrm{top}}^S(T,\mathcal{U}_n)=h_{\mathrm{top}}^S(\widetilde{T},\pi_k^{-1}\mathcal{U}_n)$. 令 $n,k\to\infty$, 由命题 7.3.1 知 $h_{\mathrm{top}}^S(T)=h_{\mathrm{top}}^S(\widetilde{T})$. □

引理 7.6.9 *设 X,Y 为紧度量空间以及 $\pi:X\to Y$ 为连续满射. 则由 $x\mapsto \mathrm{diam}(\pi^{-1}(x))$ 定义的映射 $\phi:X\to[0,\mathrm{diam}(X)]$ 为上半连续映射, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\sup\phi(x)\leqslant\phi(x_0)$ 对每个 $x_0\in X$ 成立. 进而 $A_X=\{x\in X:\pi^{-1}\pi(x)=\{x\}\}$, $A_Y=\{y\in Y:\mathrm{Card}(\pi^{-1}(y))=1\}$ 分别为 X 和 Y 的 G_δ 集. 如果附加 π 是半开的条件, 则 A_X 在 X 中稠密当且仅当 A_Y 在 Y 中稠密.*

证明 设 d 为 X 上与拓扑相容的一个度量. 固定 $x_0\in X$. 取序列 $x_n\to x_0$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}\sup\phi(x)$, 选 $y_n,z_n\in\pi^{-1}(x_n)$, 使得 $d(y_n,z_n)=\phi(x_n)$. 由于 X 为紧度量空间, 存在子列 y_{n_i},z_{n_i} 以及 $y_0,z_0\in X$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}y_{n_i}=y_0$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty}z_{n_i}=z_0$. 显然 $y_0,z_0\in\pi^{-1}(x_0)$ 且 $d(y_0,z_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\sup\phi(x)$, 这说明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sup\phi(x)\leqslant\phi(x_0)$.

现在令 $A_Y(k)=\left\{y\in Y:\mathrm{diam}(\pi^{-1}(y))\in\left[0,\dfrac{1}{k}\right)\right\}$, 从映射 ϕ 的上半连续映射知 $A_Y(k)$ 为 Y 的开集, 进而 $A_Y=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_Y(k)$ 和 $A_X=\pi^{-1}(A_Y)$ 为 G_δ 集. 最后, 如果附加 π 是半开的条件, 于是容易看出 A_X 在 X 中稠密当且仅当 A_Y 在 Y 中稠密. □

引理 7.6.10 *设 (X,T) 为极小动力系统及 $\pi_1:(\widetilde{X},\widetilde{T})\to(X,T)$ 为其自然扩充. 则 π_1 为几乎一对一扩充且 $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 为极小系统.*

证明 设 $A=\{x\in X:\mathrm{Card}(T^{-n}(x))=1,\forall n\in\mathbb{N}\}$, 以下证明 A 为 X 的稠密 G_δ 集. 令 $A_{k,n}=\left\{x\in X:\mathrm{diam}(T^{-n}(x))\in\left[0,\dfrac{1}{k}\right)\right\}$, 则从引理 7.6.9 知 $A_{k,n}$ 为开集. 如果 $A_{k,n}$ 不为 X 的稠密子集, 则 $D_{k,n}=X\setminus A_{n,k}$ 具有非空内部. 因此 $T^{-n}D_{k,n}$ 也具有非空内部. 取非空开集 $U\subset T^{-n}D_{k,n}$ 满足 $\mathrm{diam}(U)<\dfrac{1}{k}$. 集合 U 被 $D_{k,n}$ 中某些点在 T^{-n} 下的逆像所覆盖. 由于这些点在 T^{-n} 下的逆像的直径 $\geqslant\dfrac{1}{k}$, 所以不能全被 U 覆盖. 因此 $T^n(U)\subset T^n(X\setminus U)$.

取 $B'=X\setminus U$, 则 B' 为闭集且 $T^n(B')\supset(T^n(U)\cup T^n(B'))=X$. 由于 $B'\neq X$ 和 $T^n(B')=X$, 存在 $l\in\{0,1,\cdots,n-1\}$, 使得 $T^lB'\neq X$ 以及 $T^{l+1}B'=X$. 令 $B=T^lB'$, 则 B 为闭集且满足 $B\neq X$ 和 $T(B)=X$. 定义 $g:B\to X$, 使得 $g=T|_B$, 则 $X=g(B)\supset B$. 进而 $g^{-(k+1)}B\subset g^{-k}(B)$ 对 $k\in\mathbb{Z}_+$, 即 $g^{-k}(B)$ 为 B 递减的闭集序列. 因此, 如果设 $M=\bigcap_{k=0}^{\infty}T^{-k}(B)=\bigcap_{k=0}^{\infty}g^{-k}(B)$, 则 M 为非空闭集. 注意到 $T(M)\subset M$, M 为闭的不变集且 $M\neq X$, 这与 (X,T) 为极小系统相矛盾. 由以上讨论知 $A_{k,n}$ 为 X 的稠密开集, 因此 $A=\bigcap_{k,n=1}^{\infty}A_{k,n}$ 为 X 的稠密的 G_δ 集.

现在说明 $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 为极小系统. 为此, 我们仅需证明每个点 $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ 为传递点. 设 $x=\pi_1(\widetilde{x})$ 和 $\pi_k:\widetilde{X}\to X$ 为向第 k 个坐标的投影. 取 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的可数基, 则

$\{\pi_k^{-1}U_n\}_{n,k=1}^{\infty}$ 为 $\widetilde{X}$ 的可数基. 因 (X,T) 为极小系统, 对每个 U_n, 存在 $m_n \in \mathbb{N}$ 满足 $T^{m_n}(x) \in U_n$. 进而 $\widetilde{T}^{m_n+k}(\widetilde{x}) \in \pi_k^{-1}U_n$. 这就说明 $\widetilde{x}$ 为传递点.

最后, 注意到 $A = \{x \in X : \mathrm{Card}(\pi_1^{-1}(x)) = 1\}$ 为 X 的稠密 G_δ 集以及极小系统间的同态为半开的, 因此, 从引理 7.6.9 知, $\{\widetilde{x} \in \widetilde{X} : \widetilde{T}^{-1}\widetilde{T}(\widetilde{x}) = \{\widetilde{x}\}\}$ 为 $\widetilde{X}$ 的稠密 G_δ 集, 即 π_1 为几乎一对一扩充. □

定理 7.6.11　*设 (X,T) 为极小 null 系统. 则 (X,T) 为唯一遍历系统并且是一个极小等度连续系统的几乎一对一扩充.*

证明　设 $\pi_1 : (\widetilde{X},\widetilde{T}) \to (X,T)$ 为 (X,T) 的自然扩充. 由以上引理 7.6.9 和引理 7.6.10 知, $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 也为极小 null 系统且 π_1 为几乎一对一扩充. 定理 7.6.7 告诉我们 $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 为唯一遍历系统, 再注意到 (X,T) 的每个不变测度为 $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 的某个不变测度在 π_1 下的像, 有 (X,T) 为唯一遍历系统.

设 $\pi : (\widetilde{X},\widetilde{T}) \to (Y,S)$ 为 $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 的最大等度连续因子. 因 π_1 为渐近扩充以及 $PR(\widetilde{X},\widetilde{T}) = R_\pi$, 因此 $\pi(\pi_1^{-1}(x))$ 为独点集. 我们将其定义为 $\varphi(x)$. 不难看出 $\varphi : (X,T) \to (Y,S)$ 为因子映射且 $\{y \in Y : \mathrm{Card}(\varphi^{-1}(y)) = 1\} \supset \{y \in Y : \mathrm{Card}(\pi^{-1}(y)) = 1\}$. 由于 π 为几乎一对一扩充, $\{y \in Y : \mathrm{Card}(\pi^{-1}(y)) = 1\}$ 为 Y 的稠密 G_δ 集, 进而 $\{y \in Y : \mathrm{Card}(\varphi^{-1}(y)) = 1\}$ 为 Y 的稠密 G_δ 集. 最后, 由于极小系统间的同态为半开的 (参见注记 7.6.3), 从引理 7.6.9 知 φ 为几乎一对一扩充. □

问题 7.6.12　*是否能获得极小 null 系统更为精细的结构?*

习　题　7.6

1. 证明极小系统的几乎一对一扩充仍为极小系统.

2. 设 (X,T) 为极小系统, A 为 X 的稠密 G_δ 集. 证明: $T(A), T^{-1}(A)$ 均包含了 X 的一个稠密 G_δ 集.

3. 设 $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ 为极小系统间的渐近扩充. 则 π 为几乎一对一扩充. 提示: 使用定理 3.6.7(2).

4. 是否 null 的 distal 系统一定为等度连续系统?

§7.7　附录: Koopman-von Neumann 谱混合定理的证明

本附录的目的是给出 Koopman-von Neumann 谱混合定理的证明, 为此, 首先简要介绍一些谱理论的基本知识. 在本附录中出现的 Hilbert 空间均假设为可分的.

定义 7.7.1　*函数 $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 称为**正定的**, 如果对每个有限的复数序列 $\{a_n\}_{n=0}^N$, 有*

$$\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} a_m\overline{a_n}\phi(m-n) \geqslant 0.$$

给出两个正定的函数的例子：

(1) 设 U 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子和 $x \in \mathcal{H}$. 因对每个有限的复数序列 $\{a_n\}_{n=0}^N$, 有

$$\sum_{n,m=0}^{N} \langle U^{m-n}x, x\rangle a_m \overline{a_n} = \left\langle \sum_{n=0}^{N} a_n U^n x, \sum_{m=0}^{N} a_m U^m x \right\rangle \geqslant 0,$$

函数 $\phi(n) = \langle U^n x, x\rangle$ 是正定的.

(2) 设 μ 为 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上的非负 Borel 有限测度, 该测度的 Fourier 变换：函数 $\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} z^n \mathrm{d}\mu(z)$ 是正定的.

上面例 (2) 的逆命题也是成立的, 这就是著名的 Herglotz 定理.

定理 7.7.2 (Herglotz 定理) *对给定正定函数 $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, 存在 $\mathbb{T}$ 上唯一的非负 Borel 有限测度 μ, 使得 $\widehat{\mu}(n) = \phi(n), \forall n \in \mathbb{Z}$.*

证明 由于 ϕ 为正定函数, 不难看出, $\phi(0) \geqslant 0$ 以及对每个 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(1 + |\lambda|^2)\phi(0) + \phi(n)\lambda + \phi(-n)\overline{\lambda} \geqslant 0.$$

因此, 对每个 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有 $\phi(n)\lambda + \phi(-n)\overline{\lambda}$ 为实数, 这说明 $\phi(-n) = \overline{\phi(n)}$. 令 $\lambda = \theta\overline{\phi(n)}$, 我们获得 $(1 + |\theta|^2|\phi(n)|^2)\phi(0) + \theta|\phi(n)|^2 + \overline{\theta}|\phi(n)|^2 \geqslant 0$ 对每个 $\theta \in \mathbb{C}$ 成立.

特别地, 当 θ 为实数时, 上式表明 $(1 + \theta^2|\phi(n)|^2)\phi(0) + 2\theta|\phi(n)|^2 \geqslant 0$ 对全体实数 θ 成立, 由此可推得 $|\phi(n)| \leqslant \phi(0), \forall n \in \mathbb{Z}$. 这说明函数 $\phi(n)$ 是有界的. 如果 $\phi(0) = 0$, 则 $\phi(n) \equiv 0$, 此时唯一非负测度为在每个 Borel 集上取零值的测度.

以下设 $\phi(0) > 0$, 不失一般性, 不妨设 $\phi(0) = 1$. 对 $s \in (0, 1)$, 从正定性可以推出对所有 $|z| = 1$, 有 $f_s(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \phi(n-m)s^{n+m}z^{m-n} \geqslant 0$. 注意到

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \phi(m-n)s^{n+m}z^{n-m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(n)z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} s^{|n|+2m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(n)z^{-n}s^{|n|}\frac{1}{1-s^2}.$$

因此

$$\int_{\mathbb{T}} f_s(z)z^{-n}\mathrm{d}z = \frac{\phi(-n)s^{|n|}}{1-s^2}. \tag{7.7.1}$$

现在定义 $\mathbb{T}$ 上的非负 Borel 测度 μ_s, 使得 $\dfrac{\mathrm{d}\mu_s}{\mathrm{d}z} = (1-s^2)f_s(z) \geqslant 0$. 由等式 (7.7.1) 知

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-n}\mathrm{d}\mu_s = \phi(-n)s^{|n|}, \quad \mu_s(\mathbb{T}) = \phi(0) = 1, \tag{7.7.2}$$

这说明 $\mu_s \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, 这里 $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ 为 $\mathbb{T}$ 上 Borel 概率测度全体.

选择序列 $s_m \to 1(0 < s_m < 1)$, 使得 $\mu_{s_m} \to \mu$ 在 $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ 的弱 * 拓扑意义下成立. 在等式 (7.7.2) 中取 $s = s_m$, 再令 $m \to \infty$, 有 $\widehat{\mu}(n) = \phi(n), \forall n \in \mathbb{Z}$. 至此, 定理的存在性部分得证.

以下说明唯一性, 设 ν 为 $\mathbb{T}$ 上使得 $\widehat{\nu}(n) = \phi(n), \forall n \in \mathbb{Z}$ 非负的有限 Borel 测度. 则对 $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ 的任意有限的线性组合 $p(z)$, 有 $\int_{\mathbb{T}} p(z)\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{T}} p(z)\mathrm{d}\mu$. 因如此的函数在 $C(\mathbb{T};\mathbb{C})$ 中稠密, 所以 $\int_{\mathbb{T}} f(z)\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{T}} f(z)\mathrm{d}\mu$ 对所有 $f \in C(\mathbb{T};\mathbb{C})$ 成立, 这就说明 $\nu = \mu$. □

设 U 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子和 $x \in \mathcal{H}$. 用 $Z(x)$ 表示由 x 生成的循环子空间, 即 $Z(x)$ 是 $\mathcal{H}$ 的包含 $\{U^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ 的最小的闭子空间. 因函数 $\phi(n) = \langle U^n x, x\rangle$ 是正定的, 由 Herglotz 定理知, 存在 $\mathbb{T}$ 上唯一的非负 Borel 测度 σ_x, 使得 $\widehat{\sigma_x}(n) = \langle U^n x, x\rangle, \forall n \in \mathbb{Z}$. 特别地, $\sigma_x(\mathbb{T}) = \widehat{\sigma_x}(0) = \int_{\mathbb{T}} 1\mathrm{d}\sigma_x = \langle x, x\rangle = ||x||^2$. 称 σ_x 为 x(相对于 U) 的**谱测度**. 不难看出, $x = 0$ 当且仅当 σ_x 为零测度.

命题 7.7.3 设 U 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子和 $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. 定义

$$V : L^2(\mathbb{T}, \sigma_x) \to L^2(\mathbb{T}, \sigma_x), \text{使得} Vf(z) = zf(z) \ (z \in \mathbb{T}),$$

则 V 为酉算子且 $W_x^{-1} V W_x = U$, 其中 $W_x : Z(x) \to L^2(\mathbb{T}, \sigma_x)$ 为映射 $U^n x \mapsto z^n \in L^2(\mathbb{T}, \sigma_x)$ 的唯一线性等距扩张.

证明 如果 $p(z) = \sum_{j=-m}^{m} a_j z^j$ 和 $q(z) = \sum_{l=-n}^{n} b_l z^l$ 为三角多项式, 则

$$\begin{aligned}\langle p(U)x, q(U)x\rangle_{Z(x)} &= \sum_{j=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} a_j \overline{b_l} \langle U^{j-l} x, x\rangle_{Z(x)} = \sum_{j=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} a_j \overline{b_l} \widehat{\sigma_x}(j-l) \\ &= \sum_{j=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} a_j \overline{b_l} \int_{\mathbb{T}} z^{j-l} \mathrm{d}\sigma_x = \langle p(z), q(z)\rangle_{L^2(\mathbb{T},\sigma_x)}.\end{aligned}$$

因为形如 $p(U)x$ 的向量在 $Z(x)$ 中稠密, 与此同时, 三角多项式 $p(z)$ 在 $L^2(\mathbb{T}, \sigma_x)$ 中稠密, 这就完成了证明. □

命题 7.7.4 设 U 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子和 $x \in \mathcal{H}$.

(1) 设 μ 为 $\mathbb{T}$ 上非负的有限 Borel 测度, 如果 $\mu \leqslant \sigma_x$, 则存在 $y \in Z(x)$, 使得 $\sigma_y = \mu$;

(2) 设 $y \in \mathcal{H}$, 如果 $Z(y) \perp Z(x)$, 则 $\sigma_{x+y} = \sigma_x + \sigma_y$.

证明 (1) 如果 σ_x 为零测度, 这是明显的. 以下假设 σ_x 不为零测度, 即 $x \neq 0$. 设 $f = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma_x}}$, 则 $f \in L^2(\mathbb{T}, \sigma_x)$. 取 $y = W_x^{-1} f$, 其中 W_x 如命题 7.7.3 所定义. 则

$y \in Z(x)$ 且

$$\widehat{\sigma_y}(n) = \langle U^n y, y \rangle_{Z(x)} = \langle W_x U^n y, W_x y \rangle_{L^2(\mathbb{T},\sigma_x)}$$
$$= \langle V^n f, f \rangle_{L^2(\mathbb{T},\sigma_x)} = \int_{\mathbb{T}} z^n \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma_x} \mathrm{d}\sigma_x = \widehat{\mu}(n).$$

这说明 $\sigma_y = \mu$.

(2) 设 $y \in \mathcal{H}$, 如果 $Z(y) \perp Z(x)$, 则

$$\widehat{\sigma_{x+y}}(n) = \langle U^n(x+y), x+y \rangle = \langle U^n x, x \rangle + \langle U^n y, y \rangle = \widehat{\sigma_x + \sigma_y}(n).$$

现在由 Herglotz 定理知 $\sigma_{x+y} = \sigma_x + \sigma_y$. □

设 U 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子. $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ 称**特征向量**, 如果存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $Ux = \lambda x$. 此时, λ 称为**相对于 x 的特征值**. 不难看出, U 的每个特征值模为 1 且对应于两个不同特征值的特征向量彼此正交. 用 $\mathcal{H}_d$ 表示 $\mathcal{H}$ 的所有特征向量线性组合的闭包, $\mathcal{H}_d$ 为 $\mathcal{H}$ 的子空间, 称为 $\mathcal{H}$ 的**离散谱空间**. 显然 $U\mathcal{H}_d = \mathcal{H}_d$ 和 $U\mathcal{H}_d^{\perp} = \mathcal{H}_d^{\perp}$.

设 μ 为 $\mathbb{T}$ 上的正的 Borel 测度, 如果存在 $\mathbb{T}$ 的可数子集 A 满足 $\mu(\mathbb{T} \setminus A) = 0$, 则称 μ **是纯原子的**; 如果对每个点 $z \in \mathbb{T}$, 有 $\mu(\{z\}) = 0$, 则称 μ **是连续的**.

命题 7.7.5 设 U 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子, $\mathcal{H}_d$ 为 $\mathcal{H}$ 的离散谱空间. 则

(1) 对 $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $x \in \mathcal{H}_d$ 当且仅当 σ_x 为纯原子的;

(2) 对 $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $x \in \mathcal{H}_d^{\perp}$ 当且仅当 σ_x 为连续的.

证明 (i) 首先, 我们说明如果 $x \in \mathcal{H}_d$, 则 σ_x 为纯原子的.

设 $x \in \mathcal{H}_d$, 则 x 可以写为 $x = \sum\limits_{i \in I} a(i) x_i$, 其中 I 为可数集, $a(i) \in \mathbb{C}$, x_i 为具有特征值 λ_i 的特征向量且 $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ 当 $i \neq j \in I$, 以及 $\sum\limits_{i \in I} |a(i)|^2 ||x_i||^2 < +\infty$. 因此 $U^n x = \sum\limits_{i \in I} a(i) \lambda_i^n x_i$ 以及

$$\int_{\mathbb{T}} z^n \mathrm{d}\sigma_x(z) = \langle U^n x, x \rangle = \sum_{i \in I} |a(i)|^2 \lambda_i^n ||x_i||^2.$$

这样由 Herglotz 定理可得 $\sigma_x = \sum\limits_{i \in I} |a(i)|^2 ||x_i||^2 \delta_{\lambda_i}$, 其中 $\delta_z, z \in \mathbb{T}$ 表示集中在 z 上的点测度 (即对 $\mathbb{T}$ 的每个 Borel 集 A, 如果 $z \in A$ 则 $\delta_z(A) = 1$, 否则 $\delta_z(A) = 0$). 这样 σ_x 是为纯原子的.

(ii) 其次, 如果 $x \in \mathcal{H}_d^{\perp}$, 则 σ_x 为连续的. 如若不然, 存在 $\lambda \in \mathbb{T}$, 使得 $\sigma_x(\{\lambda\}) > 0$, 这说明 $\delta_\lambda \leqslant \sigma_x$, 因此由命题 7.7.4 知, 存在 $y \in Z(x)$, 使得 $\sigma_y = \delta_\lambda$. 易见

$$\langle U^n y, y \rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n \mathrm{d}\delta_\lambda = \lambda^n ||y||^2.$$

进而

$$\begin{aligned}\langle Uy-\lambda y, Uy-\lambda y\rangle &= \langle Uy, Uy\rangle - \lambda\overline{\langle Uy, y\rangle} - \overline{\lambda}\langle Uy, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= 2\langle y, y\rangle - 2\langle y, y\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

即 $Uy = \lambda y$. 于是 $y \in \mathcal{H}_d \cap Z(x) \subset \mathcal{H}_d \cap \mathcal{H}_d^{\perp} = \{0\}$. 因此 $y = 0$, 这与 $\sigma_y = \delta_\lambda$ 不为零测度相矛盾.

(iii) 设 $x \in \mathcal{H}$, 则存在 $x_d \in \mathcal{H}_d, x_c \in \mathcal{H}_d^{\perp}$, 使得 $x = x_d + x_c$. 由于 $Z(x_d) \perp Z(x_c)$, 从命题 7.7.4 的性质 (2) 知 $\sigma_x = \sigma_{x_d} + \sigma_{x_c}$. 现在, 由上面的 (i) 和 (ii) 知: 如果 $x_d \neq 0$, 则 σ_{x_d} 为纯原子的; 如果 $x_c \neq 0$, 则 σ_{x_c} 为连续的.

因此, 如果 σ_x 为纯原子的, 则 σ_{x_c} 为零测度, 即 $x_c = 0$ 和 $x = x_d \in \mathcal{H}_d$; 同理, 如果 σ_x 为连续的, 则 $x \in \mathcal{H}_d^{\perp}$. 这就完成了命题的证明. □

注记 7.7.6 从 (ii) 的证明可以看出, x 为以 λ 为特征值的特征向量当且仅当 $\sigma_x = ||x||^2\delta_\lambda$.

定理 7.7.7 (Wiener 定理) 设 U 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子, $\mathcal{H}_d$ 为 $\mathcal{H}$ 的离散谱空间和 $x \in \mathcal{H}$. 则以下陈述彼此等价:

(1) $x \in \mathcal{H}_d^{\perp}$;

(2) $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} |\langle U^n x, x\rangle|^2 = 0$;

(3) 对每个 $y \in \mathcal{H}$, $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} |\langle U^n x, y\rangle|^2 = 0$;

(4) 存在 $S \subset \mathbb{Z}_+, d(S) = 1$, 使得对每个 $y \in \mathcal{H}$, $\lim\limits_{n\to+\infty, n\in S} \langle U^n x, y\rangle = 0$.

证明　(4) ⇒ (3) ⇒ (2) 是明显成立的.

(2) ⇔ (1) 首先, 对每个 $z \in \mathbb{T}$, 有 $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} z^n = \delta_1(\{z\})$. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\langle U^n x, x\rangle|^2 &= \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(z_1\overline{z_2})^n \mathrm{d}\sigma_x\times\sigma_x(z_1,z_2) \\ &= \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}\delta_1(\{z_1\overline{z_2}\})\mathrm{d}\sigma_x\times\sigma_x(z_1,z_2) \\ &= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\delta_1(\{z_1\overline{z_2}\})\mathrm{d}\sigma_x(z_1)\mathrm{d}\sigma_x(z_2) \\ &= \int_{\mathbb{T}}\sigma_x(\{z_2\})\mathrm{d}\sigma_x(z_2). \end{aligned} \tag{7.7.3}$$

这就说明 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}|\langle U^n x,x\rangle|^2=0$ 当且仅当 $\sigma_x(\{z_2\})=0$ 对每个 $z_2\in\mathbb{T}$ 成立，即 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (4) 假设 (2) 成立. 令

$$\mathcal{H}_x=\left\{y\in\mathcal{H}:\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|\langle U^n x,y\rangle|^2=0\right\}.$$

则容易看出 $\mathcal{H}_x$ 为 $\mathcal{H}$ 的 U 不变的闭子空间. 因 $x\in\mathcal{H}_x$, $Z(x)\subseteq\mathcal{H}_x$. 显然 $Z(x)^\perp\subset\mathcal{H}_x$. 这说明 $\mathcal{H}_x=\mathcal{H}$.

由于 $\mathcal{H}$ 为可分空间, 取 $\mathcal{H}$ 的可数稠密子集 $\{y_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$. 令 $y_j=\frac{y_j'}{||y_j'||}$, 如果 $y_j'\neq 0$, 否则令 $y_j=0$. 设

$$a_n=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}|\langle U^n x,y_j\rangle|^2,\quad \forall n\in\mathbb{Z}_+.$$

因 $\mathcal{H}_x=\mathcal{H}$, $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N-1}|a_n|=0$. 现在利用引理 2.3.2 知, 存在 $S\subset\mathbb{Z}_+,d(S)=1$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty,n\in S}a_n=0$. 通过简单的逼近讨论, 便可获得 (4). □

设 U 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子, 我们把满足 $\overline{\{U^n x:n\in\mathbb{Z}\}}$ 为 $\mathcal{H}$ 的紧子集的向量 x 称为**几乎周期向量**, 用 $\mathcal{H}_c$ 表示 $\mathcal{H}$ 的全体几乎周期向量. 注意到两个几乎周期向量的线性组合仍为几乎周期向量, 不难说明 $\mathcal{H}_c$ 为 $\mathcal{H}$ 的闭子空间. 显然, 特征向量为几乎周期向量, 进而 $\mathcal{H}_d\subseteq\mathcal{H}_c$. 事实上, 以下定理说明相反的包含关系也是成立的.

定理 7.7.8 设 U 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子. 则 $\mathcal{H}_c=\mathcal{H}_d$.

证明 只需证明 $\mathcal{H}_c\subseteq\mathcal{H}_d$. 任取 $x\in\mathcal{H}_c$, 将 x 分解为 $x=x_1+x_2$ 满足 $x_1\in\mathcal{H}_d\subseteq\mathcal{H}_c$ 和 $x_2\in\mathcal{H}_d^\perp$. 显然也有 $x_2=x-x_1\in\mathcal{H}_c$. 如果我们能说明 $x_2=0$, 则 $x=x_1\in\mathcal{H}_d$, 这就完成了证明.

如果 $x_2\neq 0$, 则 $\varepsilon=\frac{||x_2||}{2}>0$. 因 $\overline{\{U^n x_2:n\in\mathbb{Z}\}}$ 为 $\mathcal{H}$ 的紧子集, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对每个 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\min_{k\in\{0,1,\cdots,N\}}||U^n x_2-U^k x_2||<\varepsilon. \tag{7.7.4}$$

进而, 能够找到 $k\in\{0,1,\cdots,N\}$ 使得集合 $F=\{n\in\mathbb{Z}_+:||U^n x_2-U^k x_2||<\varepsilon\}$ 满足 $d_*(F)=\lim\limits_{m\to\infty}\inf\frac{|F\cap[0,m-1]|}{m}>0$.

注意到当 $n \in F$,

$$\begin{aligned}|\langle U^n x_2, U^k x_2\rangle| &= |\langle U^k x_2, U^k x_2\rangle + \langle U^n x_2 - U^k x_2, U^k x_2\rangle| \\ &= |\|x_2\|^2 + \langle U^n x_2 - U^k x_2, U^k x_2\rangle| \\ &\geqslant \|x_2\|^2 - |\langle U^n x_2 - U^n x_2, U^k x_2\rangle| \\ &\geqslant \|x_2\|^2 - \|U^n x_2 - U^k x_2\| \cdot \|U^k x_2\| \\ &\geqslant \|x_2\|^2 - \varepsilon\|x_2\| = \varepsilon\|x_2\|, \end{aligned} \tag{7.7.5}$$

有

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} \sup \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} |\langle U^n x_2, U^k x_2\rangle|^2 \\ \geqslant& \lim_{m\to\infty} \inf \frac{1}{m} \sum_{n\in F\cap[0,m-1]} |\langle U^n x_2, U^k x_2\rangle|^2 \\ \geqslant& \lim_{m\to\infty} \inf \frac{1}{m} \sum_{n\in F\cap[0,m-1]} \varepsilon^2\|x_2\|^2 \quad (由 (7.7.5)) \\ =& d_*(F)\varepsilon^2\|x_2\|^2 > 0. \end{aligned} \tag{7.7.6}$$

这与 $x_2 \in \mathcal{H}_d^{\perp}$ 相矛盾 (参见定理 7.7.7 的性质 (3)). □

设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为可逆保测系统. 在可分的复 Hilbert 空间 $\mathcal{H} = L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上, 定义酉算子 $U_T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, 满足对 $f \in \mathcal{H}$, 有 $U_T(f) = f \circ T$. 设

$$\mathcal{H}_c = \{f \in \mathcal{H} : \overline{\{U_T^n f : n \in \mathbb{Z}\}为\ \mathcal{H}\ 的紧子集}\}.$$

使用定理 7.7.7 和定理 7.7.8 立即可得 Koopman-von Neumann 谱混合定理 —— 定理 7.1.2.

§7.8 注 记

§7.1 的工作取材于黄文、Maass 和叶向东的工作 (Huang etc., 2004). §7.2 和 §7.3 的素材主要来源于黄文、邵松和叶向东的文章 (Huang etc., 2004), 相关主题也可参见文献 (Kushnirenko, 1967; Goodman, 1974; Hulse, 1982, 1986; Saleskil, 1977; Walters, 1982, §4.11) 以及 (Zhang, 1992, 1993) 等. §7.4～ §7.6 的工作来源于文献

(Huang etc., 2004a, 2003). 附录参考和借鉴了以下专著中与谱理论有关的相关章节 (Parry, 1981; Queffélec, 1987; Glasner, 2003).

相关的研究工作正在发展之中, 有关序列熵的刻画见文献 (Huang-Ye, 2007; Kerr-Li, 2007), 与之有关的 Tame 系统和独立集研究见文献 (Glasner, 2006; Huang, 2006; Kerr-Li, 2007; Kerr-Li, 2005).

第 8 章　传递系统的分类

在前面的章节中，我们引入了弱不交和回复时间集的概念，并利用它们刻画了各种各样的传递属性. 这一章将引入复杂性函数的概念，并利用它来刻画各类传递系统. 对传递系统进行分类的研究始于 Furstenberg(1967) 开创性的工作. 最近几年，人们利用回复时间集对传递系统进行了更加广泛的分类. 另外，近年来的工作表明，弱不交性和系统沿着某一子序列的复杂性函数也是处理传递系统分类问题十分有效的方法. 本章将研究传递系统的这三种分类方式以及它们之间深刻的内在联系. 在此过程中我们将发现，动力系统的分类问题与组合数学、调和分析以及拓扑群的一般理论等都有着深刻的联系.

§8.1　复杂性函数和复杂性串

在前面三章中我们已经看到，拓扑熵是一个十分有用的共轭不变量. 对于给定的动力系统，为了定义一个有限开覆盖 $\mathcal{U}$ 的熵，我们考虑 $N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U})$，看它是否随着 n 趋向于无穷而成指数增长. 受此启发，Blanchard, Host 和 Maass(2000) 引入了复杂性函数的概念.

定义 8.1.1　*设 (X,T) 为一个拓扑动力系统，$\mathcal{U}$ 为 X 的一个有限覆盖. 定义 $\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}(\mathcal{U},n) = N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U})$ 为 $\mathcal{U}$ 的***复杂性函数***，并记 $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{C}(\mathcal{U},n)$.*

作为第一个应用，我们用复杂性函数来刻画等度连续性.

定理 8.1.2　*动力系统 (X,T) 为等度连续的当且仅当对于所有的开覆盖 $\mathcal{U}$，$\mathcal{C}(\mathcal{U},n)$ 为有界的.*

证明　首先假设 (X,T) 是等度连续的. 设 $\varepsilon > 0$ 为有限开覆盖 $\mathcal{U}$ 的一个 Lebesgue 数. 由等度连续性，存在 $\varepsilon/2 \geqslant \eta > 0$，使得如果 $d(x,y) < \eta$，那么对所有的 $n \in \mathbb{N}$，均成立 $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon/2$. 选取 $x_1, \cdots, x_k$，使得 $\bigcup_{i=1}^k B_\eta(x_i) = X$. 由等度连续性知，$T^j B_\eta(x_i) \subset B_{\varepsilon/2}(T^j x_i), \forall j \in \mathbb{N}$，进而由 ε 的选取知，存在 $U_{i,j} \in \mathcal{U}$，使得 $B_{\varepsilon/2}(T^j x_i) \subset U_{i,j}$. 因此，对于任意的 n，都有

$$B_\eta(x_i) \subset \bigcap_{0\leqslant j\leqslant n-1} T^{-j} U_{i,j}.$$

上式意味着 $\left\{\bigcap_{0\leqslant j\leqslant n-1} T^{-j}U_{i,j} : 0 < i \leqslant k\right\}$ 形成 $\mathcal{U}_0^{n-1}$ 的一个具有 k 个元素的子覆盖，其中 k 与 n 无关. 这就说明了 $\mathcal{C}(\mathcal{U},n) \leqslant k$.

反之, 假设对于所有的开覆盖 $\mathcal{U}$, $\mathcal{C}\ \{(\mathcal{U},n)\}$ 有界. 如果 T 不为等度连续的, 则存在 $\varepsilon>0$ 和 $x\in X$, 使得对于所有的 $\eta>0$, 都能找到 $y\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $d(x,y)<\eta$ 且 $d(T^nx,T^ny)\geqslant\varepsilon$. 设 $\mathcal{U}$ 为 X 的一个由半径为 $\frac{\varepsilon}{4}$ 的开球组成的有限开覆盖, 并取 $\overline{\mathcal{U}}=\{U_1,\cdots,U_k\}$ 为由 $\mathcal{U}$ 中元素的闭包所形成的覆盖. 显然 $\overline{\mathcal{U}}\preceq\mathcal{U}$, 因此 $\{\mathcal{C}(\overline{\mathcal{U}},n)\}$ 有界. 于是存在 X 的一个有限闭覆盖 $\{X_1,\cdots,X_c\}$, 使得 $X_i=\bigcap_{j=0}^{\infty}T^{-j}U_{i,j}$, $U_{i,j}\in\overline{\mathcal{U}}$(作为习题). 那么由 $\overline{\mathcal{U}}$ 的定义可知, 如果 y 和 z 属于同一个 X_i, 那么 $d(T^jy,T^jz)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\forall j\geqslant 0$.

设 $\eta_n>0$ 趋近于 0. 选取 $y_n\in X$, 使得 $d(x,y_n)<\eta_n$, 并且具有整数 k_n, 使得 $d(T^{k_n}x,T^{k_n}y_n)>\varepsilon$. 通过选取子列, 不妨假设所有的 y_n 属于同一个 X_i. 因此 $x\in X_i$, 因为 X_i 为闭的. 这蕴含了 $d(T^{k_n}x,T^{k_n}y_n)<\varepsilon/2$, 与 k_n 的选取矛盾. □

类似于序列熵, 我们考虑沿着某个给定的 $A\in\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 的复杂性函数. 设 $A=\{a_1<a_2<\cdots\}\in\mathcal{F}_{\text{inf}}$, 定义

$$\mathcal{C}_A(\mathcal{U},n)=N\Big(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-a_i}\mathcal{U}\Big)\ \text{以及}\ \mathcal{C}_A(\mathcal{U})=\lim_{n\to\infty}N\Big(\bigvee_{i=1}^{n}T^{-a_i}\mathcal{U}\Big).$$

易见, 如果 $A_1,A_2\in\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 满足 $A_1\subset A_2$, 那么 $\mathcal{C}_{A_1}(\mathcal{U})=\infty$ 蕴含了 $\mathcal{C}_{A_2}(\mathcal{U})=\infty$.

设 $S\in\mathcal{F}_{\text{inf}}$, 我们首先来定义和研究 S 扩散和 S 等度连续性, 然后再对一个族 $\mathcal{F}$ 引入 $\mathcal{F}$ 扩散的概念. 如此同时, 也将讨论复杂性串的概念.

回忆一下, 一个开覆盖 $\mathcal{U}$ 称为非平凡的, 如果 $\mathcal{U}$ 中的每个元素都不是稠密的; 称它为标准的, 如果它是一个由两个元素构成的非平凡的开覆盖.

定义 8.1.3 设 (X,T) 为一个动力系统, $S\in\mathcal{F}_{\text{inf}}$.

(1) 称 (X,T) 是 S **等度连续的**, 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得只要 $x,y\in X$ 满足 $d(x,y)<\delta$, 那么对所有的 $s_i\in S$, 都成立 $d(T^{s_i}(x),T^{s_i}(y))<\varepsilon$;

(2) 称 (X,T) 是 S **扩散的**, 如果对于 X 的每个非平凡的有限开覆盖 $\mathcal{U}$, 都有 $\mathcal{C}_S(\mathcal{U})=+\infty$;

(3) 设 $\mathcal{F}$ 为一个族, 称 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ **扩散的**, 如果对任意的 $S\in\mathcal{F}$, (X,T) 都是 S 扩散的;

(4) 设 $n\geqslant 2$, 一个 n 串 $(x_i)_1^n\in X^n$ 称为相对于 S 的一个 n **复杂性串**, 如果 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 中至少有两个点不同, 并且当 U_j 为相异的 x_j 的互不相交的闭邻域时, 开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_j^c:1\leqslant j\leqslant n\}$ 满足 $\mathcal{C}_A(\mathcal{U})=+\infty$. 一个 2 串也称为是一个**对**.

用 $\text{Com}_S^n(X,T)$ 表示 (X,T) 的所有相对于 S 的 n 复杂性串的全体, 并记 $\text{Com}_S(X,T)=\text{Com}_S^2(X,T)$. 由定义易有如下性质:

命题 8.1.4 设 (X,T) 为一个动力系统,$S\in\mathcal{F}_{\text{inf}}$. 那么

(1) (X,T) 为 S 扩散的当且仅当对于任意的 $n\geqslant 2$, $\text{Com}_S^n(X,T)=X^n\setminus\Delta_n$;

(2) $\text{Com}_S(X,T)=X^2\setminus\Delta_2$ 当且仅当对于每个标准开覆盖 $\mathcal{U}$, $\mathcal{C}_S(\mathcal{U})=+\infty$;

(3) 设 $\mathcal{F}$ 为一个族, 那么 (X,T) 是 $\mathcal{F}$ 扩散的当且仅当对于任意的 $S\in\mathcal{F}$ 和 $n\geqslant 2$, $\mathrm{Com}_S^n(X,T)=X^n\setminus\Delta_n$.

类似于熵串情形, 有

命题 8.1.5 设 (X,T) 为一个动力系统, 并且 $S\in\mathcal{F}_{\inf}$.

(1) 如果开覆盖 $\mathcal{V}$ 满足 $\mathcal{C}_S(\mathcal{V})=+\infty$, 那么存在一个标准覆盖 $\mathcal{U}$, 使得 $\mathcal{C}_S(\mathcal{U})=+\infty$;

(2) 如果 $\mathcal{U}=\{U,V\}$ 为一个开覆盖且满足 $\mathcal{C}_S(\mathcal{U})=+\infty$, 那么 $U^c\times V^c$ 中含有一个 S 复杂性对;

(3) $\mathrm{Com}_S^n(X,T)\cup\Delta_n$ 是一个闭集;

(4) 设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为一个因子映射,

(i) 如果 $(x_i)_1^n\in\mathrm{Com}_S^n(X,T)$ 且对某个 $i\neq j$, $\pi(x_i)\neq\pi(x_j)$ 成立, 那么 $(\pi(x_i))_1^n\in\mathrm{Com}_S^n(Y,S)$;

(ii) 如果 $(y_i)_1^n\in\mathrm{Com}_S^n(Y,S)$, 那么存在 $(x_i)_1^n\in\mathrm{Com}_S^n(X,T)$, 使得 $\pi(x_i)=y_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 特别地, $\mathrm{Com}_S^n(X,T)\cup\Delta_n$ 为 $T^{(n)}$ 不变的.

注记 8.1.6 由于对每个 $S\in\mathcal{F}$, 相对于 S 的 n 复杂性串具有提升性质, S 扩散性质在因子映射和几乎一对一扩充下保持. 进而, $\mathcal{F}$ 扩散也在因子映射和几乎一对一扩充下保持.

有时我们需要考虑同胚映射, 下面的引理就变得十分有用.

引理 8.1.7 设 (X,T) 为一个动力系统, $n\geqslant 2$, $A\in\mathcal{F}_{\inf}$. 那么 $\mathrm{Com}_A^n(X,T)=X^n\setminus\Delta_n(X)$ 当且仅当 $\mathrm{Com}_A^n(\widetilde{X},\widetilde{T})=\widetilde{X}^n\setminus\Delta_n(\widetilde{X})$, 这里, $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 为 (X,T) 的自然扩充.

证明 由命题 8.1.5, 我们只要证明必要性. 故假设 $\mathrm{Com}_A^n(X,T)=X^n\setminus\Delta_n(X)$.

任取 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\widetilde{X}^n\setminus\Delta_n(\widetilde{X})$, 设 $y_i=(y_i^1,y_i^2,\cdots)(i=1,2,\cdots,n)$. 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\mathrm{diam}(X)\cdot\sum\limits_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon$ 且 $(y_1^N,y_2^N,\cdots,y_n^N)\in X^n\setminus\Delta_n(X)$. 由于 $(y_1^N,y_2^N,\cdots,y_n^N)\in\mathrm{Com}_A^n(X,T)$, 对于因子映射 $p_N:(\widetilde{X},\widetilde{T})\to(X,T)$, 存在 $y_i'\in p_N^{-1}(y_i^N)$ 满足 $(y_1',y_2',\cdots,y_n')\in\mathrm{Com}_A^n(\widetilde{X},\widetilde{T})$. 因为 $p_N(y_i')=p_N(y_i)$, 由 N 的选取可得到 $d_T(y_i',y_i)<\varepsilon$. 令 $\varepsilon\to 0$, 由于 $\mathrm{Com}_A^n(\widetilde{X},\widetilde{T})\cup\Delta_n(X_T)$ 是一个闭集, 便有 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathrm{Com}_A^n(\widetilde{X},\widetilde{T})$. 这样便证明了 $\mathrm{Com}_A^n(\widetilde{X},\widetilde{T})={X_T}^n\setminus\Delta_n(\widetilde{X})$. □

因此对于任意的 $S\in\mathcal{F}_{\inf}$, 系统是 S 扩散的当且仅当它的自然扩充是 S 扩散的. 进而, 对于任意的族 $\mathcal{F}$,(X,T) 是 $\mathcal{F}$ 扩散的当且仅当它的自然扩充是 $\mathcal{F}$ 扩散的. 类似于定理 8.1.2, 我们有如下关于 S 等度连续性的刻画.

命题 8.1.8 设 (X,T) 为一个动力系统, $S\in\mathcal{F}_{\inf}$. 那么以下性质等价:

(1) (X,T) 是 S 等度连续的;

(2) 对于 X 的任意有限开覆盖 $\mathcal{U}$, $\mathcal{C}_S(\mathcal{U})<+\infty$;

(3) $\mathrm{Com}_S(X,T)=\varnothing$, 即对于 X 的任意标准覆盖 $\mathcal{U}$, $\mathcal{C}_S(\mathcal{U})<+\infty$.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 的证明类似于定理 8.1.2,(2) $\Leftrightarrow$ (3) 由性质 8.1.5 的 (1) 和 (2) 可以得到. □

类于定理 6.2.7, 有

定理 8.1.9 设 (X,T) 为一个动力系统, $S\in\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$. 记 $\mathcal{A}(\mathrm{Com}_S(X,T))$ 为包含 $\mathrm{Com}_S(X,T)\cup\Delta_2$ 的最小的闭不变等价关系, $\pi_0:(X,T)\to(X_0,T_0)=(X/\mathcal{A}(\mathrm{Com}_S(X,T)),T_0)$ 为相应的商映射. 那么, (X_0,T_0) 为 (X,T) 的极大的 S 等度连续因子.

习 题 8.1

1. 设 (X,T) 为一个动力系统, $\mathcal{U}$ 为 X 的具有有界复杂性的有限覆盖. 证明: 存在 X 的一个有限覆盖 $\{X_1,\cdots,X_c\}$, 使得 $X_i=\bigcap_{j=0}^{\infty}T^{-j}U_{i,j}$, $U_{i,j}\in\mathcal{U}$.
2. 证明性质 8.1.5.
3. 证明: $\mathcal{F}$ 扩散在因子映射和几乎一对一扩充下保持.
4. 给出性质 8.1.8 的一个详细证明.
5. 证明定理 8.1.9.

§8.2 几种动力学性质的刻画

在这一节中, 我们将利用沿着序列的复杂性函数来刻画 mild 混合、扩散和强扩散等性质.

Blanchard, Host 和 Maass 最初定义扩散是按照复杂性函数给出的 (Blanchard etc., 2000), 即上一节中 $\mathbb{Z}_+$ 扩散的定义. 我们在前面定义一个动力系统为扩散的, 是指它弱不交于所有的极小系统. 我们将在本节中将说明这两个定义是一致的, 并且等价于下面这个表面上更弱的条件:

定义 8.2.1 一个动力系统称为**2 扩散的**, 是指对任意的标准覆盖 $\mathcal{U}$, 都有 $\mathcal{C}(\mathcal{U},n)\to+\infty$.

显然 $\mathbb{Z}_+$ 扩散蕴含了 2 扩散. 我们先证 2 扩散蕴含扩散, 然后, 在本节最后说明扩散蕴含 $\mathbb{Z}_+$ 扩散. 首先, 我们需要两个引理.

引理 8.2.2 2 扩散的系统是完全传递的.

证明 设 (X,T) 为一个动力系统, $\mathcal{U}$ 为一个有限覆盖满足 $\mathcal{C}_T(\mathcal{U})=\infty$. 对于任意的 $k\in\mathbb{N}$, 不难得到

$$\mathcal{C}_T(\mathcal{U},kn+k)\leqslant\mathcal{C}_{T^k}(\mathcal{U},n)^k.$$

这说明了 (X,T) 是 2 扩散的蕴含了 (X,T^k) 是 2 扩散的.

因此, 我们只需证明 2 扩散蕴含传递性 (证明留作习题). □

引理 8.2.3 设 (X,T) 与 (Y,S) 弱不交. 那么 $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 与 $(\widetilde{Y},\widetilde{S})$ 弱不交.

证明 设 $p_n:\widetilde{X}\to X$ 为到第 n 个坐标的投影. 注意到 $\{p_n^{-1}(U): U$ 为 X 的一个开集, $n\in\mathbb{N}\}$ 形成了 $\widetilde{X}$ 的一个拓扑基. 引理的证明不难由此产生. □

对于一个可逆的动力系统 (X,T), 如果它为 $\mathbb{Z}$ 作用下传递的, 那么也称为**双边传递的**. 即 (X,T) 为双边传递的当且仅当对于任意的非空开集 U, V, $N_{\mathbb{Z}}(U,V)=\{n\in\mathbb{Z}:U\cap T^{-n}V\neq\varnothing\}$ 不空. 现在我们可以证明

定理 8.2.4 2 扩散蕴含了扩散.

证明 由于 2 扩散蕴含了完全传递性 (引理 8.2.2), 我们只需证明: 一个完全传递的系统如果不是扩散的, 那么它不是 2 扩散的. 由引理 8.1.7 和 8.2.3, 一个动力系统是 2 扩散的 (或者扩散的) 当且仅当它的自然扩充是 2 扩散的 (或者扩散的). 于是我们可以假设 (X,T) 是一个可逆的完全传递的动力系统.

如果 (X,T) 不为扩散的. 那么由引理 8.2.3, 存在一个可逆的极小系统 (Y,S), 使得 $(X\times Y,T\times S)$ 不为传递的. 由于 (X,T) 是完全传递的, X 没有孤立点, 进而 $X\times Y$ 也没有孤立点. 又因为 $T\times S$ 是一个同胚, $(X\times Y,T\times S)$ 不为双边传递的. 故有 X 的非空开集 U_1, U_2 和 Y 的非空开集 V_1, V_2, 使得 $N_{\mathbb{Z}}(U_1\times V_1,U_2\times V_2)=\varnothing$, 这里 $N_{\mathbb{Z}}(U_1\times V_1,U_2\times V_2)=\{n\in\mathbb{Z}:U_2\times V_2\cap(T\times S)^n(U_1\times V_1)\neq\varnothing\}$.

由于 (Y,S) 是一个极小的同胚, 因此存在 $m\in\mathbb{Z}$, 使得 $V=V_1\cap T^mV_2\neq\varnothing$. 取 X 的内点非空的不交闭集 W_1,W_2, 使得 $W_1\subset U_1$ 和 $W_2\subset T^mU_2$. 那么有

$$N_{\mathbb{Z}}(W_1,W_2)\cap N_{\mathbb{Z}}(V,V)\subset N_{\mathbb{Z}}(U_1\times V_1,(T\times S)^mU_2\times V_2)=\varnothing.$$

选取 $y\in \mathrm{Trans}_S\cap V=V$, 并令 $A=N(y,V)=\{a_1,a_2,\cdots\}\subset\mathbb{Z}_+$. 不难验证: $N_{\mathbb{Z}}(V,V)=(A-A)_{\mathbb{Z}}=\{a-b:a,b\in A\}$. 易见 $\mathcal{U}=\{X\setminus W_1,X\setminus W_2\}$ 形成 X 的一个标准覆盖. 因为 $N_{\mathbb{Z}}(W_1,W_2)\cap(A-A)_{\mathbb{Z}}=\varnothing$, 则对任意的 $i,j\in\mathbb{N}$, $W_1\cap T^{-(a_j-a_i)}W_2=\varnothing$, 进而 $T^{-a_i}W_1\subset T^{-a_j}(X\setminus W_2)$.

设 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 如果 $x\notin\bigcap_{j=1}^nT^{-a_j}(X\setminus W_1)$, 即 $x\in\bigcup_{j=1}^nT^{-a_j}W_1$, 那么存在 $1\leqslant i\leqslant n$ 满足 $x\in T^{-a_i}W_1$. 所以 $x\in T^{-a_i}W_1\subset\bigcap_{j=1}^nT^{-a_j}(X\setminus W_2)$, 即 $\bigcap_{j=1}^nT^{-a_j}(X\setminus W_1)\bigcup\bigcap_{j=1}^nT^{-a_j}(X\setminus W_2)=X$. 于是, 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, $N(\bigvee_{j=1}^nT^{-a_j}\mathcal{U})=2$. 注意到 A 是 syndetic, 故存在 $M>0$, 使得对所有的 $i\in\mathbb{N}$ 都满足 $a_{i+1}-a_i\leqslant M$, 即 $\bigcup_{i=0}^M(A+i)=\mathbb{N}$. 于是对所有的 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $N(\bigvee_{j=0}^{n-1}T^{-j}\mathcal{U})\leqslant 2^M$, 所以 (X,T) 不为 2 扩散的. □

为了刻画 mild 混合、扩散和强扩散, 我们需要如下的引理. 首先回忆一下 $\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{pubd}}$ 分别代表包含 IP 集、piecewise syndetic 集和正上半 Banach 密度集的集合的全体.

引理 8.2.5 设 X 为一个紧致的度量空间, $T:X\to X$ 为一个连续映射 (不必为满的), (Y,S) 为一个动力系统, $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 为扩充.

(1) 如果 (Y,S) 为传递的, 那么存在 (X,T) 的一个传递的子系统 (X_1,T) 满足 $\pi(X_1)=Y$, 如果 $A\in\mathcal{F}_{\text{ip}}$, 那么存在一个子集 $B\subset A$, 使得 $\overline{\text{orb}(1_B,\sigma)}$ 为传递的且 $1_B\neq(0,0,\cdots)$;

(2) 如果 (Y,S) 是一个 E 系统, 那么存在 (X,T) 的一个子 E 系统 (X_1,T) 满足 $\pi(X_1)=Y$, 如果 $A\in\mathcal{F}_{\text{pud}}$ 或者 $A\in\mathcal{F}_{\text{pubd}}$, 那么存在一个 E 系统 (Σ_1,σ), 使得 $\Sigma_1\subset\overline{\text{orb}(1_A,\sigma)}$ 且 $\Sigma_1\neq\{(0,0,\cdots)\}$;

(3) 如果 (Y,S) 为极小的, 那么存在 (X,T) 的一个极小的子系统 (X_1,T) 满足 $\pi(X_1)=Y$, 如果 A 是syndetic(或者piecewise syndetic), 那么存在一个极小的系统 (Σ_1,σ), 使得 $\Sigma_1\subset\overline{\text{orb}(1_A,\sigma)}$ 且 $\Sigma_1\neq\{(0,0,\cdots)\}$.

证明 (1) 由定理 1.2.10 的证明知, 存在一个传递的子系统 (X_1,T), 使得 $\pi: X_1\to Y$ 为极小的. 进而当 $A\in\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 时, 这样一个系统 (Σ_1,σ) 的存在性由定理 1.2.13 可以得到.

(2) 设 ν 为 (Y,S) 的一个具有满支撑的不变测度. 由 (1) 知, 具有一个传递的子系统 (X_1,T), 使得 $\pi: X_1\to Y$ 为极小的. 取 μ 为 (X_1,T) 上的不变测度满足 $\pi\mu=\nu$(定理 2.4.11).

设 $y\in\text{Trans}_S$. 那么对任意的 $\varepsilon>0$, $\mu\pi^{-1}(B_\varepsilon(y))=\nu B_\varepsilon(y)>0$, 进而 $\text{supp}(\mu)\cap\pi^{-1}(B_\varepsilon(y))\neq\varnothing$. 取 $x_n\in\text{supp}(\mu)\cap\pi^{-1}(B_{\frac{1}{n}}(y))$, 且不妨假设 $x_n\to x$. 那么 $\pi(x)=y$ 且 $x\in\text{supp}(\mu)$. 由 π 的极小性有 x 是 X_1 的一个传递点. 于是 $\text{supp}(\mu)=X_1$.

现在假设 $A\in\mathcal{F}_{\text{pubd}}$. 由定理 2.5.3 的证明我们知道, 存在 $\overline{\text{orb}(1_A,\sigma)}$ 上的一个不变测度 μ 使得 $\mu([1])>0$. 故存在 μ 的遍历分解中的一个元素 μ' 满足 $\mu'([1])>0$. 于是 $\text{supp}(\mu')$ 就是我们所需要的系统.

(3) 设 $A\in\mathcal{F}_{\text{ps}}$. 用定理 1.3.6 可知, 存在 $A'\in\mathcal{F}_{\text{s}}$ 满足 $1_{A'}\in\overline{\text{orb}(1_A,\sigma_1)}$. 那么每个极小集 $\overline{\text{orb}(1_{A'},\sigma)}\subset\overline{\text{orb}(1_A,\sigma)}$ 都满足我们的要求. □

下面我们用沿着某些序列的复杂性函数来刻画 mild 混合、扩散和强扩散.

定理 8.2.6 设 (X,T) 为一个动力系统. 那么以下命题等价:

(1) (X,T) 是 mild 混合的, 即 (X,T) 弱不交于所有的传递系统;

(2) 对于 X 的任意标准覆盖和任意的 $A\in\mathcal{F}_{\text{ip}}$, $\mathcal{C}_A(\mathcal{U})=+\infty$;

(3) (X,T) 为 $\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 扩散的;

(4) (X,T) 为 $(\mathcal{F}_{\text{ip}}-\mathcal{F}_{\text{ip}})^*$ 传递的.

证明 (1) ⇔ (4) 由定理 1.4.11 可以得到. (3) ⇒ (2) 是显然的. 通过定理 8.2.4 证明中类似的讨论我们可以得到 (2) ⇒ (1). 于是只需证明 (1) ⇒ (3).

下面均假设 T 为一个同胚. 对于一般的情形, 根据引理 8.2.3 和注记 8.1.6, 我们可以运用自然扩充完成所有证明.

设 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$ 是 X 的一个非平凡的闭覆盖,$A\in\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 满足 $\mathcal{C}_A(\mathcal{U})<+\infty$. 不失一般性, 假设 IP 集 A 由 $p_1,p_2,\cdots\in\mathbb{N}$ 生成, 其中 $p_{i+1}>p_1+p_2+\cdots+p_i$.

让 $\Omega_k = \{1,2,\cdots,k\}^{\mathbb{Z}_+}$ 上赋予转移 σ_k, $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 上赋予转移 σ. 设 $1_A \in \Omega$ 为 A 的特征函数, 即 $1_A(i) = 1$ 当且仅当 $i \in A$. 对于任意的 $\omega \in \Omega_k$ 和 $s \in \Omega$, 取 $J^*(\omega, s) = \bigcap_{i=0}^{+\infty} T^{-i} U_{w(i)s(i)}$, 这里 $U_0 = X$.

由 $\mathcal{C}_A(\mathcal{U}) < +\infty$, 存在 $m \geqslant 1$ 和 $\omega_1^0, \omega_2^0, \cdots, \omega_k^0 \in \Omega_k$, 使得

$$\bigcup_{j=1}^{m} J^*(\omega_j^0, 1_A) = X. \tag{8.2.1}$$

这是因为: 设 $m = \mathcal{C}_A(\mathcal{U})$, $H_A(n)$ 为满足 $\bigcup_{j=1}^{m} [\bigcap_{i=0}^{n} T^{-i} U_{w_j(i) 1_A(i)}] = X$ 的 m 串 $(w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 的全体, 这里 $\omega_j \in \Omega_k$. 由 m 的选取知, 集合 $H_A(n)$ 是 Ω_k^m 的非空子集. 显然 $H_A(n) \subset H_A(n-1)$. 因此, 下降闭子集列的交 $H_A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} H_A(n)$ 至少包含了一个 m 串 $(\omega_1^0, \cdots, \omega_m^0)$. 易见

$$\bigcup_{j=1}^{m} J^*(\omega_j^0, 1_A) = \lim_{n \to +\infty} \bigcup_{j=1}^{m} \left[\bigcap_{i=0}^{n} T^{-i} U_{\omega_j^0(i) 1_A(i)} \right] = X.$$

定义 H 为满足如下条件的 $m+1$ 串 $(\omega_1, \cdots, \omega_m, s) \in \Omega_k^m \times \Omega$ 的全体:

$$\bigcup_{j=1}^{m} J^*(w_j, s) = X. \tag{8.2.2}$$

根据我们刚才进行的讨论知 H 不空, 下面说明 H 是闭的. 设 $(w_1^n, \cdots, w_m^n, s^n) \in H$, $n \in \mathbb{N}$ 收敛于 $(w_1, \cdots, w_m, s)$. 因为对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=0}^{+\infty} T^{-i} U_{w_j^n(i) s^n(i)} = X$, 故 $\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=0}^{l} T^{-i} U_{w_j^n(i) s^n(i)} = X$. 固定 $l > 0$, 令 $n \to +\infty$, 可以得到 $\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=0}^{l} T^{-i} U_{w_j(i) s(i)} = X$. 再令 $l \to +\infty$, 不难发现 (8.2.2) 对 $(w_1, \cdots, w_m, s)$ 成立.

设 $\Omega_k^m \times \Omega$ 上的转移为 $S = \sigma_k \times \cdots \times \sigma_k \times \sigma$. 不难验证 $S(H) \subset H$. 由于 A 是一个 IP 集, 由引理 8.2.5 知, 存在一个传递的系统 (Y, σ) 满足 $Y \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}(1_A, \sigma))$ 且 $Y \neq \{(0, 0, \cdots, 0, \cdots)\}$. 设 $\pi : H \to \Omega$ 为投射. 因为 $\pi \circ S = \sigma \circ \pi$, 则 $S(\pi^{-1}(Y)) \subset \pi^{-1}(Y)$.

因为 $(\omega_1^0, \cdots, \omega_m^0, 1_A) \in H$, $Y = \pi(\pi^{-1}(Y))$ 且 $\pi \circ S = \sigma \circ \pi$, 由引理 8.2.5 知, 存在 $(\pi^{-1}(Y), S)$ 的一个传递的子系统 (Σ, S), 使得 $\pi(\Sigma) = Y$. 对于 $1 \leqslant i \leqslant m$, 设

$$K_j = \{((\omega_1, \cdots, \omega_m, s), x) \in \Sigma \times X : x \in J^*(w_j, s)\}.$$

下面说明 K_j 是 $\Sigma \times X$ 的一个 $S \times T$ 不变的闭子集.

设 $\{((w_1^n, \cdots, w_m^n, s^n), x_n)\} \in K_j$ 收敛于 $((w_1, \cdots, w_m, s), x)$. 由于当 $n \in \mathbb{N}$ 时 $x_n \in \bigcap_{i=0}^{+\infty} T^{-i} U_{w_j^n(i) s^n(i)}$, 所以对任意的 $n, l \in \mathbb{N}$, 都有 $x_n \in \bigcap_{i=0}^{l} T^{-i} U_{w_j^n(i) s^n(i)}$.

固定 $l>0$, 令 $n\to+\infty$, 就有 $x\in\bigcap_{i=0}^{l}T^{-i}U_{w_j(i)s(i)}$. 令 $l\to+\infty$, 得到 $x\in\bigcap_{i=0}^{+\infty}T^{-i}U_{w_j(i)s(i)}$, 即 $((w_1,\cdots,w_m,s),x)\in K_j$. 于是 K_j 为闭的. 为了证明 K_j 的不变性, 设 $((w_1,\cdots,w_m,s),x)\in K_j$. 那么 $x\in\bigcap_{i=0}^{+\infty}T^{-i}U_{w_j(i)s(i)}$. 这意味着 $Tx\in\bigcap_{i=1}^{+\infty}T^{-(i-1)}U_{w_j(i)s(i)}$, 也就是说, $Tx\in\bigcap_{i=0}^{+\infty}T^{-i}U_{\sigma_k w_j(i)\cdot\sigma s(i)}$, 即 $((\sigma_k w_1,\cdots,\sigma_k w_m,\sigma s),Tx)\in K_j$.

因为 $Y\neq\{(0,0,\cdots)\}$, 选取 $(w_1,\cdots,w_m,s)\in\Sigma$ 满足 $s\neq(0,0,\cdots,0,\cdots)$. 不妨假设 $s(0)=1$. 注意到 $\{(w_1,\cdots,w_m,s)\}\times(X\backslash U_{w_i(0)})\cap K_i=\varnothing$, 所以当 $i=1,2,\cdots,m$ 时, $K_i\neq\Sigma\times X$.

因为 (8.2.2) 成立, 有 $\bigcup_{i=1}^{m}K_i=\Sigma\times X$, 于是存在一个 i, 使得 K_i 具有非空的内部. 又因为 K_i 是不变的且 $K_i\neq\Sigma\times X$, 从而 $(\Sigma\times X,S\times T)$ 不为传递的. 这与 X 是 mild 混合的假设矛盾. □

定理 8.2.7 设 (X,T) 为一个动力系统. 那么以下命题等价:

(1) (X,T) 为强扩散的, 即它弱不交于任何一个 E 系统;

(2) 对于 X 的任意标准覆盖 $\mathcal{U}$ 和任意的 $A\in\mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 或者 $\mathcal{F}_{\text{pud}}$, $\mathcal{C}_A(\mathcal{U})=+\infty$;

(3) (X,T) 为 $\mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 扩散的或者 $\mathcal{F}_{\text{pud}}$ 扩散的;

(4) (X,T) 为 Poincaré 传递的.

证明 利用引理 8.2.5, 重复进行定理 8.2.6 的证明过程可以得到 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). (1) $\Leftrightarrow$ (4) 由定理 4.4.7 得到. □

最后我们有

定理 8.2.8 设 (X,T) 为一个动力系统. 那么以下命题等价:

(1) (X,T) 为扩散的;

(2) 对于 X 的任意标准覆盖 $\mathcal{U}$ 和任意的 $A\in\mathcal{F}_{\text{s}}$ 或者 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$, $\mathcal{C}_A(\mathcal{U})=+\infty$;

(3) (X,T) 为 $\mathcal{F}_{\text{s}}$ 扩散的或者 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 扩散的;

(4) (X,T) 是回复集传递的.

证明 利用引理 8.2.5, 重复进行定理 8.2.6 的证明过程可以得到 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). (1) $\Leftrightarrow$ (4) 由定理 4.4.8 得到. □

综合定理 8.2.4 及定理 8.2.8, 我们得到 2 扩散、$\mathbb{Z}_+$ 扩散和扩散是相互等价的三个概念. 不难发现, 对于一个族 $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_{\text{inf}}$,

$$\mathcal{F}_{\text{inf}}\text{扩散}\subset\mathcal{F}\text{扩散}\subset\text{扩散}.$$

最后我们以一个未解决问题来结束本节的讨论:

问题 8.2.9 极端扩散是否也有着类似的刻画?

习 题 8.2

1. 证明 2 扩散蕴含了传递性. 提示: 参见文献 (Blanchard etc., 2000)

2. 完成引理 8.2.3 的证明.

3. 设 $\pi: X \to Y$ 为 (X,T) 和 (Y,S) 之间的一个因子映射. 证明：如果 $\mu \in M(X,T)$, 那么 $\pi(\mathrm{supp}(\mu)) = \mathrm{supp}(\pi\mu)$.

4. 设 (X,T) 为一个传递的动力系统. 证明：(X,T) 不为 $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}$ 传递的当且仅当存在一个闭不变的真子集 A, 使得如果闭子集 B 与 A 交为空, 那么 $N(B,B)$ 不为 syndetic. 提示：如果 U 为一个非空开子集满足 $N(U,U)$ 不为 syndetic, 那么可以取 $A = X \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}U$.

5. 设 $\pi: (X,T) \to (Y,S)$ 为一个极小的因子映射. 证明：如果 (Y,S) 为 $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}$ 传递的, 那么 (X,T) 亦然. 提示：利用 8.2.4.

6. 如果对于任意的标准覆盖 $\mathcal{U}$ 和任意的 $S \in \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ 都有 $\mathcal{C}_S(\mathcal{U}) = \infty$, 那么这是否蕴含了 $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ 扩散 (这是一个仍没有解决的问题)?

§8.3　极小的 $\mathcal{F}$ 扩散系统

我们已经证明了：一个拓扑动力系统为弱混合的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\mathrm{t}}$ 传递的, 为 mild 混合的当且仅当为 $(\mathcal{F}_{\mathrm{ip}} - \mathcal{F}_{\mathrm{ip}})^*$ 传递的.

设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为一个保测动力系统. 我们知道：它为弱混合的当且仅当对所有的 $A,B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{d1}} - \lim \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$, 它为 mild 混合的当且仅当对所有的 $A,B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}^* - \lim \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$.

拓扑动力系统和保测动力系统中的结果有很多类似之处, 特别是极小的拓扑动力系统和遍历的保测动力系统中的结果有着更多类似之处. 例如, 一个遍历的保测动力系统是弱混合的当且仅当它没有具有离散谱的非平凡的因子 (§7.1 习题); 一个极小的拓扑动力系统是弱混合的当且仅当它没有具有拓扑离散谱的 (即等度连续的) 非平凡的因子 (第 9 章). 因此, 一个自然的问题是：对于极小的弱混合系统和极小的 mild 混合系统, 它们的回复时间集是否类似于遍历论中的情况? 我们在这节证明, 事实上一个极小的系统为弱混合的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\mathrm{lbd1}}$ 传递的; 为 mild 混合的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\mathrm{ip}}^*$ 传递的. 在证明这些结论的时候, 我们还得到了一些自身很有意思的结论, 例如, 我们发现, 一个极小的动力系统为 $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ 扩散的当且仅当它为强混合的.

首先推广局部 proximal 关系的定义：

定义 8.3.1　设 (X,T) 为一个可逆的动力系统, $S \in \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$, 且 $n \geqslant 2$. 定义

$$Q_S^n(X,T) = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in X^n : \forall\ x_i \text{的邻域} U_{x_i}\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ x_i' \in U_{x_i},\ \exists\ m \in S, \text{使得} \sup_{1 \leqslant k,l \leqslant n} d(T^{-m}x_k', T^{-m}x_l') \leqslant \varepsilon\}.$$

下面的结果给出了 $\mathrm{Com}_S^n(X,T)$ 和 $Q_S^n(X,T)$ 之间的关系.

引理 8.3.2 设 (X,T) 为一个可逆的动力系统, $S \in \mathcal{F}_{\text{inf}}$ 且 $n \geqslant 2$. 那么 $\text{Com}_S^n(X,T) \subset Q_S^n(X,T)$.

证明 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \notin Q_S^n(X,T)$. 那么存在 x_i 的邻域 U_i 满足 $\bigcap_{i=1}^n U_i = \varnothing$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意的 $x_i' \in U_i$ 和任意的 $m \in S$, 都有

$$\sup_{1\leqslant k,l\leqslant n} d(T^{-m}x_k', T^{-m}x_l') > \varepsilon.$$

由 X 的紧致性知, 存在一个覆盖 $\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 满足如下的性质:

(1) C_i 为闭的、内部非空且对于任意的 $i=1,2,\cdots,k$ 均有 $\text{diam}(C_i) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$;

(2) $x_i \in \text{int}(C_i)$, $i=1,2,\cdots,n$;

(3) $C_i \subset U_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

我们断言: 对于任意的 $i \in \{1,2,\cdots,k\}$ 和 $m \in S$, 存在 $1 \leqslant j_i \leqslant n$, 使得 $T^m(C_i) \cap C_{j_i} = \varnothing$. 否则, 对某个 $i \in \{1,2,\cdots,k\}$, 存在 $x_j' \in C_i$ 和 $m \in S$, 使得 $T^m(x_j') \in C_j$, $j=1,2,\cdots,n$. 因此

$$\sup_{1\leqslant k,l\leqslant n} d(T^{-m}(T^m x_k'), T^{-m}(T^m x_l')) > \varepsilon,$$

这与条件 $\text{diam}(C_i) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ 矛盾.

令 $\mathcal{U} = \{C_1^c, C_2^c, \cdots, C_n^c\}$. 那么对每个 C_i 都能找到一个 $t_i \in \{1,2,\cdots,n\}^S$, 使得 $C_i \subset \bigcap_{s\in S} T^{-s}C_{t_i(s)}^c$, 因此 $\mathcal{C}_S(\mathcal{U}) \leqslant k$. 于是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \notin \text{Com}_S^n(X,T)$, 从而 $\text{Com}_S^n(X,T) \subset Q_S^n(X,T)$. □

现在我们可以证明:

定理 8.3.3 设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\text{inf}}$ 为一个族, (X,T) 为一个极小的动力系统. 如果 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 扩散的, 那么 (X,T) 为 $k\mathcal{F}$ 传递的.

证明 由引理 8.1.7 我们知道: 一个动力系统为 $\mathcal{F}$ 扩散的当且仅当它的自然扩充为 $\mathcal{F}$ 扩散的. 因此可假设 T 为一个同胚, 且设 (X,T) 为非平凡的. 下面证明: 对于 X 的任意两个非空开集 U 和 V, 都有 $N(U,V) \in k\mathcal{F}$.

由于 (X,T) 为极小的, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\bigcup_{n=0}^{N-1} T^n U = X$. 设 $x \in V$. 对于任意的 $A \in \mathcal{F}$, 由性质 8.1.4 有 $(x,Tx,\cdots,T^{N-1}x) \in \text{Com}_A^N(X,T)$, 进而由引理 8.3.2 有 $(x,Tx,\cdots,T^{N-1}x) \in Q_A^N(X,T)$. 设 $\delta > 0$ 为开覆盖 $\{U,TU,\cdots,T^{N-1}U\}$ 的一个 Lebesgue 数. 令

$$S = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \exists x_i \in T^iV, i=0,1,\cdots,N-1, \text{使得} \sup_{0\leqslant k,l\leqslant N-1} d(T^{-n}x_k, T^{-n}x_l) \leqslant \delta\}.$$

因为对任意的 $A \in \mathcal{F}$, 都有 $(x,Tx,\cdots,T^{N-1}x) \in Q_A^N(X,T)$, 所以 $S \cap A \neq \varnothing$. 因此 $S \in k\mathcal{F}$. 设 $n \in S$, 那么存在 $x_i \in T^iV$, $i=0,1,\cdots,N-1$, 使得

$\mathrm{diam}\{T^{-n}x_0, T^{-n}x_1, \cdots, T^{-n}x_{N-1}\} \leqslant \delta$. 所以, 存在 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 满足 $\{T^{-n}x_0, T^{-n}x_1, \cdots, T^{-n}x_{N-1}\} \subset T^kU$. 特别地, $T^{-n}x_k \in T^kU$. 故 $T^{-n}T^kV \cap T^kU \neq \varnothing$, 即 $T^{-n}V \cap U \neq \varnothing$. 这说明 $S \subset N(U,V)$, 所以 $N(U,V) \in k\mathcal{F}$. 由 U, V 的任意性, 就有 (X,T) 为 $k\mathcal{F}$ 传递的. □

需要指出的是, 定理 8.3.3 对 E 系统不成立 (更不用说一般的传递系统了), 参见文献 (Blanchard, 1992). 文献 (Yang, 2004) 的主要结果说明, 如果动力系统 (X,T) 为 $k\mathcal{F}$ 混合的, 那么 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 扩散的. 现在我们给出一个简单的证明, 并指出在极小性的假设下逆命题也成立.

定理 8.3.4　*设 (X,T) 为一个动力系统, $\mathcal{F}$ 为一个满的族.*

(1) 如果 (X,T) 为 $k\mathcal{F}$ 混合的, 那么 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 扩散的;

(2) 如果 (X,T) 为极小的, 那么它为 $\mathcal{F}$ 扩散的当且仅当它为 $k\mathcal{F}$ 混合的.

证明　首先我们证明 (1). 设 (X,T) 为 $k\mathcal{F}$ 混合的. 为了证明 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 扩散的, 只要说明对于任意的 $S \in \mathcal{F}$ 和 $n \geqslant 2$, 都有 $\mathrm{Com}_S^n(X,T) = X^n \setminus \Delta_n$. 因为 (X,T) 为弱混合的, 我们有如下的事实 (*): 对于 X 的任意非空开集 U_1, U_2, V_1 和 V_2, 存在非空开集 U_3 和 V_3, 使得 $N(U_1,V_1) \cap N(U_2,V_2) \supset N(U_3,V_3)$(定理 1.4.4).

固定 $S \in \mathcal{F}$ 和 $n \geqslant 2$. 设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X^n \setminus \Delta_n$, U_i 为 x_i 的一个闭邻域, $i = 1, 2, \cdots, n$ 满足当 $x_i = x_j$ 时, $U_i = U_j$, 且当 $x_i \neq x_j$ 时, $U_i \cap U_j = \varnothing$. 我们将寻找 $0 < t_1 < t_2 < \cdots$ 满足 $t_i \in S$, 使得对于任意的 $m \in \mathbb{N}$ 和 $s \in \{1, 2, \cdots, n\}^m$, 都有 $T^{-t_1}U_{s(1)} \cap \cdots \cap T^{-t_m}U_{s(m)} \neq \varnothing$.

选取 $t_1 \in S$ 满足 $t_1 > 0$. 由事实 (*) 知, $F_1 =: \bigcap_{i,j=1}^n N(T^{-t_1}U_i, U_j) \in k\mathcal{F}$. 因为 $F_1 \cap S \in \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$, 取 $t_2 \in F_1 \cap S$ 满足 $t_2 > t_1$. 假设我们已经找到 $0 < t_1 < \cdots < t_l$ 满足所要求的性质. 由事实 (*) 知

$$F_{l+1} =: \bigcap_{s \in \{1,2,\cdots,n\}^l, i=1,2,\cdots,n} N(T^{-t_1}U_{s(1)} \cap \cdots \cap T^{-t_l}U_{s(l)}, U_i) \in k\mathcal{F}.$$

因为 $F_{l+1} \cap S \in \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$, 选取 $t_{l+1} \in F_{l+1} \cap S$ 满足 $t_{l+1} > t_l$. 那么 $t_1, \cdots, t_{l+1}$ 满足所要求的性质.

设 $\mathcal{U} = \{U_1^c, U_2^c, \cdots, U_n^c\}$. 令 $r = \mathrm{Card}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 显然 $r \geqslant 2$, 不妨设 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是两两不同的. 那么 $\mathcal{U} = \{U_1^c, U_2^c, \cdots, U_r^c\}$. 固定 $k \in \mathbb{N}$. 对于任意的 $s \in \{1, 2, \cdots, r\}^k$, 取 $x_s \in \bigcap_{j=1}^k T^{-t_j}(U_{s(j)})$. 设 $X_S = \{x_s : s \in \{1, 2, \cdots, r\}^k\}$. 对于所有的 $t \in \{1, 2, \cdots, r\}^k$, 都有 $|\bigcap_{j=1}^k T^{-t_j}U_{t(j)}^c \cap X_S| = (r-1)^k$. 结合事实 $|X_S| = r^k$, 得到 $N(\bigvee_{j=1}^k T^{-t_j}(\mathcal{U})) \geqslant \left(\dfrac{r}{r-1}\right)^k$. 由 U_i 的任意性知 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{Com}_S^n(X,T)$, 故 $\mathrm{Com}_S^n(X,T) = X^n \setminus \Delta_n$. 这就完成了 (1) 的证明.

为了证明 (2), 只剩下证明: 如果 (X,T) 为极小的且 $\mathcal{F}$ 扩散的, 那么它为 $k\mathcal{F}$ 混合的. 设 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 扩散的. 由定理 8.3.3, (X,T) 为 $k\mathcal{F}$ 传递的. (X,T) 显然为扩

散的. 因为 (X,T) 为极小的,(X,T) 为弱混合的. 于是由定理 4.4.4, 有 (X,T) 为 $k\mathcal{F}$ 混合的. □

一个动力系统称为**满扩散的**, 如果它为 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 扩散的. 将定理 8.3.4 应用到某些特殊的族, 可以得到在极小性的假设下满扩散、mild 混合和弱混合的回复时间集刻画. 设 (X,T) 为一个动力系统, 由定理 8.2.6~ 定理 8.2.8 我们知道: (X,T) 为 mild 混合的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 扩散的; (X,T) 为强扩散的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 扩散的; (X,T) 扩散的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 扩散的. 我们定义一个动力系统称为**弱扩散的**, 如果它和所有的极小的等度连续系统弱不交. 下面来证明

定理 8.3.5 设 (X,T) 为一个极小的动力系统. 那么

(1) (X,T) 为满扩散的当且仅当它为强混合的;

(2) (X,T) 为 mild 混合当且仅当它为 IP* 传递的;

(3) 以下命题等价:

(i) (X,T) 为弱混合的;

(ii) (X,T) 为弱扩散的;

(iii) (X,T) 为 $\mathcal{F}_{\text{lbd1}}$ 传递的.

证明 (1) 因为 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 为一个满的族且族 $k\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 就是有限余集族, 由定理 8.3.4 知,(X,T) 为满扩散的当且仅当它为强混合的.

(2) 对满的族 $\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 应用定理 8.3.4, 就有 (X,T) 为 mild 混合当且仅当它为 IP* 混合的. 因为 IP* 是一个滤子, 所以 (X,T) 为 mild 混合当且仅当它为 IP* 传递的.

(3) 由于对于一个极小的动力系统, 强扩散 (或者弱扩散) 等价于弱混合, 我们只需证明: (X,T) 为强扩散的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\text{lbd1}}$ 传递的. 因为 $\mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 是一个满的族且 $k\mathcal{F}_{\text{pubd}} = \mathcal{F}_{\text{lbd1}}$, 由定理 8.3.4 知, (X,T) 为强扩散的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\text{lbd1}}$ 混合的. 最后, 一个动力系统为 $\mathcal{F}_{\text{lbd1}}$ 混合的当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\text{lbd1}}$ 传递的. 因此 (X,T) 为强扩散的当且仅当 (X,T) 为 $\mathcal{F}_{\text{lbd1}}$ 传递的. □

注记 8.3.6 测度意义下的 mild 混合的定义由 Furstenberg 和 Weiss(1978) 中给出. Glasner-Weiss(2004) 证明了: 如果 (X,T) 上具有一个满支撑的不变测度 μ, 使得 (X,μ,T) 为 mild 混合的, 那么 (X,T) 为 mild 混合的.

习 题 8.3

1. 证明: 如果 (X,T) 为弱混合的, 那么对任意的 $n \geqslant 2$, 都有 $Q^n(X,T) = Q^n_{\mathbb{Z}_+}(X,T) = X^n$.

2. 证明: 如果 (X,T) 为一个极小的动力系统, 那么 $\text{Com}(X,T) = Q(X,T) \setminus \Delta_2$. 在相同的假设下证明, 对于任意的 $n \geqslant 2$, 都有 $\text{Com}^n(X,T) = Q^n(X,T) \setminus \Delta^{(n)}$ 成立, 这里 $\Delta^{(n)} = \{(x_1,\cdots,x_n) : x_i = x_j \text{ 对某个 } i \neq j\}$. 提示: 参见文献 (Blanchard etc., 2000; Huang-Ye, 2002a).

3. 对于一个极小的动力系统 (X,T), $Q(X,T)$ 是一个等价关系 (见第 9 章). 是否对于任意的 $A\in\mathcal{F}_{\rm ip}$, $Q_A(X,T)$ 都是一个等价关系?

4. 设 (X,T) 为一个极小的动力系统且对所有的 $A\in\mathcal{F}_{\rm ip}$ 都满足 $Q_A(X,T)=X^2$. 是否对于所有的 $A\in\mathcal{F}_{\rm ip}$, 都有 $Q_A^n(X,T)=X^n$, 即 (X,T) 是否为 mild 混合?

5. 对于怎样的 $A\in\mathcal{F}_{\rm inf}$, $\mathrm{Com}_A^n(X,T)=Q_A^n(X,T)\setminus\Delta^n$ 对于所有的 $n\geqslant 2$ 和任意的极小的动力系统都成立? 注: 这个问题至今没有解决, 我们猜测它对任意的 $A\in\mathcal{F}_{\rm ip}$ 都成立.

§8.4 一些例子

我们已经定义了弱混合、极端扩散、强扩散、扩散和弱扩散. 由前面的结果知

$$
\begin{aligned}
&\text{弱混合}\subset\text{极端扩散}\subset\text{强扩散}\subset\text{扩散}\\
&\qquad\subset\text{弱扩散}\subset\text{完全传递性}\subset\text{传递性}.
\end{aligned}
$$

本节将构造一些例子来说明: 弱混合、极端扩散和强扩散是不同的动力学性质. 然而, 现在还不清楚强扩散、扩散和弱扩散是否是相同的动力学性质, 我们将在本章的最后一节中回到这个问题上来.

首先, 我们将构造一个极端扩散的但不为弱混合的例子. 为此, 我们需要一些引理来验证一个动力系统是极端扩散的, 但不是弱混合的. 简单地说, 存在这样的一个例子的主要原因是: 并不是每个 syndetic 子集都能够被一个动力系统实现 (引理 8.4.2). 第一个引理可以看作是弱混合的另外一个刻画.

引理 8.4.1 *设 (X,T) 为一个传递的动力系统. 如果对 X 的任意非空开集 U, 均存在 $s=s_U\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $s,s+1\in N(U,U)$, 那么 (X,T) 为弱混合的.*

证明 由于 (X,T) 为弱混合的当且仅当它为传递的, 且对任意的非空开集 U, 都有 $N(U,U)$ 为 thick 的, 因此只需证明: 对于 X 的任意非空的开子集 U, $N(U,U)$ 为 thick 的. 进而只需证明: 如果 $N(U,U)$ 包含了长度为 k 的连续自然数段, 那么它包含了长度为 $k+1$ 的连续自然数段.

设 $a,a+1,\cdots,a+k-1\in N(U,U)$, 其中 $a\in\mathbb{Z}_+$. 那么 $U\cap T^{-(a+i)}U\neq\varnothing$, $0\leqslant i\leqslant k-1$. 由于 (X,T) 为传递的, 故由归纳法知, 存在 $t_0,t_1,\cdots,t_{k-1}\in\mathbb{Z}_+$, 使得

$$\bigcap_{i=0}^{k-1}T^{-t_i}(U\cap T^{-(a+i)}U)\neq\varnothing.$$

令 $D=\bigcap_{i=0}^{k-1}T^{-t_i}(U\cap T^{-(a+i)}U)$. 由假设, 存在 $s\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $s,s+1\in N(D,D)$,

即 $D\cap T^{-s}D\neq\varnothing$ 且 $D\cap T^{-(s+1)}D\neq\varnothing$. 显然, 对于 $i=0,1,\cdots,k-1$, 有

$$(U\cap T^{-(a+i)}U)\cap T^{-s}(U\cap T^{-(a+i)}U)\neq\varnothing,$$

$$(U\cap T^{-(a+i)}U)\cap T^{-(s+1)}(U\cap T^{-(a+i)}U)\neq\varnothing.$$

特别地, 对于 $0\leqslant i\leqslant k-1, U\cap T^{-(s+a+i)}U\neq\varnothing$ 且 $U\cap T^{-(s+1+a+i)}U\neq\varnothing$. 因此有 $s+a,s+a+1,\cdots,s+a+k-1,s+a+k\in N(U,U)$. 由上面的证明知, 对于 X 的任意非空开集 U, $N(U,U)$ 为 thick 的. 根据命题 4.4.2, (X,T) 为弱混合的. □

下面的引理说明并不是每个 syndetic 集合都能够被动力系统实现的.

引理 8.4.2 设 (X,T) 为一个拓扑遍历系统, 那么对于 X 的任意非空开集 U 和 $k\in\mathbb{N}$, $N_k(U)=\{i\in\mathbb{Z}_+:2^ki\in N(U,U)\}$ 为 syndetic 的.

证明 首先分析 $k=1$ 的情形. 如果 $N(U,U)$ 不含奇数, $N_1(U)$ 显然为 syndetic. 现在假设奇数 $a_1\in N(U,U)$, 即 $D_1=U\cap T^{-a_1}U\neq\varnothing$. 任取 $m\in N(D_1,D_1)$, 那么 $D_1\cap T^{-m}D_1\neq\varnothing$. 从而, $U\cap T^{-m}U\cap T^{-(m+a_1)}U\neq\varnothing$. 故 $\{m,a_1+m\}\subset N(U,U)$. 因为 a_1 为奇数且 $N(D_1,D_1)$ 为 syndetic, 于是 $N_1(U)$ 为 syndetic 的.

现在假设对于任意的 $1\leqslant k\leqslant l$ 和 X 的任意非空开集 U, $N_k(U)$ 均为 syndetic 的. 我们将证明, 对于 X 的任意非空开集 U, $N_{l+1}(U)$ 为 syndetic.

如果 $N_l(U)$ 不含奇数, 那么 $N_{l+1}(U)$ 显然为 syndetic. 如果具有奇数 $a_l\in N_l(U)$, 即 $D_l=U\cap T^{-2^la_l}U\neq\varnothing$. 类似地, 对于任意的 $m\in N_l(D_l)$, $2^lm,2^l(m+a_l)\subset N(U,U)$. 这说明对于任意的 $m\in N_l(D_l)$,$m,m+a_l\in N_l(U)$. 因为 a_l 为奇数且由归纳假设 $N_l(D_l)$ 为 syndetic 的, 所以 $N_{l+1}(U)$ 为 syndetic 的. □

下面的引理提供了判定一个动力系统为极端扩散的充分条件.

引理 8.4.3 设 (X,T) 为一个传递的动力系统, x 为它的一个传递点. 如果对于 x 的任意邻域 U, 都有性质:

(**) 对任意的 $r\in\mathbb{Z}_+$, 存在 $k_r\in\mathbb{N}$, 使得 $N_{k_r}(U,r)=\{n\in\mathbb{N}:2^{k_r}n-r\in N(U,U)\}$ 为 thick 的.

那么 (X,T) 为极端扩散的.

证明 首先, 假设 (Y,S) 为可逆的拓扑遍历系统. 取 U_1,U_2 为 X 的非空开集,V_1,V_2 为 Y 的非空开集. 由定义

$$N(U_1\times V_1,U_2\times V_2)=\{n\in\mathbb{Z}_+:(T\times S)^{-n}(U_2\times V_2)\cap(U_1\times V_1)\neq\varnothing\}.$$

因为 x 为传递点, 那么存在 n_0, k, 使得 $U=T^{-(n_0+k)}(U_2)\cap T^{-k}(U_1)$ 为 x 的一个邻

域. 因此

$$\begin{aligned}&N(U_1\times V_1,U_2\times V_2)\\=&\{n\in\mathbb{Z}_+:(T\times S)^{-(n+k)}(U_2\times V_2)\cap(T\times S)^{-k}(U_1\times V_1)\neq\varnothing\}\\=&\{n\in\mathbb{Z}_+:(T^{-(n+k)}U_2\cap T^{-k}U_1)\times(S^{-(n+k)}V_2\cap S^{-k}V_1)\neq\varnothing\}\\\supset&\, n_0+\{m\in\mathbb{Z}_+:(T^{-m}U\cap U)\times(S^{-m}S^{-(n_0+k)}V_2\cap S^{-k}V_1)\neq\varnothing\}.\end{aligned}$$

由于 (Y,S) 为可逆的传递系统, 故存在非空开集 $V\subset S^{-k}(V_1)$ 和 $r\in\mathbb{N}$, 使得 $S^{-r}V\subset S^{-(n_0+k)}(V_2)$. 所以

$$N(U_1\times V_1,U_2\times V_2)\supset n_0+N(U\times V,U\times S^{-r}V).$$

由性质 (**) 知, 存在 k_r, 使得 $N_{k_r}(U,r)$ 为 thick. 由引理 8.4.2, $N_{k_r}(V)$ 为 syndetic 的. 所以 $N_{k_r}(U,r)\cap N_{k_r}(V)\neq\varnothing$. 取 $m\in N_{k_r}(U,r)\cap N_{k_r}(V)$. 那么 $2^{k_r}m-r\in N(U,U)$ 且 $2^{k_r}m\in N(V,V)$, 进而

$$2^{k_r}m-r\in N(V,S^{-r}V)\cap N(U,U)=N(U\times V,U\times S^{-r}V).$$

所以 $n_0+2^{k_r}m-r\in N(U_1\times V_1,U_2\times V_2)$.

现在假设 (Y,S) 为一个拓扑遍历的系统,(Y_1,S_1) 为 (Y,S) 的自然扩充. 那么 (Y_1,S_1) 为一个可逆的拓扑遍历系统. 由上面的分析知,$(X\times Y_1,T\times S_1)$ 为传递的. 因为 $(X\times Y,T\times S)$ 为 $(X\times Y_1,T\times S_1)$ 的一个因子, 故 $(X\times Y,T\times S)$ 也为传递的, 即 (X,T) 为极端扩散的. 这就完成了我们的证明. □

有了上面的准备, 我们有

定理 8.4.4　*存在极端扩散的, 但不为弱混合的动力系统.*

证明　我们将在两个符号的单边转移 (Σ,S) 中构造所需要的动力系统, 事实上, 此系统为一个回复点 $x=(x_0,x_1,\cdots)\in\Sigma$ 的轨道闭包. 为了做到这一点, 我们归纳地构造一列有限字 C_i, 使得 C_{i+1} 的开始段为 C_i 且 x 为 C_i 的极限点.

设 $F:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{Z}_+$ 为 $F(l)=(\phi(l),\varphi(l))$, 使得 $\phi(l+1)\leqslant l$ 且对于任意的 $(n,r)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}_+$ 均存在无限多个 $j\in\mathbb{N}$ 满足 $F(j)=(n,r)$. 首先, 取

$$C_0=(0),\quad C_1=(0,0,1,0,0)=(x_0,x_1,\cdots,x_4)\text{ 且 }k_1=5.$$

令

$$W_1=\{2\}=\{i:x_i=1,i\leqslant k_1-1\}\text{ 且 }B_1=W_1-W_1=\{0\},$$

其中 $A-B=\{a-b\geqslant0:a\in A,b\in B\}$. 下面我们来归纳地构造 C_l. 如果 C_l 的长度为 k_l, 定义

$$W_l=\{i:x_i=1,0\leqslant i\leqslant k_l-1\}\text{ 且 }B_l=W_l-W_l.\tag{8.4.1}$$

进而, B_l 满足:

$(1)_l$ $1 \notin B_l$ 且使得 $\{s, s+1\} \subset B_l$ 的 $s \in \mathbb{Z}_+$ 不存在;

$(2)_l$ C_l 的开始段为 C_{l-1}.

显然, $l=1$ 时 $(1)_l$ 和 $(2)_l$ 均满足. 现在假设 C_n 已经构造好 $(1 \leqslant n \leqslant l)$, 且满足 $(1)_n$ 和 $(2)_n$. 我们如下构造 C_{l+1}.

设 $p_{l,1}, p_{l,2}, \cdots, p_{l,l+1}, q_l$ 为待定的正整数. 令

$$q_{l,i} = 2^{k_{\phi(l+1)}+1}(q_l + i) - k_{\phi(l+1)} - \varphi(l+1), \quad 对于 i = 1, 2, \cdots, l+1. \tag{8.4.2}$$

定义

$$\begin{aligned} C_{l+1} = {} & C_l 0^{p_{l,1}} C_{\phi(l+1)} 0^{q_{l,1}} C_{\phi(l+1)} 0^{p_{l,2}} C_{\phi(l+1)} 0^{q_{l,2}} C_{\phi(l+1)} 0^{p_{l,3}} \\ & \cdots 0^{p_{l,l+1}} C_{\phi(l+1)} 0^{q_{l,l+1}} C_{\phi(l+1)}. \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

令

$$a_1^l = k_l + p_{l,1}, \quad a_{2i-1}^l = k_{\phi(l+1)} + p_{l,i} \quad 且\ a_{2j}^l = q_{l,j} + k_{\phi(l+1)}, \tag{8.4.4}$$

其中 $i = 2, 3, \cdots, l+1; j = 1, 2, \cdots, l+1$.

由 (8.4.1) 和 (8.4.4)

$$W_{l+1} = W_l \cup \bigcup_{k=1}^{2(l+1)} (W_{\phi(l+1)} + (a_1^l + a_2^l + \cdots + a_k^l)). \tag{8.4.5}$$

因为 $W_{\phi(l+1)} \subset W_l$, 故 $W_l - W_{\phi(l+1)}, W_{\phi(l+1)} - W_l \subset W_l - W_l = B_l$. 于是, 由 (8.4.1) 和 (8.4.5) 有

$$\begin{aligned} B_{l+1} \subset B_l \cup & \bigcup_{k=1}^{2(l+1)} ((a_1^l + a_2^l + \cdots + a_k^l) \pm B_l) \\ \cup & \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant 2(l+1)} ((a_{i+1}^l + a_{i+2}^l + \cdots + a_j^l) \pm B_{\phi(l+1)}). \end{aligned} \tag{8.4.6}$$

取 $p_{l,1}, p_{l,2}, \cdots, p_{l,l+1}, q_l$ 使得 B_{l+1} 满足 $(1)_{l+1}$(取法留作练习).

设 $x = \lim_l C_l$, X 为 x 在转移 S 下轨道的闭包. 下面证明 (X, S) 为极端扩散的但不为弱混合的.

设 $U = \{y \in X : y_0 = 1\}$. 那么

$$N(x, U) = \bigcup_{l=1}^{+\infty} W_l 且 N(U, U) = \bigcup_{l=1}^{+\infty} B_l. \tag{8.4.7}$$

因为 $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \cdots$ 且对所有的 $l,(1)_l$ 都满足, 所以 $N(U,U)$ 不为 thick, 进而 (X,S) 不为弱混合的.

现在验证 (X,S) 满足引理 8.4.3 中的性质 $(**)$. 因为 x 为回复点, 故 (X,S) 为传递的. 对于 x 的任意邻域 V, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $V_n = [C_n] \subset V$. 设 $r \in \mathbb{Z}_+$, 令 $k = k_n + 1$. 由 F 的定义知, 存在无限多个 $l \in \mathbb{N}$, 使得

$$F(l+1) = (\phi(l+1), \varphi(l+1)) = (n,r). \tag{8.4.8}$$

由 C_{l+1} 的定义及 (8.4.3) 和 (8.4.8), 不难验证

$$N(x,V_n) \supset \{a_1^l, a_1^l + a_2^l, \cdots, a_1^l + a_2^l + \cdots + a_{2(l+1)}^l\}.$$

由 (8.4.2),(8.4.4) 和 (8.4.8) 得到

$$a_{2i}^l = q_{l,i} + k_{\phi(l+1)} = 2^{k_n+1}(q_l + i) - \varphi(l+1) = 2^k(q_l + i) - r.$$

因此

$$\begin{aligned} N(V,V) \supset N(V_n,V_n) &= N(x,V_n) - N(x,V_n) \supset \{a_2^l, a_4^l, \cdots, a_{2(l+1)}^l\} \\ &= \{2^k(q_l+1) - r, 2^k(q_l+2) - r, \cdots, 2^k(q_l+l+1) - r\}. \end{aligned}$$

故 $N_k(V,r) = \{n \in \mathbb{N} : 2^k n - r \in N(V,V)\} \supset \{q_l+1, q_l+2, \cdots, q_l+(l+1)\}$. 这就表明 $N_k(V,r)$ 为 thick 的, 所以由引理 8.4.3, (X,S) 为极端扩散的. □

因为一个极端扩散的系统弱不交于所有的 $\mathcal{F}_{\text{ts}}$ 传递的系统, 所以由定理 4.5.3, 它为 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 传递的. 下面我们构造一个强扩散的但不为 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 传递的动力系统. 首先需要一个引理来验证一个动力系统是否为强扩散的.

引理 8.4.5　设 (X,T) 为一个传递的动力系统, x 为传递点. 如果对于 x 的任意邻域 U, 都有性质 $(*)$: 对于任意的 $r \in \mathbb{Z}_+$ 和 $q \in \mathbb{N}$, 存在 $p_1, \cdots, p_q > r$, 使得对所有的 $1 \leqslant i_1 \leqslant j_1 \leqslant q$, 都有 $p_{i_1,j_1} - r \in N(U,U)$, 其中 $p_{i_1,j_1} = \sum_{l=i_1}^{j_1} p_l$, 那么 (X,T) 为强扩散的.

证明　设 (Y,S) 为一个可逆的 E 系统. 那么存在 Y 上的一个不变测度 μ 满足 $\text{supp}(\mu) = Y$. 设 U_1, U_2 为 X 的非空开集, V_1, V_2 为 Y 的非空开集. 那么由引理 8.4.3 的证明, 存在 n_0, r, x 的一个邻域 U 和 Y 的一个非空开集 V, 使得

$$N(U_1 \times V_1, U_2 \times V_2) \supset n_0 + N(U \times V, U \times S^{-r}(V)).$$

因为 $\text{supp}(\mu) = Y$, 故存在 $q \in \mathbb{N}$ 满足 $\mu(V) > \dfrac{1}{q} > 0$. 对 U, r, q 利用假设可得到 $p_1, \cdots, p_q > r$, 使得对于任意的 $1 \leqslant i_1 \leqslant j_1 \leqslant q$, 都有 $p_{i_1,j_1} - r \in N(U,U)$, 其中 $p_{i_1,j_1} = \sum_{l=i_1}^{j_1} p_l$.

如果 $V, S^{-p_1}(V), \cdots, S^{-(p_1+\cdots+p_q)}(V)$ 为两两不交的, 那么

$$\mu(V \cup S^{-p_1}(V) \cup \cdots \cup S^{-(p_1+\cdots+p_q)}(V)) > 1.$$

于是存在 $1 \leqslant i_1 \leqslant j_1 \leqslant q$, 使得 $V \cap S^{-p_{i_1,j_1}}(V) \neq \varnothing$. 因此 $p_{i_1,j_1} - r \in N(U \times V, U \times S^{-r}(V))$. 故

$$p_{i_1,j_1} - r + n_0 \in N(U_1 \times V_1, U_2 \times V_2).$$

一般情况下, 我们设 (Y,S) 为一个 E 系统,(Y_1,S_1) 为 (Y,S) 的自然扩充. 作为一个简单的练习, 不难验证, (Y_1,S_1) 也为一个 E 系统. 那么由我们的讨论知, $(X \times Y_1, T \times S_1)$ 为传递的. 因为 $(X \times Y, T \times S)$ 为 $(X \times Y_1, T \times S_1)$ 的一个因子, $(X \times Y, T \times S)$ 也为传递的. 这就完成了证明. □

定理 8.4.6 *存在强扩散的, 但不为极端扩散的动力系统.*

证明 我们仅给出大致构造的方法, 具体细节请读者完成. 跟前面一样, 我们将在两个符号的单边转移 (Σ, S) 中构造所需要的动力系统, 事实上, 此系统为一个回复点 $x = (x_0, x_1, \cdots) \in \Sigma$ 的轨道闭包. 为了做到这一点, 我们归纳地构造一列有限字 C_i, 使得 x 为 C_i 的极限点.

首先, 令 $\{\phi(i)\}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的一个序列, 使得对于每个 $i \in \mathbb{Z}_+$, 有无限多个 $j \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $\phi(j) = i$. 再令

$$C_0 = (0), \quad C_1 = (0,0,1,0,0) = (x_0, \cdots, x_4), \quad 且\ k_1 = 5.$$

取 $W_1^0 = \{2\} = \{i : x_i = 1, i \leqslant k_1 - 1\}$, 且 $B_1^0 = W_1^0 - W_1^0 = \{0\}$.

我们来归纳地构造 C_l. 如果 C_l 的长度为 k_l, 定义

$$W_l^0 = \{i : x_i = 1, i \leqslant k_l - 1\}, \quad 且\ B_l^0 = W_l^0 - W_l^0.$$

进而, B_l^0 满足:

$(1)_l$ 1 在 $1_{B_l^0}$ 中出现得非常少;

$(2)_l$ C_l 的开始段为 C_{l-1}.

显然, $l = 1$ 时 $(1)_l$ 和 $(2)_l$ 均满足. 现在假设 C_n 已经构造好 $(1 \leqslant n \leqslant l)$, 且满足 $(1)_n$ 和 $(2)_n$. 我们如下来构造 C_{l+1}.

设 $p_1^l, p_2^l, \cdots, p_l^l, p_{i,j}^l \geqslant k_l$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l+1)$ 为待定的正整数. 对于 $1 \leqslant i < j \leqslant l+1$, 令 $q_{i,j}^l = p_i^l + \cdots + p_{j-1}^l + (j-(i+1))k_l - \phi(l+1)$ (由我们的构造, 它为正的). 当 $1 \leqslant i < j \leqslant l+1$ 时, 设 $A_{i,j}^l = C_l 0^{q_{i,j}^l} C_l$. 且设

$$C_{l+1} = A_{1,2}^l 0^{p_{1,2}^l} A_{1,3}^l 0^{p_{1,3}^l} \cdots A_{1,l+1}^l 0^{p_{1,l+1}^l} A_{2,3}^l 0^{p_{2,3}^l} A_{2,4}^l 0^{p_{2,4}^l} \cdots A_{l,l+1}^l 0^{p_{l,l+1}^l}.$$

由 C_{l+1} 的构造得到

$$W_{l+1}^0 = W_l^0 \bigcup (W_l^0 + (q_{1,2}^l + k_l)) \bigcup (W_l^0 + (q_{1,2}^l + k_l) + (p_{1,2}^l + k_l))$$
$$\bigcup \cdots \bigcup (W_l^0 + (q_{1,2}^l + k_l) + (p_{1,2}^l + k_l) + \cdots + (q_{l,l+1}^l + k_l)).$$

记 $(q_{1,2}^l + k_l, p_{1,2}^l + k_l, q_{1,3}^l + k_l, p_{1,3}^l + k_l, \cdots, q_{l,l+1}^l + k_l, p_{l,l+1}^l + k_l)$ 为 $(a_1^l, a_2^l, a_3^l, \cdots, a_{l(l+1)-1}^l, a_{l(l+1)}^l)$. 那么

$$B_{l+1}^0 = W_{l+1}^0 - W_{l+1}^0 = B_l^0 \bigcup \Big(\bigcup_{1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant l(l+1)-1} ((a_{j_1}^l + \cdots + a_{j_2}^l) \pm B_l^0) \Big).$$

对 $1 \leqslant i < j \leqslant l+1$, 取 $p_1^l, p_2^l, \cdots, p_l^l, p_{i,j}^l$, 使得 B_{l+1}^0 满足 $(1)_{l+1}$.

设 $x = \lim\limits_{l \to \infty} C_l$, X 为 x 在转移 S 下轨道的闭包. 取 $U = \{x \in X : x_0 = 1\}$, 则 $N(U,U) = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l^0 \notin \mathcal{F}_{\rm pubd}$. 这就说明了 (X,S) 不为极端扩散的. 通过合理选择参数, 利用引理 8.4.5, 我们能够证明 (X,S) 为强扩散的. □

习　题　8.4

1. 证明：一个拓扑遍历的动力系统 (E 系统) 的自然扩充仍然为拓扑遍历的 (E 系统).

2. 设 (X,T) 为传递的动力系统, $(\tilde{X},\tilde{T})$ 为它的自然扩充, $p_i : \tilde{X} \to X$ 为到第 i 个坐标的投射. 证明：对每个 $i \in \mathbb{N}$,p_i 为极小的. 由此, 我们可以证明上一个练习. 提示：如果 A 为 $\tilde{X}$ 的一个紧致子集且满足对任意的 i 成立 $p_i(A) = X$, 那么 $A = \tilde{X}$.

3. 完成定理 8.4.4 的证明. 提示：参见文献 (Huang-Ye, 2005).

4. 完成定理 8.4.6 的证明. 提示：参见文献 (Huang-Ye, 2002b).

§8.5　其他例子以及总结

我们已经定义了强混合、满扩散、IP* 混合和 mild 混合的概念, 并证明了

$$\text{强混合} \subset \text{满扩散} \subset \text{IP}^*\text{混合} \subset \text{mild 混合}$$
$$\subset \mathcal{F}_{\rm lbd1}\text{ 混合} \subset \mathcal{F}_{\rm ts}\text{ 混合} \subset \text{弱混合}.$$

在这一节里, 我们将构造一些具体的例子来说明：

$$\text{强混合} \subsetneq \text{满扩散} \subsetneq \text{IP}^*\text{混合} \subsetneq \text{mild 混合}.$$

关于 mild 混合、$\mathcal{F}_{\rm lbd1}$ 混合、$\mathcal{F}_{\rm ts}$ 混合和弱混合是互不相同的性质的证明, 我们留作习题.

由定理 8.3.3 和定理 8.3.4, 强混合蕴含满扩散, 并且在极小情形下反之也成立. 现在我们给一个例子来说明, 即使所考虑的系统是一个 E 系统, 如果没有极小性的假设, 反之也未必成立.

Huang etc. (2005) 指出, 如果 (X,T) 为拓扑 K, 那么对于任意的 $A \in \mathcal{F}_{\inf}$ 和任意的有限非平凡的开覆盖 $\mathcal{U}$, 序列熵 $h_A(T,\mathcal{U}) > 0$. 因此, 一个拓扑 K 的动力系统为满扩散. 为了给出一个满扩散但不为强混合的动力系统的例子, 我们需要如下定义:

定义 8.5.1 *一个动力系统 (X,T) 称为具有***强性质** *P, 如果对于 X 中任意有限个非空的开集 $U_1, U_2, \cdots, U_n$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得只要 $k \geqslant 2$ 且 $s = (s(1), s(2), \cdots, s(k)) \in \{1, 2, \cdots, n\}^k$, 那么存在 $x \in X$ 满足 $x \in U_{s(1)} \cap T^{-N} U_{s(2)} \cap \cdots \cap T^{-(k-1)N} U_{s(k)}$.*

引理 8.5.2 *具有强性质 P 的动力系统为拓扑 K 的, 因此为满扩散的.*

证明留作习题.

在文献 (Blanchard, 1992) 中, Blanchard 构造了一个有限字母 A 上的子转移 (X,σ), 使得 (X,σ) 为一个 E 系统但不为强混合的, 并且由原文性质 4 知, (X,σ) 具有强性质 P. 所以我们就有

例 8.5.3 *存在满扩散的但不为强混合的动力系统.*

回忆一下, 如果 $A \subset \mathbb{Z}_+$, 那么 $A - A = \{a - b \geqslant 0 : a, b \in A\}$, $(A-A)_{\mathbb{Z}} = \{a - b : a, b \in A\}$. 如果 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 的一族集合, 则 $\mathcal{F} - \mathcal{F} = \{A - A : A \in \mathcal{F}\}$. 我们知道, (X,T) 为 $\mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 扩散的 (即强扩散的) 当且仅当它为 $(\mathcal{F}_{\text{pubd}} - \mathcal{F}_{\text{pubd}})^*$ 传递的, 为 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 扩散的 (即扩散的) 当且仅当它为 $(\mathcal{F}_{\text{ps}} - \mathcal{F}_{\text{ps}})^*$ 传递的. 一般的, 我们有

定理 8.5.4 *设 (X,T) 为一个动力系统, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\inf}$ 为一个族. 如果 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 扩散的且弱混合的, 那么 (X,T) 为 $(\mathcal{F} - \mathcal{F})^*$ 传递的.*

证明 由于 $\mathcal{F}$ 扩散的和弱混合在自然扩充下保持不变, 不妨假设 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 扩散的且为弱混合的可逆系统. 首先, 我们有如下断言:

断言 对于 X 的任意非空开集 U_1, U_2 和 $A \in \mathcal{F}$, 均有 $N_{\mathbb{Z}}(U_1, U_2) \cap (A-A)_{\mathbb{Z}} \neq \varnothing$.

断言的证明 设断言不成立, 那么存在 X 的非空开集 U_1, U_2 和 $A = \{a_1 < a_2 < a_3 < \cdots\} \in \mathcal{F}$ 满足 $N_{\mathbb{Z}}(U_1, U_2) \cap (A-A)_{\mathbb{Z}} = \varnothing$. 故对任意的 $i, j \in \mathbb{N}$, 都有 $U_1 \cap T^{-(a_j - a_i)} U_2 = \varnothing$, 进而 $T^{-a_i} U_1 \subset T^{-a_j}(X \setminus U_2)$.

设 $x \in X, n \in \mathbb{N}$. 如果 $x \notin \bigcap_{j=1}^n T^{-a_j}(X \setminus U_1)$, 即 $x \in \bigcup_{j=1}^n T^{-a_j} U_1$. 于是存在 $1 \leqslant i \leqslant n$ 满足 $x \in T^{-a_i} U_1$. 因此 $x \in T^{-a_i} U_1 \subset \bigcap_{j=1}^n T^{-a_j}(X \setminus U_2)$. 所以 $\bigcap_{j=1}^n T^{-a_j}(X \setminus U_1) \bigcup \bigcap_{j=1}^n T^{-a_j}(X \setminus U_2) = X$. 于是对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 总有 $N(\bigvee_{j=1}^n T^{-a_j}\{X \setminus U_1, X \setminus U_2\}) = 2$. 因此, (X,T) 不为 $\mathcal{F}$ 扩散的, 矛盾! 这就完成了断言的证明.

设 U_1, U_2 为 X 的非空开集. 因为 (X,T) 为弱混合的, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $U = U_1 \cap T^{-n} U_2 \neq \varnothing$ 并且 $V = U_2 \cap T^{-n} U_1 \neq \varnothing$. 显然, $N_{\mathbb{Z}}(U, V) \subset N_{\mathbb{Z}}(U_1, U_2) \cap N_{\mathbb{Z}}(U_2, U_1)$. 由断言, 对于任意的 $A \in \mathcal{F}$, 都有 $N_{\mathbb{Z}}(U, V) \cap (A-A)_{\mathbb{Z}} \neq \varnothing$, 进而 $N_{\mathbb{Z}}(U_1, U_2) \cap N_{\mathbb{Z}}(U_2, U_1) \cap (A-A)_{\mathbb{Z}} \neq \varnothing$. 不难发现, 如果 $n \in N_{\mathbb{Z}}(U_1, U_2) \cap$

$N_{\mathbb{Z}}(U_2,U_1)\cap(A-A)_{\mathbb{Z}}$, 那么 $|n|\in N(U_1,U_2)\cap(A-A)$. 所以, 对于任意的 $A\in\mathcal{F}$, 有 $N(U_1,U_2)\cap(A-A)\neq\varnothing$, 即 $N(U_1,U_2)\in(\mathcal{F}-\mathcal{F})^*$. □

令 $\Delta=\mathcal{F}_{\inf}-\mathcal{F}_{\inf}$, 我们有

推论 8.5.5　*满扩散蕴含了 Δ^* 传递性.*

证明　因为满扩散的动力系统为 $\mathcal{F}_{\inf}$ 扩散的且弱混合的, 那么由定理 8.5.4 知它为 Δ^* 传递的. □

以下我们说明: 满扩散 $\neq$ IP* 混合.

例 8.5.6　*存在 IP* 传递的但不为满扩散的动力系统.*

证明　由推论 8.5.5, 满扩散蕴含了 Δ^* 传递性. 因此, 我们只要构造一个 IP* 传递的但不为 Δ^* 传递的动力系统.

令 $S=\{s_i\in\mathbb{N}:s_{j+1}>4\Big(\sum\limits_{k=1}^{j}s_k+j\Big),\ j\in\mathbb{N}\}$. 我们有

断言　$A=\mathbb{Z}_+\setminus(S-S)$ 为平移不变的 IP* 集, 即对于任意的 $k\in\mathbb{Z}$, $A+k=\{a+k\geqslant0:a\in A\}$ 为一个 IP* 集.

断言的证明　否则, 将存在 $k\in\mathbb{Z}$, 使得 $A+k$ 不为一个 IP* 集. 于是存在一个 IP 集 B 满足 $B\cap(A+k)=\varnothing$. 不失一般性, 设 B 为由 $0<p_1<p_2<p_3<\cdots$ 生成的 IP 集, 其中 $p_{j+1}>\sum\limits_{i=1}^{j}p_i$. 因为 $B\cap(A+k)=\varnothing$ 且 $(A+k)\cup((S-S)+k)\supset\{|k|,|k|+1,\cdots\}$, $B\setminus\{0,1,\cdots,|k|\}\subset(S-S)+k$. 故存在 $N\geqslant|k|+1$, 使得 $B_N\subset(S-S)+k$, 这里 B_N 为由 $p_N,p_{N+1},\cdots$ 生成的 IP 集. 显然, $p_N\geqslant|k|+1$.

因为当 $i\geqslant N$ 时, $p_i\in(S-S)+k$ 且 $p_i>|k|$, 存在 $n(i),m(i)\in\mathbb{N}$ 满足 $n(i)>m(i)$ 且 $p_i=s_{n(i)}-s_{m(i)}+k$. 注意到 $j\in\mathbb{N}$ 时有 $p_{i+1}>p_i$ 且 $s_{j+1}>4\Big(\sum\limits_{k=1}^{j}s_k+j\Big)$. 因此, $n(i+1)\geqslant n(i)$ 且 $\lim\limits_{i\to+\infty}n(i)=+\infty$. 取 $N_1>N$, 使得当 $i\geqslant N_1$ 时 $n(i)\geqslant|k|$.

假设 $i_1>i_2\geqslant N_1$. 因为 $p_{i_1}+p_{i_2}\in B_N\subset(S-S)+k$ 且 $p_{i_1}+p_{i_2}=s_{n(i_1)}+s_{n(i_2)}-s_{m(i_1)}-s_{m(i_2)}+2k$, 可以找到 $l(i_1,i_2)\in\mathbb{N}$, 使得 $p_{i_1}+p_{i_2}=s_{n(i_1)}-s_{l(i_1,i_2)}+k$(由于 $s_{j+1}>4\Big(\sum\limits_{k=1}^{j}s_k+j\Big)$). 故

$$s_{n(i_2)}+s_{l(i_1,i_2)}+k=s_{m(i_1)}+s_{m(i_2)}. \tag{8.5.1}$$

因为 $n(i_2)\geqslant|k|$ 且 $n(i_2)>m(i_2)$, 由 (8.5.1) 知 $s_{n(i_2)}=s_{m(i_1)}$. 所以当 $i_1>i_2\geqslant N_1$ 时 $n(i_2)=m(i_1)$. 由于 $n(N_1)=m(j),j\geqslant N_1+1$, 且当 $l\in\mathbb{N}$ 时 $n(N_1+l)=m(j),j\geqslant N_1+l$. 不难发现, 当 $i\geqslant N_1$ 时 $n(i)=n(N_1)$, 这与 $\lim\limits_{i\to+\infty}n(i)=+\infty$ 矛盾. 这就完成了断言的证明.

令

$$\mathcal{F}_A=\Big\{B\subset\mathbb{Z}_+:\exists i_1,i_2,\cdots,i_l\in\mathbb{Z},\text{ 使得 }B\supset\bigcap_{k=1}^{l}(A+i_k)\Big\}.$$

因为两个平移不变的 IP* 集的交仍然是平移不变的 IP* 集, $\mathcal{F}_A$ 为平移不变的 thick 族且 $\mathcal{F}_A$ 的任意一个元素都是 IP* 集. 因为 $A\in\mathcal{F}_A$, 由定理 4.5.3, 具有一个 $\mathcal{F}_A$ 传递的动力系统 (X,T) 和 X 的一个非空开集 U, 使得 $N(U,U)=A\cup\{0\}$. 因为 $\mathcal{F}_A$ 的任意一个元素都是 IP* 集, (X,T) 为 IP* 传递的. 进而, 由于 $N(U,U)=A\cup\{0\}$, 故 (X,T) 不为周期的系统. 因此可以找到非空开集 $U_1,U_2\subset U$ 满足 $U_1\cap U_2=\varnothing$. 显然, $N(U_1,U_2)\subset N(U,U)\setminus\{0\}=A$, 也就是说, $N(U_1,U_2)\cap(S-S)=\varnothing$. 所以 (X,T) 不为 Δ^* 传递的, 进而由推论 8.5.5 知不为满扩散的. 这就完成了我们的构造. □

例 8.5.7　*存在 mild 混合但不为 IP* 混合的动力系统.*

证明　选取 $S\in\mathcal{F}_{\text{inf}}$, 使得 $S=\Big\{s_i\in\mathbb{N}:s_{j+1}>4\Big(\sum_{k=1}^{j}s_k+j\Big)\Big\}$. 设 B 为由 S 所生成的 IP 集. 令 $A=\mathbb{Z}_+\setminus B,A_k=\bigcap_{i=-k}^{k}(A+i)$, $k\in\mathbb{N}$. 固定 $k\in\mathbb{N}$, 有

断言　对于任意满足 $a\geqslant s_{k+1}$ 且 $b>2a$ 的 $a,b\in\mathbb{N}$, 有 $A_k\cap\{a,b,a+b,b-a\}\neq\varnothing$. 特别地,$A_k$ 为一个 $(\mathcal{F}_{\text{ip}}-\mathcal{F}_{\text{ip}})^*$ 集.

断言的证明　假设断言不成立. 那么存在 $a,b\in\mathbb{N}$ 满足 $a\geqslant s_{k+1},b>2a$, 使得 $A_k\cap\{a,b,a+b,b-a\}=\varnothing$. 因为 $a,b-a\geqslant k+1$, 有

$$\{a,b,a+b,b-a\}\subset\mathbb{Z}_+\setminus(A_k\cup\{0,1,2,\cdots,k\})\subset\bigcup_{i=-k}^{k}(B+i).$$

事实上, 对于 $j=a,b,a+b,b-a$, 存在一个有限集 $I_j\subset\mathbb{N}$ 和 $|n_j|\leqslant k$, 使得 $j=\sum_{l\in I_j}s_l+n_j$. 由于 $a>s_{k+1}$, 可有 $\max\{I_a\}>k+1$.

因为 $\Big|\Big(\sum_{l\in I_{a+b}}s_l\Big)-\Big(\sum_{r\in I_a}s_r+\sum_{t\in I_b}s_t\Big)\Big|=|n_{a+b}-(n_a+n_b)|\leqslant 3k$ 且当 $j\in\mathbb{N}$ 时 $s_{j+1}>4\Big(\sum_{i=1}^{j}s_i+j\Big)$, 不难发现, $I_{a+b}\Delta(I_a\cup I_b)\subset\{1,2,\cdots,k\}$ 且 $I_a\cap I_b\subset\{1,2,\cdots,k\}$. 类似地, 有 $I_b\Delta(I_a\cup I_{b-a})\subset\{1,2,\cdots,k\}$ 且 $I_{b-a}\cap I_a\subset\{1,2,\cdots,k\}$. 特别地, $I_a\cap I_b\subset\{1,2,\cdots,k\}$ 且 $I_a\setminus I_b\subset\{1,2,\cdots,k\}$. 这意味着 $I_a\subset\{1,2,\cdots,k\}$, 与 $\max I_a>k+1$ 矛盾. 这就完成了断言的证明.

设 $\mathcal{F}_A=\{B\subset\mathbb{Z}_+:\exists\ k\in\mathbb{N}\text{ 使得 }B\supset A_k\}$. 由于当 $k_1\geqslant k_2$ 时 $A_{k_1}\subset A_{k_2}$, 由上面的断言知, $\mathcal{F}_A$ 为一个平移不变的 thick 族, 且 $\mathcal{F}_A$ 中的每个元素均为 $(\mathcal{F}_{\text{ip}}-\mathcal{F}_{\text{ip}})^*$ 集. 由定理 4.5.3, 存在一个 $\mathcal{F}_A$ 传递的动力系统 (X,T) 和 X 的一个非空开集 U,

使得 $N(U,U) = A \cup \{0\}$. 因为 $\mathcal{F}_A$ 的每个元素都是一个 $(\mathcal{F}_{\rm ip} - \mathcal{F}_{\rm ip})^*$ 集, 故 (X,T) 为 $(\mathcal{F}_{\rm ip} - \mathcal{F}_{\rm ip})^*$ 传递的, 即 mild 混合的. 进而由于 $N(U,U) = A \cup \{0\}$ 知, (X,T) 不为一个周期系统. 因此, 可以找到非空开集 $U_1, U_2 \subset U$ 满足 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. 显然, $N(U_1,U_2) \subset N(U,U) \setminus \{0\} = A$, 也就是说, $N(U_1,U_2) \cap B = \varnothing$. 因此, (X,T) 不为 IP* 传递的. 这就说明 (X,T) 为一个 mild 混合但不为 IP* 传递的动力系统. □

综合起来, 我们一共用了三种方法来对传递的动力系统进行分类: 回复时间集 $N(U,V)$、复杂性函数和弱不交性. 我们将有关的已知结论总结成表 8.5.1.

表 8.5.1

传递的属性	回复时间集	复杂性函数 $C_A(\mathcal{U})$	弱不交性
强混合	有限余集	不存在	不存在
满扩散	Δ^* 集?	$+\infty,\ \forall A \in \mathcal{F}_{\rm inf}$	不存在
mild 混合	$(\mathrm{IP}-\mathrm{IP})^*$ 集	$+\infty,\ \forall A \in \mathcal{F}_{\rm ip}$	传递的系统
弱混合的	thick 集	序列熵 >0	不存在
极端扩散	?	?	拓扑遍历的
强扩散	Poincaré集	$+\infty,\ \forall A \in \mathcal{F}_{\rm pubd}$	E系统
扩散	回复集	$+\infty,\ \forall A \in \mathcal{F}_{\rm ps}$	极小的系统
弱扩散	未知	不存在?	极小的等度连续系统
完全传递的	未知	不存在?	周期系统
传递性	无限集	不存在?	强混合

表 8.5.1 可作如下解释. 例如, 设 (X,T) 为一个动力系统, 那么 (X,T) 为 mild 混合的当且仅当它为 $(\mathcal{F}_{\rm ip} - \mathcal{F}_{\rm ip})^*$ 混合的, 当且仅当对于 X 的任意非平凡的有限开覆盖 $\mathcal{U}$ 和任意的 $\mathcal{F}_{\rm ip}$ 集 A, 都有 $C_A(\mathcal{U}) = +\infty$, 当且仅当它弱不交于任意的传递系统.

习　题　8.5

1. 证明: $\mathcal{F}_{\rm lbd1}$ 混合、$\mathcal{F}_{\rm ts}$ 混合和弱混合是互不相同的动力学性质. 提示: 利用定理 4.5.2.

2. 证明: mild 混合和 $\mathcal{F}_{\rm lbd1}$ 混合不同. 提示: 构造一个 IP 集 A, 使得 $A - A \notin \mathcal{F}_{\rm pubd}$.

3. 证明引理 8.5.2. 提示: 参见定理 8.3.4 的证明.

4. 证明: 不具有一个动力学性质 P 使得弱混合 $=P^\curlywedge$. 提示: 注意到弱混合严格比极端扩散强.

5. 两个满扩散系统的乘积是否仍然为满扩散? 2 满扩散是否等价于满扩散? 注: 这两个问题至今没有解决.

§8.6　弱扩散、扩散和单生群

一个动力系统称为弱扩散是指它弱不交于所有的极小的等度连续系统. 显然, 强扩散 $\subset$ 扩散 $\subset$ 弱扩散. 在 §3.7 中, 我们运用单生群的方法证明了存在扩散但不

是弱混合的系统, 而在 §8.4 里, 我们给出一个具体的例子. 现在, 我们将讨论强扩散、扩散和弱扩散是否为同一个动力学性质的问题. 不同于 §8.4 中用到的方法, 这里将应用单生群的理论. 关于单生群的理论具体参见 §3.7 或文献 (Akin-Glasner, 2001; Glasner, 1998). 虽然我们不能解决扩散和弱扩散是否是相同的动力学性质这个问题, 但是可以将问题转化成具有某些特殊性质的单生群的存在性问题.

因为存在不为 Poincaré 序列的回复集 (Kriz, 1987), 所以表面上看来好像强扩散和扩散是不同的动力学性质. 但是由于我们并不知道是否这个回复集能够被一个动力系统实现, 所以不能匆忙定论. 在这一节里, 我们将讨论集中到扩散和弱扩散是否是相同的动力学性质这个问题上, 而且主要限制到一个几乎等度连续系统上. 首先, 我们分别给出弱扩散和扩散的等价描述形式. 然后, 我们证明具有一个完备的单生群为极小几乎周期的但不具有不动点性质, 等价地讲, 存在一个几乎等度连续系统为弱扩散但不为扩散的.

在第 3 章中, 在紧致的度量空间 X 到 Y 的连续映射的全体 $C(X;Y)$ 上, 我们定义了度量 $D(g_1,g_2)=\sup_{x\in X}d(g_1(x),g_2(x))$. 因为在这个度量下映射的复合运算是联合连续的, 所以 $C(X;X)$ 为一个可度量的拓扑半群. 设 $\mathrm{Homeo}(X)\subseteq C(X;X)$ 为 X 到自身的自同胚的全体. 在度量 D 下, $\mathrm{Homeo}(X)$ 形成一个完备的拓扑群. 对于 $\mathrm{Homeo}(X)$ 的任意交换闭子群 Λ, D 为 Λ 上的一个不变度量.

设 $x\in X$, 定义赋值映射 $ev_x: C(X;X)\to X \quad ev_x(f)=f(x)$. 它为一个一致连续的映射. 如果 (X,T) 为一个拓扑动力系统, d 为 X 上的一个度量, 定义 $d_T(x,y)=\sup_{i\in\mathbb{Z}_+}d(T^ix,T^iy)$.

下面的引理是定理 3.7.1.

引理 8.6.1 *设 (X,T) 为一个几乎等度连续系统,$x\in \mathrm{Trans}_T(X)$. 用 Λ_T 来表示 $C(X;X)$ 中 $\{T^i:i\in\mathbb{Z}_+\}$ 的闭包. 那么 Λ_T 为 $C(X;X)$ 的一个交换子群, 其循环子群 $\{T^i:i\in\mathbb{Z}\}$ 在 Λ_T 中稠密. 连续的赋值映射 $ev_x:C(X;X)\to X$ 限制到 Λ_T 上, 定义了一个到 $(\mathrm{Trans}_T(X),d_T)$ 上的等距作用, 即*

$$D(g_1,g_2)=d_T(g_1(x),g_2(x)),\quad \forall g_1,g_2\in\Lambda_T.$$

对于一个几乎等度连续系统 (X,T), Λ_T 成为一个具有不变度量的拓扑群, 并且由 T 所生成的循环群在其中是稠密的. 一般地, 一个**单生群** 指一个偶对 (G,g), 其中 G 为一个具有不变度量的拓扑群, $g\in G$ 生成了 G 的一个稠密的循环子群. 一个拓扑群 G 称为**极小几乎周期的**, 如果常值函数 1 为 G 上唯一的连续特征.

设 X 为紧致度量空间且 $GC(X)$ 为所有有界并在某个 X 的 G_δ 稠密集上连续的复值函数的全体. 对于 $f\in GC(X)$, 令 $C(f)=\{x\in X: f在\ x\ 处连续\}$ 且

$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in C(f)\}$. 易见

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in D \subset C(f), D\text{在 X 中稠密}\}.$$

$GC(X)$ 中的两个函数 f 和 g 称为几乎处处相等 ($f = g$ a.e.) 如果 $||f - g|| = 0$ 或 $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ 为 X 的稠密的 G_δ 集. 于是 $f \neq g$ a.e. 等价于存在 X 的非空开集 U, 使得 $f(x) \neq g(x)$ 对于所有 $x \in U$ 成立.

设 (X,T) 为可逆的动力系统, $T^* : GC(X) \to GC(X)$ 为由 T 诱导的映射, 即 $T^*(f) = f \circ T$ ($f \in GC(X)$). 那么 T^* 为满映射并且 $||T^*f|| = ||f||$ ($f \in GC(X)$). 在不引起混淆的情况下 T^* 将记为 T.

引理 8.6.2　设 (X,T) 为可逆的动力系统. 复数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 称为 (X,T) 的一个 generic 特征值, 如果存在 $f \in GC(X)$, 使得 $f \neq 0$ a.e., 并且 $Tf = \lambda f$ a.e.. 函数 f 称为 (X,T) 的一个 generic 特征函数 (相应于 λ 的). (X,T) 的所有 generic 特征值的全体记为 $\mathrm{Eig}(X,T)$ 或 $\mathrm{Eig}(T)$, 相应于 λ 的所有 generic 特征函数的全体记为 $\mathrm{Eig}(\lambda)$.

命题 8.6.3　设 (X,T) 为一个几乎等度连续系统, Λ_T 为 $C(X;X)$ 中 $\{T^i : i \in \mathbb{Z}_+\}$ 的闭包. 那么 (X,T) 为弱扩散的当且仅当单生群 (Λ_T, T) 为极小几乎周期的.

证明　设 $x_0 \in \mathrm{Trans}_T(X)$, γ 为 Λ_T 的一个连续特征. 那么 $f = \gamma \circ ev_{x_0} : \mathrm{Trans}_T(X) \to \mathcal{T}$ 为 $\gamma(T)$ 的一个非零的连续 generic 特征函数. 如果 (X,T) 为弱扩散的, 那么 $\gamma(T) = 1$. 因此对于任意的 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $\gamma(T^n) = 1$, 这就意味着特征 γ 平凡. 所以 (Λ_T, T) 为极小几乎周期的.

反之, 假设 (Λ_T, T) 为极小几乎周期的. 取 $\lambda \in \mathrm{Eig}(T)$. 那么存在一个非零的连续映射 $f : \mathrm{Trans}_T(X) \to \mathbb{C}$ 满足对所有的 $x \in \mathrm{Trans}_T(X)$, 都有 $f(Tx) = \lambda f(x)$. 令 $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x_0)}, \forall x \in \mathrm{Trans}_T(X)$. 那么,$|g(x)| \equiv 1$ 且 $g(x_0) = 1$.

设 $\gamma : \Lambda_T \to \mathcal{T}$ 满足 $\gamma = g \circ ev_{x_0}$. 则 γ 为连续的, 且对任意的 $S \in \Lambda_T$, 都有 $\gamma(T \circ S) = \lambda \cdot \gamma(S)$. 下面证明 γ 为一个群同态.

设 $S_1, S_2 \in \Lambda_T$. 取 $n_k, m_k \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $C(X;X)$ 中 $T^{n_k} \to S_1, T^{m_k} \to S_2$. 因为 γ 为连续的, 有

$$\lim_k \lambda^{n_k} = \lim_k \gamma(T^{n_k}) = \gamma(S_1), \quad \lim_k \lambda^{m_k} = \lim_k \gamma(T^{m_k}) = \gamma(S_2).$$

易见存在 $s_i, t_i \in \mathbb{N}$, 使得 $\lim\limits_{i \longrightarrow +\infty} T^{n_{s_i}+m_{t_i}} = S_1 \circ S_2$ 且 $\lim\limits_{i \longrightarrow +\infty} \lambda^{n_{s_i}+m_{t_i}} = \gamma(S_1) \cdot \gamma(S_2)$. 进而

$$\gamma(S_1) \cdot \gamma(S_2) = \lim_{i \longrightarrow +\infty} \lambda^{n_{s_i}+m_{t_i}} = \lim_{i \longrightarrow +\infty} \gamma(T^{n_{s_i}+m_{t_i}}) = \gamma(S_1 \circ S_2).$$

这就说明了 γ 为一个群同态. 因此, γ 为 Λ_T 的一个连续特征. 由于 (Λ_T,T) 为极小几乎周期的, 故 $\gamma\equiv 1$. 特别地, $\lambda=\gamma(T)=1$, 即 $\mathrm{Eig}(T)=\{1\}$. □

设 G 为一个拓扑群. 称 G 具有**不动点性质**, 如果每个 G 作用下的动力系统 (X,G) 都存在着一个不动点 $x\in X$, 即 $g(x)=x,\forall g\in G$. 不难验证: 一个拓扑群 G 具有不动点性质当且仅当平凡的 G 系统为唯一的极小 G 系统.

我们在推论 3.7.13 中已经证明了:

命题 8.6.4 *设 (X,T) 为一个几乎等度连续系统, Λ_T 表示 $C(X;X)$ 中 $\{T^i: i\in\mathbb{Z}_+\}$ 的闭包. 那么 (X,T) 为扩散的当且仅当单生群 (Λ_T,T) 具有不动点性质.*

下面给出本节主要定理.

定理 8.6.5 *以下命题等价成立:*

(1) 存在一个单生的拓扑群, 使得它为极小几乎周期的, 但不具有不动点性质;

(2) 存在一个完备的单生群 (G,g), 使得它为极小几乎周期的, 但不具有不动点性质;

(3) 存在一个弱扩散但不为扩散的几乎等度连续系统.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 G 为一个单生的拓扑群, 使得它为极小几乎周期的但不具有不动点性质. 那么存在一个非平凡的极小 G 流 (X,G), 也就是说, 存在一个连续的映射 $\pi:G\times X\to X$, 使得 $\pi(e,x)=x$ 且 $\pi(g_1g_2,x)=\pi(g_1,\pi(g_2,x)),\forall\ x\in X$, 其中 e 为 G 的单位元,$g_1,g_2\in G$.

定义 $\Phi:G\to\mathrm{Homeo}(X)$ 为 $\Phi(g)=\pi(g,\cdot)$, 那么 Φ 为一个连续映射. 用 Λ_G 来表示 $\mathrm{Homeo}(X)$ 中 $\Phi(G)$ 的闭包, 那么 Λ_G 为 $\mathrm{Homeo}(X)$ 的一个闭交换子群. 因此, Λ_G 为一个完备的具有一个不变度量 d 的拓扑群. 因为 G 为单生的, 那么存在 $g\in G$, 使得 g 生成的循环子群在 G 中为稠密的. 故 $(\Lambda_G,\Phi(g))$ 为一个完备的单生群.

由于映射 $\Lambda_G\times X\to X$(定义为 $(h,x)\to h(x)$, $\forall\ h\in\Lambda_G,x\in X$) 为联合连续的且 (X,G) 为极小的, 则 (X,Λ_G) 为一个非平凡的极小 Λ_G 流. 这说明了单生群 $(\Lambda_G,\Phi(g))$ 不具有不动点性质. 设 $\chi:\Lambda_G\to\mathcal{T}$ 为 Λ_G 上的一个连续特征, 那么 $\gamma\doteq\chi\circ\Phi$ 为 G 上的一个连续特征. 由于 G 为极小几乎周期的, γ 为平凡的. 特别地, $\gamma(g)=1$. 因此, $\chi(\Phi(g))=1$, 即 χ 为平凡的特征, 这是因为 $\Phi(g)$ 生成的循环子群在 Λ_G 中稠密. 这就说明了 $(\Lambda_G,\Phi(g))$ 为极小几乎周期的.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 (G,g) 为一个完备的单生群, 它为极小几乎周期的但不具有不动点性质. 取 ρ 为 G 上的一个相容的不变度量. 注意到, $\rho'(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\},\forall x,y\in G$ 也为 G 上的一个相容不变度量. 不失一般性, 假设当 $x,y\in G$ 时 $\rho(x,y)\leqslant 1$.

定义映射 $h:G\to I^{\mathbb{Z}}$ 为

$$h(g')_i=\rho(g^ig',e)=\rho(g',g^{-i}),\quad \forall i\in\mathbb{Z},g'\in G.$$

取 Ω 为 $I^{\mathbb{Z}}$ 中 $h(G)$ 的闭包. 那么 (Ω,σ) 为一个几乎等度连续系统, 且 $h:G\to\Omega$ 为 G 到 $I^{\mathbb{Z}}$ 的一个一致连续的嵌入满足:

(1) $h(G)\subseteq \mathrm{Trans}_\sigma(\Omega)$;

(2) 对于任意的 $g_1\in G$,$\sigma h(g_1)=h(gg_1)$;

(3) 对于任意的 $g_1,g_2\in G$,$\rho(g_1,g_2)=d_\sigma(h(g_1),h(g_2))$.

用 Λ_σ 来代表 $C(\Omega;\Omega)$ 中 $\{\sigma^i: i\in\mathbb{Z}_+\}$ 的闭包. 由引理 8.6.1, 连续赋值映射 $ev_{h(e)}:C(\Omega;\Omega)\to\Omega$ 限制定义了一个 Λ_σ 和 $(\mathrm{Trans}_\sigma(\Omega),d_\sigma)$ 之间的等距映射.

因为 (G,ρ) 和 $(\mathrm{Trans}_\sigma(\Omega),d_\sigma)$ 为完备的度量空间, 由上面的 (3) 知 $h(G)=\mathrm{Trans}_\sigma(\Omega)$. 进而, $ev_{h(e)}^{-1}\circ h:(G,g)\to(\Lambda_\sigma,\sigma)$ 为一个等距同构. 记 $\phi=ev_{h(e)}^{-1}\circ h$, 那么 $\phi(g^n)=\sigma^n$, $\forall n\in\mathbb{Z}_+$. 事实上, ϕ 也为拓扑群之间的同态. 为了证明这点, 设 $g_1,g_2\in G$. 那么存在 $m_i,n_i\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $g^{m_i}\to g_1$, $g^{n_i}\to g_2$. 显然, $g^{m_i+n_i}\to g_1g_2$. 因为 ϕ 为一个等距映射且 $\phi(g^n)=\sigma^n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, 有 $\phi(g_1)=\lim\limits_{i\to\infty}\sigma^{m_i}$,$\phi(g_2)=\lim\limits_{i\to\infty}\sigma^{n_i}$ 且 $\phi(g_1g_2)=\lim\limits_{i\to\infty}\sigma^{m_i+n_i}$. 因此, $\phi(g_1g_2)=\phi(g_1)\phi(g_2)$.

因为 (G,g) 为极小几乎周期的但不具有不动点性质, 且 $\phi:(G,g)\to(\Lambda_\sigma,\sigma)$ 为拓扑群之间的一个同构, 因此单生群 (Λ_σ,σ) 也具有同样的性质. 由性质 8.6.3 和 8.6.4 就证明了 (Ω,σ) 为弱扩散但不为扩散的.

(3) $\Rightarrow$ (1) 如果存在一个弱扩散但不为扩散的几乎等度连续系统 (X,T), 那么由性质 8.6.3 和 8.6.4 知, 单生群 (Λ_T,T) 为极小几乎周期的但不具有不动点性质. □

习　题　8.6

证明: 一个几乎等度连续的 $\mathcal{F}_{\mathrm{pubd}}$ 传递的动力系统为极小的.

§8.7　注　记

扩散的定义首先是由 Blanchard, Host, Maass(2000) 用复杂性函数给出的, 并且证明了这等价于弱不交的定义. 而 2 扩散是否蕴含了 $\mathbb{Z}_+$ 扩散是一段时间内未解决的开问题, 后来 Huang-Ye (2004b) 对这个问题给出了一个肯定的回答. 本章的大部分内容引自 Huang-Ye(2004b), Huang-Ye(2002b) 和 Huang-Ye(2005). 利用拓扑群的理论来对传递系统进行分类的想法源自 Akin 和 Glasner(2001), 他们得到了一个扩散但不是弱混合的存在性的例子, 构造性的例子见 Huang-Ye(2002b). 最后一节的处理方式出自文献 (Huang-Ye).

第9章 不 交 性

这一章研究拓扑动力系统中的不交性. 首先给出不交性的定义以及它的一些基本的性质. 然后介绍一些重要的不交性定理, 例如任何 u.p.e. 系统不交于所有极小零熵系统; 任何 mild 混合系统不交于所有极小一致刚性系统等. §9.3 研究不交性与弱不交性的关联, 证明了两个极小系统为弱不交的当且仅当它们的极大等度连续因子为不交的; §9.4 和 §9.5 研究不交于所有极小系统的系统的性质; §9.6 在一般群作用的范畴下介绍关于不交性代数刻画的一些经典方法与结论.

§9.1 定义与基本性质

1967 年, Furstenberg(1967) 在遍历理论与拓扑动力系统中引入不交性的概念研究系统之间的差异. 两个系统不交类似于在数论中两个自然数互素的概念. 在数论中, 两个自然数互素当且仅当它们的乘积为其最小公倍数. 类似地, 在动力系统中, 对系统 (X,T) 和 (Y,S), 如果当 (Z,H) 为 (X,T) 和 (Y,S) 的公共扩充 (相当于数论中两个自然数的公倍数), 就有 (Z,H) 为乘积系统 $(X\times Y,T\times S)$ 的扩充 (相当于数论中它们的乘积为其最小公倍数), 则称 (X,T) 与 (Y,S) 是不交的. 另外在数论中, 两个自然数互素也等价于它们没有除 1 以外的公因子. 我们也可以定义两个系统不交是指它们没有非平凡公因子. 后面会看到前一种定义要更合适些. 下面给出严格的定义.

设 $(X,T),(Y,S)$ 为动力系统, $J\subseteq X\times Y$ 称为**joining**是指 J 为非空的闭不变子集, 并且 $\pi_1(J)=X,\pi_2(J)=Y$, 其中 $\pi_i,i=1,2$ 为到第一、二分量的投射.

定义 9.1.1 系统 (X,T) 和 (Y,S) 称为**不交的**是指 $X\times Y$ 为其唯一的 joining, 记为 $(X,T)\perp(Y,S)$.

回忆一下, 两个系统为弱不交的是指 $(X\times Y,T\times S)$ 为传递的 (记之为 $(X,T)\curlywedge(Y,S)$). 我们有

命题 9.1.2 设 $(X,T),(Y,S)$ 为动力系统, 那么

(1) 如果 $(X,T)\perp(Y,S)$, 则必有其一为极小的;

(2) 如果 $(X,T)\perp(Y,S)$, 并且 (Z,W) 为 (X,T) 因子, 那么 $(Z,W)\perp(Y,S)$. 进而, 如果 $(X,T)\perp(Y,S)$, 那么它们没有公共的非平凡因子;

(3) 如果 $(X,T)\perp(Y,S)$, 那么 $(\widetilde{X},\widetilde{T})\perp(\widetilde{Y},\widetilde{S})$, 其中 $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 与 $(\widetilde{Y},\widetilde{S})$ 分别为 (X,T) 和 (Y,S) 的自然扩充;

(4) 如果 (X,T) 极小, 则 $(X,T)\perp(Y,S)$ 当且仅当 $\pi_2: X\times Y\to Y$ 为极小同态;

(5) 如果 $(X,T),(Y,S)$ 均为极小系统, 则 $(X,T)\perp(Y,S)$ 当且仅当 $(X\times Y,T\times S)$ 为极小的;

(6) 如果传递系统 (X,T) 和 (Y,S) 满足 $(X,T)\perp(Y,S)$, 那么它们为弱不交的.

证明 (1) 如果 (X,T) 和 (Y,S) 都不是极小的, 那么存在它们的真的非空极小集 X' 与 Y'. 令 $W=(X'\times Y)\cup(X\times Y')$, 则 W 为 joining, 但 $W\neq X\times Y$. 矛盾!

(2) 设 $\pi: X\to Z$ 为因子映射且 $J\subset Z\times Y$ 为 joining. 则

$$J'=\{(x,y)\in X\times Y:(\pi x,y)\in J\}$$

为 (X,T) 和 (Y,S) 的 joining. 根据假设, $J=X\times Y$. 于是 $J'=\pi\times\mathrm{id}(J')=Z\times Y$.

(3) 对任意 $i\in\mathbb{N}$, 设 $\pi_i:\widetilde{X}\to X$ 和 $\phi_i:\widetilde{Y}\to Y$ 为到第 i 坐标的投射. 于是 $(\widetilde{X}\times\widetilde{Y},\widetilde{T}\times\widetilde{S})$ 为 $(X\times Y,T\times S)$ 的自然扩充, 且 $\pi_i\times\phi_i:\widetilde{X}\times\widetilde{Y}\to X\times Y$ 为到第 i 坐标的投射.

设 $\widetilde{J}$ 为 $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ 和 $(\widetilde{Y},\widetilde{S})$ 的 joining, 且 $J_i=\pi_i\times\phi_i(\widetilde{J})$, $i\in\mathbb{N}$. 则由假设 $J_i=X\times Y$, $\forall i\in\mathbb{N}$. 于是 $\widetilde{J}=\widetilde{X}\times\widetilde{Y}$.

我们将 (4) 和 (5) 留作习题.

(6) 因为 $(X,T)\perp(Y,S)$, 假设 (X,T) 为极小的. 由 (4), $\pi_2: X\times Y\to Y$ 为极小的. 因为 (Y,S) 传递, 得到 $(X\times Y,T\times S)$ 也是传递的. □

需要注意的是, 如果 (X,T) 和 (Y,S) 没有非平凡的公共因子, 那么它们不必为不交的. 第一个反例由 Glasner 和 Weiss(1983) 给出, 也可以参见文献 (Lindenstrauss, 1995). 在本章后面的内容中, 我们会仔细研究不交与弱不交的关系.

命题 9.1.3 设 $(X,T),(Y,S)$ 为动力系统, 且 $(X,T)\perp(Y,S)$. 如果 (Y,S) 为非平凡的极小系统, 那么 T 的回复点集在 X 中稠密.

证明 根据命题 9.1.2, 不妨设 (X,T) 为可逆的. 即有 $(X,T)\perp(Y,S)$, 其中 (X,T) 可逆且 (Y,S) 为非平凡极小系统.

设 $\Omega(T)$ 为 T 的非游荡点集. 如果 $\Omega(T)\neq X$, 那么存在 $x\in X\setminus\Omega(T)$. 于是存在 x 的邻域 U, 使得 $T^iU\cap T^jU=\varnothing$, $\forall i\neq j\in\mathbb{Z}$. 取 $y\in Y$, 令

$$J=\mathrm{cl}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}T^nU\times\{S^n(y)\}\Big)\bigcup\Big(X\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}T^nU\Big)\times Y.$$

易见 J 为 joining, 于是 $J=X\times Y$. 因为 (Y,S) 非平凡, $Y\setminus\{y\}$ 为非空开集. 由于 $U\times(Y\setminus\{y\})\subset X\times Y=J$, 有 $U\times(Y\setminus\{y\})\subset\mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}T^nU\times\{S^n(y)\})$. 这样, 存在 $n\in\mathbb{Z}$, 使得 $(U\times(Y\setminus\{y\}))\cap(T^nU\times\{S^n(y)\})\neq\varnothing$. 易见 $n\neq0$. 于是存在 $n\neq0$,

使得 $T^nU \cap U \neq \varnothing$, 矛盾! 所以 $\Omega(T) = X$, 根据定理 1.5.6, T 的回复点在 X 中稠密. □

回忆一下, 一个系统为几乎 distal 是指它没有 Li-Yorke 对.

定理 9.1.4 任何传递的扩散系统不交于极小几乎 distal 系统. 特别地, 任何弱混合系统不交于极小 distal 系统.

证明 设 (X,T) 为扩散的, (Y,S) 为极小几乎 distal 的. 那么 $(X \times Y, T \times S)$ 为传递的. 假设 $(x,y) \in \mathrm{Trans}_{T\times S}$ 且 J 为一个 joining. 设

$$\phi = \{p \in \mathcal{H}(X,T) : p(x,y) \in J,\ p(y) = y\}.$$

因为 (x,y) 传递, 所以 ϕ 非空. 而且易说明 ϕ 为闭的半群. 于是存在幂等元 $v \in \phi$, 有 $v(x,y) = (v(x),y) \in J$. 由于 $(x,v(x))$ 为 proximal 的且 (X,T) 为几乎 distal 的, 所以 $(x,v(x))$ 为渐近的. 这说明 $(v(x),y) \in J$ 为 $(X \times Y, T \times S)$ 传递点, 于是 $J = X \times Y$. □

事实上, 我们可以证明任何扩散系统不交于极小半 distal 系统. 为此需要一些准备.

对因子映射 $\pi : (\hat{X},\hat{T}) \to (X,T)$, 令 $F_x = \pi^{-1}(x)$ 及 $\mathrm{Iso}_x = \{p \in \mathcal{H}(X,T) : px = x\}$. 设

$$A(F_x) = \{q|_{F_x} : q \in \pi^{-1}(\mathrm{Iso}_x)\} \subset F_x^{F_x}.$$

易见, 如果 $q \in \pi^{-1}(\mathrm{Iso}_x)$, 那么 $q(F_x) \subset F_x$; 如果 $q \in \mathcal{H}(\hat{X},\hat{T})$ 使得 $q(F_x) \subset F_x$, 那么 $qx = x$. 令 $E(F_x) = \{1_{F_x}\} \cup A(F_x)$, 有

定理 9.1.5 设 $\pi : (\hat{X},\hat{T}) \to (X,T)$ 为因子映射.

(1) 如果 π 为 distal 的, 那么对任意 $x \in X$, $E(F_x)$ 为极小半群 (不包含真闭理想), 如果 (X,T) 极小, 那么反之亦然;

(2) 如果 π 为几乎 distal 的, 那么对任意 $x \in X$, $A(F_x)$ 为极小半群, 如果 (X,T) 极小, 那么反之亦然;

(3) 如果 π 为半 distal, 那么对任意 $x \in X$, $A(F_x)$ 的任何幂等元为极小的 (指在 $A(F_x)$ 中). 如果 (X,T) 极小, 则反之亦然.

证明 我们只证明 (1), 其余作为习题.

(1) 设 π 为 distal 的,$x_1, x_2 \in F_x$ 以及 u 为 $E(F_x)$ 的幂等元. 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $ux_1 \neq ux_2$. 也就是说, u 为单射. 又因为 $u = 1_{u(F_x)}$, 所以 $u = 1_{F_x}$. 这说明 $E(F_x)$ 的任意幂等元为 1_{F_x}. 设 B 为闭的理想, 那么 $E(F_x) \cdot B \subset B$. 由于 $1_{F_x} \in B$, 故 $B = E(F_x)$. 这说明 $E(F_x)$ 极小并且为群.

反之, 设 (X,T) 极小. 如果 $x_1, x_2 \in F_x$, $(x_1,x_2) \in P(X,T)$, 那么存在 $p \in \mathcal{H}(\hat{X},\hat{T})$, 使得 $px_1 = px_2$. 不妨设 $px_1 = px_2 = y \in \pi^{-1}(x)$, 从而有 $px = x$. 即可以

设 $p \in \pi^{-1}(\mathrm{Iso}_x)$. 这样就存在 $p \in A(F_x)$, 使得 $px_1 = px_2$. 由于 $E(F_x)$ 极小, 存在 $p' \in E(F_x)$, 使得 $p'p = 1_{F_x}$. 于是 $x_1 = p'px_1 = p'px_2 = x_2$, 从而 π 为 distal. □

定理 9.1.6　设 $\pi : (\hat{X}, \hat{T}) \to (X, T)$ 为因子映射. 如果 $(\hat{X}, \hat{T})$ 为传递的且 π 为半 distal 的, 那么 π 极小.

证明　设 $x_1 \in \mathrm{Trans}_{\hat{T}}$ 且 $A \subset \hat{X}$ 为满足 $\pi(A) = X$ 闭不变子集. 则存在 $x_2 \in A$, 使得 $\pi(x_1) = \pi(x_2) = x$. 因为 x_1 为回复点, 存在 $A(F_x)$ 中的幂等元 u, 使得 $ux_1 = x_1$. 因为 x_1 为传递点, $x_1, x_2 \in F_x$, 存在 $p \in A(F_x)$, 使得 $x_2 = px_1 = pux_1$.

理想 $A(F_x)pu$ 包含了某幂等元 v, 即存在 $p_1 \in A(F_x)$, 使得 $v = p_1pu$. 因为 π 为半 distal 的, 所以 u 极小 (定理 9.1.5). 于是 $A(F_x)u = A(F_x)v$. 尤其 $u \in A(F_x)v$ 蕴含 $uv = u$. 这样 $x_1 = ux_1 = uvx_2 = up_1pux_1 = up_1x_2$, 继而 $x_1 \in A$. □

作为推论有

命题 9.1.7　一个传递系统 (X, T) 与一个半 distal 极小系统 (Y, S) 弱不交当且仅当它们为不交的.

证明　设 $\pi_1 : X \times Y \to X$ 为投射. 则由 Y 为半 distal 的, 所以 π 为半 distal 扩充. 因为半 distal 扩充为极小的, 所以根据命题 9.1.2(4). 就有 $(X, T) \perp (Y, S)$. □

定理 9.1.8　任何传递的扩散系统与极小半 distal 系统为不交的.

证明　设 (X, T) 为扩散的,(Y, S) 为极小半 distal 的. 设 $\pi_1 : X \times Y \to X$ 为投射. 由扩散定义, $(X \times Y, T \times S)$ 为传递的. 因为 π_1 为半 distal 的, 由定理 9.1.6, π 为极小的. 于是由定理 9.1.2, $(X, T) \perp (Y, S)$. □

推论 9.1.9　一个传递系统 (X, T) 与一个 distal 极小系统 (Y, S) 弱不交当且仅当它们为不交的.

习　题　9.1

1. 证明命题 9.1.2 的 (3) 和 (4).

2. 证明: 如果 $(X, T) \perp (Y, S)$ 且 (Y_1, S_1) 为 (Y, S) 的几乎一对一扩充, 那么 $(X, T) \perp (Y_1, S_1)$.

3. 设 (X, T) 为极小的点 distal 系统, 而 (Y, S) 为极小系统. 证明: (X, T) 与 (Y, S) 为弱不交的当且仅当它们为不交的.

4. 设 $(X, T), (Y, S)$ 为极小系统, 并且 X 的 proximal 关系为等价关系. 证明: (X, T) 与 (Y, S) 为弱不交的当且仅当它们为不交的.

5. 证明定理 9.1.5(2) 和 (3). 提示: 参见文献 (Akin etc).

§9.2　一类重要的不交性定理

在遍历理论中, 一个关于 K 系统的重要刻画是它与所有零熵系统是不交的. 作为这个结果的拓扑类似, Blanchard 证明了 u.p.e. 系统不交于所有极小零拓扑熵系

统. 在这一节中, 我们先给出这个定理的证明, 然后沿用证明的方法给出一系列重要的不交性定理.

定理 9.2.1 任何 u.p.e. 系统与极小零熵系统为不交的.

证明 设 (X,T) 为 u.p.e. 的系统而 (Y,S) 为极小零熵系统. 如果它们不是不交的, 那么在这两个系统间存在一个非平凡的 joining J, 由 Zorn 引理, 可以假设 J 为极小的 joining, 即没有 J 的真子集为 X 和 Y 的 joining.

令 $J(x)=\{y\in Y:(x,y)\in J\}$. 假设存在 $x,x'\in X$, 使得 $J(x)\cap J(x')=\varnothing$. 设 π_1 和 π_2 是 J 向 X 和 Y 的投影映射. 因 $(x,x')\in E_2(X,T)$, 由熵对提升性知, 存在 $y,y'\in Y$, 使得 $((x,y),(x',y'))\in E_2(J,T\times S)$. 由假设 $J(x)\cap J(x')=\varnothing$ 知 $y\neq y'$. 于是就有 $(y,y')\in E_2(Y,S)$, 与 Y 零熵矛盾.

于是对任意 $x,x'\in X$, 都有 $J(x)\cap J(x')\neq\varnothing$. 考虑 J 的子集:

$$J'=\bigcup_{x\in X}\{x\}\times(J(x)\cap J(Tx))=\bigcup_{x\in X}\{x\}\times(J(x)\cap S(J(x)))=J\cap(\mathrm{id}\times S)J.$$

易见 J' 为闭的不变子集. 根据假设, 对每个 $x\in X$, $J(x)\cap J(Tx)\neq\varnothing$, 所以 $\pi_1(J')=X$. 由 (Y,S) 的极小性, $\pi_2(J')=Y$. 如果有 $J'=J$, 这意味着对每个 $x\in X$, $J(x)=SJ(x)$ 为极小系统 Y 的非空不变的闭子集. 这样 $J(x)=Y$, 因此 $J=X\times Y$, 与 J 是真 joining 矛盾. 这说明 J' 为 J 的真子 joining, 因此 J 不能为极小 joining. 矛盾! 所以 X 与 Y 不交. □

下面我们将上面的方法一般化.

定义 9.2.2 称二元关系 R 为**Blanchard 性质**, 是指它满足对任意扩充 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 成立:

(1) 遗传性: 如果 $(x,x')\in R(X,T)$ 且 $\pi(x)\neq\pi(x')$, 则 $(\pi(x),\pi(x'))\in R(Y,S)$;

(2) 提升性: 如果 $(y,y')\in R(Y,S)$, 则存在 $(x,x')\in R(X,T)$, 使得 $\pi(x)=y$, $\pi(x')=y'$.

完全类似于上定理证明, 我们得到如下重要判别不交性的定理:

定理 9.2.3 设 (X,T) 为传递系统而 (Y,S) 为极小系统, R 为 Blanchard 性质. 如果 $R(X,T)$ 为 $X\times X$ 的稠密集而 $R(Y,S)=\Delta_Y$, 则 $(X,T)\perp(Y,S)$.

证明 如果 $(X,T)\perp(Y,S)$ 不成立, 那么在这两个系统间存在一个非平凡的 joining J, 由 Zorn 引理, 不妨设 joining 为极小的.

假设存在 $z,z'\in X$, 使得 $J(z)\cap J(z')=\varnothing$. 因为 $x\mapsto J(x)$ 为 X 到 2^Y 的上半连续映射, 所以存在 $X\times X$ 的稠密 G_δ 集 R_1, 使得在 R_1 上 $J\times J$ 为连续的. 又因为 $R(X,T)$ 为 $X\times X$ 的稠密集, 所以存在 $(x,x')\in R(X,T)$, 使得 (x,x') 与 (z,z') 充分近, 进而满足 $J(x)\cap J(z')=\varnothing$. 设 π_1 和 π_2 是 J 向 X 和 Y 的投影映射. 因 $(x,x')\in R(X,T)$, 由提升性知, 存在 $y,y'\in Y$, 使得 $((x,y),(x',y'))\in R(J,T\times S)$. 由

假设 $J(x)\cap J(x')=\varnothing$ 知 $y\neq y'$. 于是就有 $(y,y')\in R(Y,S)$, 但这与 $R(X,T)=\Delta_Y$ 矛盾.

于是对任意 $x,x'\in X$, 都有 $J(x)\cap J(x')\neq\varnothing$. 下面的证明完全类似于上面的定理证明, 略去. □

根据命题 8.1.5, $\mathrm{Com}_S(X,T)$ 为 Blanchard 性质. 另外, 根据对 S 等度连续的刻画 (定理 8.1.8), 有

定理 9.2.4 设 $S=\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 的一个无穷序列. 那么 S 扩散系统不交于极小 S 等度连续系统.

下面给出关于 mild 混合及强混合系统的两个不交性定理, 进而得到 mild 混合系统没有非平凡的一致刚性因子的结果. 为此, 我们首先研究一致刚性与 S 等度连续的关系.

引理 9.2.5 设 (X,T) 为动力系统. 如果 (X,T) 为一致刚性的, 则存在 IP 集 A, 使得 (X,T) 为 A 等度连续. 如果 (X,T) 又为 E 系统的话, 则反之也成立.

证明 首先假设 (X,T) 为一致刚性系统. 由一致刚性的定义, 存在自然数序列 $\{n_1<n_2<\cdots\}$, 使得 $D(T^{n_i},\mathrm{id})=\sup_{x\in X}d(T^{n_i}x,x)<\dfrac{1}{2^i}$. 设 A 是由 $\{n_i:i\in\mathbb{N}\}$ 生成的 IP 集. 我们将说明 (X,T) 为 A 等度连续的.

对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $K>0$ 满足 $\dfrac{1}{2^K}<\dfrac{\varepsilon}{6}$. 令 A_K 是由 $\{n_i:i\geqslant K\}$ 生成的 IP 集. 注意到如果 $b\in A_K$, 则 $b=n_{i_1}+n_{i_2}+\cdots+n_{i_m}$, 其中 $K\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m$. 从而有

$$D(T^b,\mathrm{id})\leqslant\sum_{j=1}^{m}D(T^{n_j},\mathrm{id})\leqslant\sum_{i=K}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现在设 $B_K=\{n_{i_1}+n_{i_2}+\cdots+n_{i_m}:1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant K\}$. 由于 B_K 为有限集, 可以找到 $\delta>0$, 使得只要 $d(x,y)<\delta$, 就有 $d(T^cx,T^cy)<\dfrac{\varepsilon}{3}$ 对任意 $c\in B_K$ 成立. 易见, 若 $a\in A$, 则存在 $b\in A_K$ 和 $c\in B_K$, 使得 $a=b+c$. 因此当 $d(x,y)<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}
d(T^ax,T^ay)&=d(T^b(T^cx),T^b(T^cy))\\
&\leqslant d(T^b(T^cx),T^cx)+d(T^cx,T^cy)+d(T^b(T^cy),T^cy)\\
&\leqslant D(T^b,\mathrm{id})+\frac{\varepsilon}{3}+D(T^b,\mathrm{id})\\
&<\varepsilon.
\end{aligned}$$

这就说明 (X,T) 为 A 等度连续的.

现在设 (X,T) 为 A 等度连续的, (X,T) 为 E 系统, 其中 A 为由 $\{p_i:i\in\mathbb{N}\}$ 生成的 IP 集. 不失一般性, 可以假设对每个 $i\in\mathbb{N}$, $p_{i+1}>\sum\limits_{j=1}^{i}p_j$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 设 A_k 为

由 $\{p_i : i \geqslant k\}$ 生成的 IP 集.

固定一传递点 $y \in X$, 且设 $U_n = \left\{x \in X : d(x,y) < \dfrac{1}{n}\right\}$. 由于 (X,T) 为 E 系统, 存在具有全支撑的不变测度 μ. 因此 $\mu(U_n) > 0$. 由于 $\mu(U_n) > 0$, 所以 $T^{-p_1}U_n, T^{-(p_1+p_2)}U_n, T^{-(p_1+p_2+p_3)}U_n, \cdots$ 不能互不相交, 这样存在 $1 \leqslant i < j$, 使得 $T^{-(p_1+\cdots+p_i)}U_n \cap T^{-(p_1+\cdots+p_j)}U_n \neq \varnothing$, 即 $U_n \cap T^{-(p_{i+1}+\cdots+p_j)}U_n \neq \varnothing$, 这说明 $A \cap N(U_n,U_n) \neq \varnothing$. 类似地, 我们能证明 $A_n \cap N(U_n,U_n) \neq \varnothing$. 取 $a_n \in N(U_n,U_n) \cap A_n$, 使得 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$.

因 (X,T) 为 A 等度连续的, 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 满足只要 $d(x,y) < \delta$, 就有 $d(T^a x, T^a y) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 对 $a \in A$ 成立. 取 $M \in \mathbb{N}$, 使得 $\dfrac{1}{M} < \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2}, \delta\right\}$. 由于 $T^{a_n}U_n \cap U_n \neq \varnothing$, 所以存在 $z_n \in T^{a_n}U_n \cap U_n$. 进而当 $n > M$ 时, 有

$$d(T^{a_n}y, y) \leqslant d(T^{a_n}y, z_n) + d(z_n, y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

这就说明 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(T^{a_n}y, y) = 0$.

以下证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} D(T^{a_n}, \mathrm{id}) = 0$. 因 (X,T) 为 A 等度连续的, 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\dfrac{\varepsilon}{3} > \delta > 0$, 满足只要 $d(x_1,x_2) < \delta$, 就有 $d(T^a x_1, T^a x_2) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ 对 $a \in A$ 成立. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$, 使得开球 $B\left(x_i, \dfrac{\delta}{2}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant k$ 的并覆盖了空间 X. 因 y 为传递点, 对每个 $1 \leqslant i \leqslant k$, 存在 $t_i \in \mathbb{N}$, 使得 $T^{t_i}y \in B\left(x_i, \dfrac{\delta}{2}\right)$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(T^{a_n}y, y) = 0$, 我们能够找到 $M > 0$, 使得当 $n > M$ 时, 就有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} d(T^{a_n}(T^{t_i}y), T^{t_i}y) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

对任意的 $x \in X$, 存在 i, 使得 $x \in B\left(x_i, \dfrac{\delta}{2}\right)$. 当 $n > M$ 时, 有

$$\begin{aligned} d(T^{a_n}x, x) &= d(T^{a_n}x, T^{a_n}(T^{t_i}y)) + d(T^{a_n}(T^{t_i}y), T^{t_i}y) + d(T^{t_i}y, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $D(T^{a_n}, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon$ 对 $n > M$ 成立. 进而 $\lim\limits_{n\to\infty} D(T^{a_n}, \mathrm{id}) = 0$, 即 (X,T) 为一致刚性系统. □

借助于上面的引理, 现在我们能证明

定理 9.2.6 mild 混合系统不交于一致刚性的极小系统.

证明 设 (X,T) 为 mild 混合系统. 假设 (Y,S) 为极小一致刚性系统. 由引理 9.2.5, 存在 IP 集 A, 使得 (Y,S) 为 A 等度连续的. 由定理 8.2.6, (X,T) 为 A 扩散系统. 进而由定理 9.2.4, (X,T) 不交于 (Y,S). □

Glasner-Maon(1989) 说明存在极小的弱混合且一致刚性的系统. 于是极小一致刚性系统可以有非常复杂的动力学性状. 另外, Akin-Glasner(2001) 指出存在非平凡 $\mathcal{F}_{\mathrm{lbd1}}$ 传递的一致刚性系统. 但是, 我们有

定理 9.2.7 任何非平凡一致刚性系统不可能也为 mild 混合的.

证明 设 (X,T) 为非平凡一致刚性系统. 根据引理 9.2.5, 存在 IP 集 A, 使得 (X,T) 为 A 等度连续的. 于是由命题 8.1.9, $\mathrm{Com}_A(X,T)=\varnothing$. 如果 (X,T) 为 mild 混合的, 那么 (X,T) 为 A 扩散的 (定理 8.2.6), 于是 $\mathrm{Com}_A(X,T)=X^2\setminus\Delta_2$. 这说明 (X,T) 为平凡的, 矛盾! 从而 (X,T) 不为 mild 混合的. □

定理 9.2.8 强混合系统不交于极小刚性系统.

证明 设 (X,T) 为强混合系统, (Y,S) 为相对于 $\mathbb{Z}_+$ 的无穷序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ 的极小一致刚性系统. 假设 $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ 为 X 的一组基. 设

$$X_0=\bigcap_{n=1}^\infty\left(\bigcup_{j=1}^\infty\bigcap_{k=j}^\infty T^{-n_k}U_n\right).$$

因 (X,T) 为强混合系统, X_0 为 X 的稠密 G_δ 集. 现在设 J 为 $(X\times Y,T\times S)$ 的一个 joining. 则对每个 $x\in X_0$, 存在 $y\in Y$, 使得 $(x,y)\in J$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}T^{n_k}y=y$ 以及 $\bigcap_{j=1}^\infty\mathrm{cl}(\bigcup_{k=j}^\infty T^{n_k}x)=X$, 有 $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}((x,y),T\times S))\supset X\times\{y\}$. 因此 $J\supset X\times\{y\}$, 进而 $J=X\times Y$. 这说明 (X,T) 不交于 (Y,S). □

类似地可以证明, 不存在非平凡、刚性的强混合系统.

习　题　9.2

1. 称 (X,T) 为**对角流**是指 $\{(x,Tx):x\in X\}\subseteq E(X,T)$. 证明: 任意传递的对角流不交于零熵系统.
2. 证明: 不存在非平凡刚性的强混合系统. 提示: 参见 (Glasner-Maon, 1989, 命题 6.4).
3. 请用本节方法给出更多的不交性定理.

§9.3　不交性与弱不交性

本节讨论不交与弱不交的关系. 如果两个极小系统 (X,T) 和 (Y,S) 为弱不交的, 那么它们的极大等度连续因子 (X_{eq},T) 和 (Y_{eq},S) 也是弱不交的. 由于传递的等度连续系统为极小的, 于是此时 (X_{eq},T) 和 (Y_{eq},S) 为不交的. 一个自然的问题就是, 逆命题也成立吗? 即如果两个极小系统的极大等度连续因子为不交的, 那么是否它们为弱不交的? 一个特殊的情形是, 当 $X=Y$ 的时候, 此时命题成为: 极小系统为弱混合的当且仅当它没有非平凡的等度连续因子. 这个结论我们在前面已经提到过, 在这里我们给出它的证明, 并且运用类似的方法给出前面问题的肯定回答. 在证明过程中, 我们还给出极小系统的局部 proximal 关系是等价关系的一个证明.

以下假设 (X,T) 为可逆系统, 对于一般情况, 运用自然扩充可以得到相应的结论.

定义 9.3.1 系统 (X,T) 上的一个**连续不变伪度量**是指一个满足下条件的连续函数 $\rho: X\times X\to\mathbb{R}_+$:

(1) ρ 为伪度量, 即满足 $\rho(x,x)=0$; $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ 以及 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$;

(2) $\rho(Tx,Ty)=\rho(x,y)$.

如果 ρ 为连续不变伪度量, 则可以定义关系

$$D(\rho)=\{(x_1,x_2):\rho(x_1,x_2)=0\}.$$

那么 $D(\rho)$ 为闭的不变的等价关系. 进一步地, 我们有

引理 9.3.2 如果 ρ 为 (X,T) 上的连续不变伪度量, 则 $S_{\text{eq}}\subseteq D(\rho)$

证明 根据推论 3.5.13, 为了证明 $S_{\text{eq}}\subseteq D(\rho)$, 我们仅需证明 $Q(X,T^{-1})\subseteq D(\rho)$. 对任意 $(x,y)\in Q(X,T^{-1})$, 根据定义, 存在 $(x_i,y_i)\to(x,y)$ 以及 $n_i\in\mathbb{N}$, 使得 $n_i\to\infty$ 且 $(T^{-n_i}x_i,T^{-n_i}y_i)\to\Delta$. 因为

$$\rho(x_i,y_i)=\rho(T^{n_i}(T^{-n_i}x_i),T^{n_i}(T^{-n_i}x_i))=\rho(T^{-n_i}x_i,T^{-n_i}y_i),$$

两边取极限, 根据 ρ 的连续性就有 $\rho(x,y)=0$. 所以 $Q(X,T^{-1})\subseteq D(\rho)$. □

引理 9.3.3 设 Σ 为 X 上一族连续不变伪度量, 且满足:

$$D(\Sigma)=\bigcap\{D(\rho):\rho\in\Sigma\}\subseteq Q(X,T^{-1}),$$

则有 $S_{\text{eq}}=Q(X,T^{-1})$.

证明 根据

$$Q(X,T^{-1})\subseteq S_{\text{eq}}\subseteq D(\Sigma)\subseteq Q(X,T^{-1})$$

即有结论. □

定义 9.3.4 设 μ 为 (X,T) 上的一个不变测度 (为正则的), 且设 N 为 $X\times X$ 的闭子集. 则 $N(x)=\{y\in X:(x,y)\in N\}$ 为 X 的闭集, 定义 $\rho_N: X\times X\to\mathbb{R}_+$, 使得

$$\rho_N(x_1,x_2)=\mu(N(x_1)\Delta N(x_2)).$$

引理 9.3.5 设 (X,T) 为极小系统. 如果 N 为 $X\times X$ 的闭不变子集 ($(T\times T)N=N$), 则 ρ_N 为连续不变伪度量.

证明 因为 $(T\times T)N=N$, 所以 $N(Tx)=TN(x)$. 于是

$$\rho_N(Tx,Ty)=\mu(N(Tx)\Delta N(Ty))=\mu(T(N(x)\Delta N(y)))=\rho_N(x,y).$$

这样我们仅需证明 ρ_N 为连续的即可. 我们将证明分成若干步完成.

(1) 对任意 $x \in X$ 以及开集 $U \subseteq X$, 如果 $N(x) \subseteq U$, 那么存在 x 的邻域 V, 使得对任意 $x' \in V$ 成立 $N(x') \subseteq U$.

令 $F = \pi_1(\pi_2^{-1}[X \setminus U] \cap N)$, 其中 $\pi_i : X \times X \to X, i = 1, 2$ 为到两分量的投射. 则 F 为闭集, 且如 $x' \notin F$, 则有 $N(x') \subseteq U$. 令 $V = X \setminus F$, 则 V 为 x 的邻域, 且 $N(x') \subseteq U, \forall x' \in V$.

(2) 对任意 $x_1, x_2 \in X$, $\mu(N(x_1)) = \mu(N(x_2))$. 由于 μ 为正则的, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 U, 使得 $N(x_1) \subseteq U$ 且 $\mu(U) < \mu(N(x_1)) + \varepsilon$. 根据 (1), 存在 x_1 的邻域 V, 使得对任意 $x' \in V$ 成立 $N(x') \subseteq U$. 由于 X 极小, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^n x_2 \in V$. 进而 $N(T^n x_2) \subseteq U$. 于是即有

$$\mu(N(x_2)) = \mu(T^n N(x_2)) = \mu(N(T^n x_2)) \leqslant \mu(U) < \mu(N(x_1)) + \varepsilon.$$

所以 $\mu(N(x_2)) \leqslant \mu(N(x_1))$. 同理 $\mu(N(x_1)) \leqslant \mu(N(x_2))$.

(3) 对任意 $x_1, x_2 \in X$, $\rho_N(x_1, x_2) = 2\mu(N(x_1) \setminus N(x_2)) = 2\mu(N(x_2) \setminus N(x_1))$. 只要证明 $\mu(N(x_1) \setminus N(x_2)) = \mu(N(x_2) \setminus N(x_1))$ 即可. 此由 $\mu(N(x_1) \setminus N(x_2)) = \mu(N(x_1)) - \mu(N(x_1) \cap N(x_2))$ 易得.

(4) 对任意 $x \in X$ 及任意 $\varepsilon > 0$, 存在 x 的邻域 V, 使得对任意 $x' \in V$, 有 $\rho_N(x, x') < \varepsilon$ 成立.

对任意 $\varepsilon > 0$, 由 μ 的正则性, 存在开集 U, 使得 $N(x) \subseteq U$ 且 $\mu(U) < \mu(N(x_1)) + \frac{\varepsilon}{2}$. 由 (1), 取 x 的邻域 V, 使得对任意 $x' \in V$, 成立 $N(x') \subseteq U$. 由 (3) 有

$$\rho_N(x, x') = 2\mu(N(x) \setminus N(x')) \leqslant 2\mu(U \setminus N(x)) < \varepsilon.$$

(5) 根据 (4) 即有对任意 $(x_1, x_2) \in X \times X$, ρ_N 在 (x_1, x_2) 处连续. □

引理 9.3.6　设 (X, T) 为极小系统, N 为 $X \times X$ 的闭不变子集, 则对任意 $(x_1, x_2) \in D(\rho_N)$ 以及 X 的开集 U, 有

$$U \subseteq N(x_1) \text{ 当且仅当 } U \subseteq N(x_2).$$

证明　设存在 $(x_1, x_2) \in D(\rho_N)$ 以及开集 U 满足 $U \subseteq N(x_1)$, 但是 $U \nsubseteq N(x_2)$. 那么

$$\mu(U \setminus N(x_2)) \leqslant \mu(N(x_1) \setminus N(x_2)) \leqslant \mu(N(x_1) \Delta N(x_2)) = \rho_N(x_1, x_2) = 0.$$

另外 $U \setminus N(x_2)$ 为非空开集, 而由 X 极小有 $\mathrm{supp}\mu = X$, 所以有 $\mu(U \setminus N(x_2)) > 0$. 二者矛盾! □

下面证明 $Q(X,T)$ 为等价关系. 实际上, 我们还要说明 $Q(X,T)$ 与 $\mathbb{Z}$ 作用下的局部 proximal 关系是一样的. $\mathbb{Z}$ 作用下的局部 proximal 关系 $Q_{\mathbb{Z}}(X,T)$ 定义为

$$Q_{\mathbb{Z}}(X,T)=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(T\times T)^{-n}\Delta_\varepsilon}.$$

定理 9.3.7 设 (X,T) 为极小系统, 则 $S_{\rm eq}=Q_{\mathbb{Z}}(X,T)=Q(X,T^{-1})=Q(X,T)$, 即 $Q(X,T)$ 为等价关系.

证明 定理 3.5.9 已经证明 $Q(X,T^{-1})=Q(X,T)$, 类似的证明可以说明它们与 $Q_{\mathbb{Z}}(X,T)$ 相同. 设 $\mathcal{F}$ 为 $X\times X$ 中全体非空闭不变子集组成的集合, 令 $\Sigma=\{\rho_N:N\in\mathcal{F}\}$. 为证 $Q(X,T)$ 为等价关系, 根据引理 9.3.3, 我们仅需证明 $D(\Sigma)\subseteq Q_{\mathbb{Z}}(X,T)$.

对 $\varepsilon>0$, 定义 $N=\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(T\times T)^{-n}\Delta_\varepsilon}$, 其中 $\Delta_\varepsilon=\{(x,y):d(x,y)<\varepsilon\}$. 于是 $N\in\mathcal{F}$. 如果 $(x_1,x_2)\in D(\Sigma)$, 则易见 $(x_1,x_2)\in D(\rho_N)$.

根据引理 9.3.6 及 $B_\varepsilon(x_2)\subseteq N(x_2)$, 有 $B_\varepsilon(x_2)\subseteq N(x_1)$. 尤其 $x_2\in N(x_1)$. 所以 $(x_1,x_2)\in N=\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(T\times T)^{-n}\Delta_\varepsilon}$. 由 ε 的任意性, 就有 $(x_1,x_2)\in\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(T\times T)^{-n}\Delta_\varepsilon}=Q_{\mathbb{Z}}(X,T)$. □

对弱混合系统, 我们有下面的定理

定理 9.3.8 设 (X,T) 为极小系统, 则以下各命题等价:

(1) (X,T) 为弱混合的;

(2) $Q(X,T)=X\times X$;

(3) $S_{\rm eq}=X\times X$, 即 X 没有非平凡的等度连续因子.

证明 由定义易证 (1) ⇒ (2), 而 (2) ⇒ (3) 是显然的. 根据推论 3.5.11 和定理 9.3.7 就得到 (3) ⇒ (1). 下面给出 (3) ⇒ (1) 的一个直接证明.

设 U_1,U_2,V_1,V_2 为 X 的非空开集, 下证存在 $n\in\mathbb{Z}$, 使得 $(U_1\times U_2)\cap(T\times T)^n(V_1\times V_2)\neq\varnothing$. 根据 X 的极小性, 存在 $m\in\mathbb{Z}$, 使得 $W=U_2\cap T^mV_2\neq\varnothing$. 令 $x\in T^mV_1$, 那么 $\{x\}\times W\subseteq(T\times T)^m(V_1\times V_2)\subseteq\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(T\times T)^n(V_1\times V_2)}=N$. 由此定义, $W\subseteq N(x)$. 由于 $S_{\rm eq}=X\times X\subseteq D(\rho_N)$, 所以对任意 $x'\in X$, $(x,x')\in D(\rho)$. 根据引理 9.3.6, 则有 $W\subseteq N(x')$. 即

$$\{x'\}\times W\subseteq N=\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(T\times T)^n(V_1\times V_2)}.$$

特别地, 取 $x'\in U_1$, 则 $(U_1\times W)\cap\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(T\times T)^n(V_1\times V_2)}\neq\varnothing$. 由于 $W\subseteq U_2$, 所以存在 $n\in\mathbb{Z}$, 使得 $(U_1\times U_2)\cap(T\times T)^n(V_1\times V_2)\neq\varnothing$. 于是 $(X\times X,T\times T)$ 为 $\mathbb{Z}$ 传递的, 自然也是传递的 (请读者验证). 所以 (X,T) 为弱混合的. □

下面我们推广上面的结论. 在本节余下部分均假设 (X,T) 为极小系统, 而 (Y,S) 为同胚的 E 系统. 设 μ 为 Y 上的具有全支撑的不变测度. 如果 N 为 $X\times Y$ 的闭子集. 则 $N(x)=\{y\in Y:(x,y)\in N\}$ 为 Y 的闭集, 定义 $\rho_N: X\times X\to\mathbb{R}_+$, 使得

$$\rho_N(x_1,x_2)=\mu(N(x_1)\Delta N(x_2)).$$

完全类于上面的讨论我们得到: 如果 N 为 $X\times Y$ 的闭不变子集, 则 ρ_N 为连续不变伪度量. 以及

引理 9.3.9 设 (X,T),(Y,S) 以及 N 如上假设. 则对任意 $(x_1,x_2)\in D(\rho_N)$ 以及 Y 的开集 U, 有

$$U\subseteq N(x_1) \text{ 当且仅当 } U\subseteq N(x_2).$$

定理 9.3.10 设 (X,T) 为极小系统, 而 (Y,S) 为 E 系统. 如果 (Y,S) 不交于 (X,T) 的极大等度连续因子, 那么 $(X\times Y,T\times S)$ 为传递系统. 即

$$(X_{\text{eq}},T)\perp(Y,S)\Rightarrow(X,T)\curlywedge(Y,S).$$

证明 设 $\{U_i\}$ 和 $\{V_i\}$ 分别为 X 和 Y 的可数开集族并且 $\{U_i\times V_i\}$ 为 $X\times Y$ 的一组可数基. 取定 $x\in X$ 及 $i\in\mathbb{N}$.

设 W 为 Y 的任意一个开集, 令 $N=\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(T\times S)^n(\{x\}\times W)}$. 根据引理 9.3.9, 可以证明 $S_{\text{eq}}(x)\times W\subseteq N$. 因为 X 极小, 所以 U_i/S_{eq} 在 $X_{\text{eq}}=X/S_{\text{eq}}$ 中有非空的内部. 于是由于 $X/S_{\text{eq}}\perp Y$, 存在 $n\in\mathbb{Z}$ 以及 $w\in W$, 使得 $(T\times S)^n(x/S_{\text{eq}},w)\in(U_i/S_{\text{eq}})\times V_i$. 进而存在 $x'\in S_{\text{eq}}(x)$, 使得 $(T\times S)^n(x',w)\in U_i\times V_i$. 所以 $N\cap(U_i\times V_i)\neq\varnothing$. 这样我们得到, 存在 $m\in\mathbb{Z}$ 以及 $w'\in W$, 使得 $(T\times S)^m(x,w')\in U_i\times V_i$. 因为 W 为 Y 的任意开集, 我们得到集合

$$A_i=\{y\in Y:\text{存在 } n, \text{使得 } (T\times S)^n(x,y)\in U_i\times V_i\}$$

为 Y 的稠密开集. 于是 $D(x)=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ 为 Y 的稠密的 G_δ 集. 尤其 $(X\times Y,T\times S)$ 为 $\mathbb{Z}$ 传递的, 自然也是传递的 (请读者验证). □

由上定理我们易有如下重要的推论:

定理 9.3.11 两个极小系统为弱不交的当且仅当它们的极大等度连续因子为不交的.

证明 结合推论 9.1.9 与上定理即可得到, 请读者自证. □

习 题 9.3

1. 说明本节的结果对于非同胚情况仍然是成立的.
2. 说明本节的结果对于一般群作用也是成立的.
3. 任何极小弱混合系统与任何极小 point distal 系统为不交的.
4. 完成定理 9.3.11 的证明.

5. 设 (X,T) 和 (Y,S) 为 $\mathbb{Z}$ 系统,(X,T) 为极小弱混合系统, 而 (Y,S) 为 E 系统. 则对 $\forall x \in X$, 集合 $D(x) = \{y \in Y : (x,y)$ 在 $X \times Y$中有稠密轨$\}$ 为 Y 的稠密 G_δ 集.

§9.4 不交于所有极小系统的系统：传递情形

Furstenberg(1967) 提出如下的一个问题：如何刻画与全体极小系统不交的系统? 在这一节和下一节我们将讨论这个问题. 设 $\mathcal{M}$ 为全体极小系统组成的集合. 我们证明：如果 $(X,T) \in \mathcal{M}^{\perp}$, 那么 T 中极小点稠密; 如果 (X,T) 还为传递的, 那么 (X,T) 为弱混合的.

定义 9.4.1 $\mathbb{Z}_+$ 的一个子集 A 称为一个 **m 集**, 是指存在极小系统 (Y,S), $y \in Y$ 以及 Y 的开集 V, 使得 $A \supset N(y,V)$.

对于传递系统, 它是否在 $\mathcal{M}^{\perp}$ 中能够通过下面的定义转化为对 m 集的处理. 对极小系统 (Y,S), 我们定义

$$\mathcal{F}_Y = \{A \subset \mathbb{Z}_+ : \text{存在某个} y \in Y \text{及非空开集 } V, \text{使得} A \supset N(y,V)\} \text{ 及}$$
$$k\mathcal{F}_Y = \{B \subset \mathbb{Z}_+ : B \cap A \neq \varnothing, \forall A \in \mathcal{F}_Y\}.$$

定理 9.4.2 设 (X,T) 为传递系统且 $x \in \mathrm{Trans}_T$, 则

(1) $(X,T) \in \mathcal{M}^{\perp}$ 当且仅当对 x 的任意邻域 U 以及任意 m 集 A, 有 $N(x,U) \cap A \neq \varnothing$;

(2) $(X,T) \perp (Y,S)$ 当且仅当对 x 的任意开邻域 U, 有 $N(x,U) \in k\mathcal{F}_Y$.

证明 我们仅证 (1), (2) 的证明类似.

设 $(X,T) \in \mathcal{M}^{\perp}$. 对任意 m 集 A, 存在极小系统 (Y,S), $y \in Y$ 以及 Y 的开集 V, 使得 $A \supset N(y,V)$.

设 $J = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}((x,y), T \times S))$. 则 J 为 (X,T) 和 (Y,S) 的 joining. 因为 $(X,T) \perp (Y,S)$, 所以 $J = X \times Y$. 于是对 x 的任意邻域 U, 有 $N((x,y), U \times V) \neq \varnothing$, 即 $N(x,U) \cap A \neq \varnothing$.

反之, 设 (Y,S) 为极小系统, J 为 (X,T) 和 (Y,S) 的 joining. 易见存在 $y \in Y$, 使得 $(x,y) \in J$. 对于 x 的任意邻域 U 以及 Y 的任何非空开集 V, 有 $N(x,U) \cap N(y,V) \neq \varnothing$. 于是 $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}((x,y), T \times S)) \cap (U \times V) \neq \varnothing$. 因为 $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}((x,y), T \times S))$ 为 $T \times S$ 不变的闭集, 所以 $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}((x,y), T \times S)) = X \times Y$. 于是 $J = X \times Y$. □

对任意 $S \subset \mathbb{Z}_+$, 设 1_S 为 $\mathbb{Z}_+$ 到 $\{0,1\}$ 的指示函数, 即当 $s \in S$ 时,$1_S(s) = 1$; 当 $s \notin S$ 时,$1_S(s) = 0$. 如果 $s = (s(0), s(1), \cdots) \in \Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, 那么用 $s[n;m]$ 记 $(s(n), s(n+1), \cdots, s(m))$, 其中 $n \leqslant m$. 设 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ 为转移映射. 对有限词 A, 以 $|A|$ 记 A 的长度.

下面的定理在本节中将起关键的作用.

定理 9.4.3 每个 $\mathcal{F}_{\rm ts}$ 集合包含了一个 m 集.

证明 设 $F \in \mathcal{F}_{\rm ts}$. 构造 $y^n = 1_{F_n} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, 使得 $F_n \subset F$ 且 $y = \lim y^n = 1_A$ 为极小点. 设 $Y = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}(y,\sigma))$ 及 $[1] = \{x \in Y : x(0) = 1\}$. 根据 $A \subset F$ 及 $A = N(y,[1])$, 我们就可以得到定理的结论.

为得到 y^n, 构造有限词 A_n, 使得 y^n 以 A_n 开始并且 A_n 在 y^n 中 syndetic 出现 (指出现的位置组成一个 syndetic 集), 另外 A_{n+1} 也以 A_n 开始. 我们能够做到如此的原因在于对每个 $n \in \mathbb{N}$, $1^n = (1,\cdots,1)$ (n 个) 在 1_F 中 syndetic 出现. 具体地讲, 我们如下构造:

第 1 步. 构造 A_1 及 $F_1 \subset F$, 使得 A_1 在 $y^1 = 1_{F_1}$ 中以 l_1 间距出现, 并且 y^1 以 A_1 开始.

设 $\min F = k_1 - 1$ 及 $A_1 = 1_F[0;k_1-1]$. 令 $r_1 = k_1$. 因为 $F \in \mathcal{F}_{\rm ts}$, 1^{r_1} 在 F 中出现的位置 $W_1 = \{w_1^1, w_2^1, \cdots\}$ 为一个 syndetic 集. 不失一般性, 设 $2r_1 \leqslant w_{j+1}^1 - w_j^1 \leqslant l_1$ 且 $2k_1 \leqslant w_1^1 \leqslant l_1$, 其中 l_1 为某 $\mathbb{N}$ 中元. 设 $u_i^1 = w_i^1, i \in \mathbb{N}$. 取 $y^1 \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, 使得 $y^1[0;k_1-1] = A_1$, $y^1[u_i^1; u_i^1 + k_1 - 1] = A_1$ 且 $y^1(j) = 0$ 若 $j \in \mathbb{Z}_+ \setminus ([0;k_1-1] \cup \cup_{i=1}^{\infty}[u_i^1; u_i^1 + k_1 - 1])$.

易见, A_1 在 y^1 中以间距 l_1 出现且 $F_1 \subset F$, 其中 $1_{F_1} = y^1$.

第 2 步. 构造 A_2 及 $F_2 \subset F$, 使得

(1) A_2 形如 $A_1 V_1 A_1$, 且如果 $k_2 = |A_2|$, 那么 $A_2 = y^1[0;k_2-1]$;

(2) $y^2[0;k_2-1] = A_2$, 并且 A_1, A_2 在 y^2 中分别以间距 l_1 和 l_2 syndetic 出现;

(3) $F_2 = \{i \in \mathbb{Z}_+ : y^2(i) = 1\} \subset F$.

设 $k_2 = u_1^1 + k_1$ 及 $A_2 = y^1[0;k_2-1]$. 则 A_2 形如 $A_1 V_1 A_1$. 令 $r_2 = 2l_1 + 2k_1 + k_2$. 因为 $F \in \mathcal{F}_{\rm ts}$, 1^{r_2} 在 F 中出现的位置 $W_2 = \{w_1^2, w_2^2, \cdots\}$ 为一个 syndetic 集. 不失一般性, 设 $2r_2 \leqslant w_{j+1}^2 - w_j^2 \leqslant l_2 - (l_1 + k_1)$ 且 $2k_2 \leqslant w_1^2 \leqslant l_2 - (l_1 + k_1)$, 其中 l_2 为某 $\mathbb{N}$ 中元.

为得到 y^2, 对每个 $i \in \mathbb{N}$, 我们改变 y^1 在 $[w_i^2; w_i^2 + r_2 - 1]$ 处的值. 下面我们论述如何改变 $[w_1^2; w_1^2 + r_2 - 1]$ 处值的大致想法.

设 k, j 满足 $u_{k-1}^1 < w_1^2 \leqslant u_k^1$ 及 $u_j^1 + k_1 - 1 \leqslant w_1^2 + r_2 - 1 < u_{j+1}^1 + k_1 - 1$. 令 l 为 $(u_j^1 - 1 - u_k^1 - k_1 - k_2)/k_1$ 的整数部分. 令 $u_1^2 = u_k^1 + k_1$. 设 $y^2[u_1^2; u_1^2 + k_2 - 1] = A_2$ 及 $y^2[u_1^2 + k_2 + pk_1; u_1^2 + k_2 + (p+1)k_1 - 1] = A_1$, $\forall p = 0,1,\cdots,l-1$. 即先在位置 u_1^2 处取 A_2, 再放入尽可能多的 A_1. 同样处理 $[w_i^2; w_i^2 + r_2 - 1]$ 处的情况, 我们得到 $u_i^2 \in [w_i^2, w_i^2 + r_2 - 1]$, 使得 $y^2[u_i^2; u_i^2 + k_2 - 1] = A_2$, $i = 1,2,\cdots$.

以如此方式我们得到 y^2. 易见 y^1 和 y^2 只有在 $[w_i^2; w_i^2 + r_2 - 1]$ 处相异. 这样

$$F_2 = \{i \in \mathbb{Z}_+ : y^2(i) = 1\} \subset F_1 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [w_i^2; w_i^2 + r_2 - 1].$$

同时根据构造, A_1, A_2 在 y^2 中分以间距 l_1 和 l_2 syndetic 出现.

第 3 步. 归纳构造 A_{m+1} 和 $F_{m+1} \subset F$, 使得

(1) A_{m+1} 形如 $A_m V_m A_m$, 且如果 $k_{m+1} = |A_{m+1}|$, 那么 $A_{m+1} = y^m[0; k_{m+1}-1]$;

(2) $y^{m+1}[0; k_{m+1} - 1] = A_{m+1}$ 且对每个 $1 \leqslant i \leqslant m+1$, A_i 在 y^{m+1} 中以 l_i 为间距 syndetic 出现;

(3) $F_{m+1} = \{i \in \mathbb{Z}_+ : y^{m+1}(i) = 1\} \subset F$.

构造完全类似于第 (2) 步, 我们省略之.

这样我们得到了 y^{m+1}. 易见 y^{m+1} 和 y^m 仅在 $[w_i^{m+1}; w_i^{m+1} + r_{m+1} - 1](i = 1, 2, \cdots)$ 处相异. 于是

$$F_{m+1} = \{i \in \mathbb{Z}_+ : y^{m+1}(i) = 1\} \subset F_m \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} [w_i^{m+1}; w_i^{m+1} + r_{m+1} - 1].$$

且由构造, 对任意 $1 \leqslant i \leqslant m+1$, A_i 在 y^{m+1} 中以间距 l_i syndetic 出现.

综上, 我们对于任意 $m \in \mathbb{N}$, 定义了有限词 A_m. 令 $y = \lim A_m = \lim y^m$. 由构造, 对每个 $m \in \mathbb{N}$, A_m 在 y 中以间距 l_m 出现. 于是 y 为转移 σ 下的极小点, 且易见 $y \neq (0, 0, \cdots)$. 令 $Y = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}(y, \sigma))$ 及 $U = \{x \in Y : y(0) = 1\}$. 则

$$\varnothing \neq N(y, U) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{i \in \mathbb{Z}_+ : A_n(i) = 1, 0 \leqslant i \leqslant k_n - 1\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_n \subset F.$$

于是 F 包含了一个 m 集 $N(y, U)$. □

注记 9.4.4 存在不是 thick 的 m 集. 例如, 设 (X, T) 为非平凡的极小集, $x \in X$. 如果 U 和 V 为 X 的不交的开集, 那么 $N(x, U)$ 和 $N(x, V)$ 为不交的 m 集. 特别地, 它们均为 syndetic 的, 但都不是 thick 的.

定理 9.4.5 设 (X, T) 为传递的动力系统. 如果 $(X, T) \perp \mathcal{M}$, 那么 (X, T) 为弱混合的 M 系统, 且没有非平凡的极小因子.

证明 设 $x \in \mathrm{Trans}_T$, U 为 x 的非空开邻域. 根据定理 9.4.2, 对任意 m 集 A, $N(x, U) \cap A \neq \varnothing$. 由定理 9.4.3, 这说明 $N(x, U)$ 与所有 $\mathcal{F}_{\mathrm{ts}}$ 集相交非空. 于是 $N(x, U) \in \mathcal{F}_{\mathrm{ps}}$. 由定理 1.3.10 (X, T) 为 M 系统. 因为非平凡系统不可能自交, 根据命题 9.1.2, $\mathcal{M}^{\perp}$ 中系统仅有平凡的极小因子. 于是 (X, T) 没有非平凡的极小因子.

因为 (X, T) 为传递的, (X, T) 弱不交于所有极小系统, 进而为扩散的. 作为习题, 请读者证明, 此时 (X, T) 也弱不交于所有 M 系统. 尤其, (X, T) 为弱混合的. □

注记 9.4.6 定理 9.4.5 中条件不是充分的. 例如, 设 (X, T) 为以 p 为不动点的弱混合的 M 系统, 而 (Y, S) 为极小的强混合系统. 则 $X \times Y$ 为弱混合的 M 系统. 易见, $X \times Y$ 交于 Y. 将 $\{p\} \times Y$ "捏" 为一个点 p' 得到一个系统 Z, 它也交于 Y. 但是 Z 为弱混合的 M 系统, 并且没有非平凡的极小因子 (p' 为不动点).

Furstenberg(1967) 证明了：如果 (X,T) 为完全传递的且周期点集稠密，那么 $(X,T)\in\mathcal{M}^{\perp}$. 此结论可推广如下. 称系统有**稠密的小周期集**，是指对任意非空开集 U，存在非空闭子集 $A\subseteq U$ 以及 $k\in\mathbb{N}$，使得 $T^k(A)\subset A$. 我们有

定理 9.4.7　设 (X,T) 为具有稠密小周期集的完全传递的系统，那么 $(X,T)\in\mathcal{M}^{\perp}$.

为证定理 9.4.7，我们需要两个引理.

引理 9.4.8　设 $A\subset\mathbb{Z}_+$ 为 m 集. 那么存在 $r\in\mathbb{Z}_+$，使得对任意 $k\in\mathbb{Z}_+$，$N_k(A,r)=\{i\in\mathbb{Z}_+:ki+r\in A\}$ 为一个 m 集，继而也为 syndetic 的.

证明　因为 A 为 m 集，所以存在极小系统 (X,T)，$x\in X$ 以及 X 的开集 U，使得 $A\supset N(x,U)$. 取 $r\in\mathbb{Z}_+$ 以及 x 的邻域 V，使得 $T^rV\subset U$. 这样 $N(x,U)\supset N(x,V)+r$. 由于 x 也是 T^k 的极小点 (对任意 $k\in\mathbb{Z}_+$)，于是 $\{i\in\mathbb{Z}_+:T^{ki}x\in V\}$ 为 m 集，继而也为 syndetic 的. 这样对任意 $k\in\mathbb{Z}_+,N_k(A,r)\supset\{i\in\mathbb{Z}_+:T^{ki}x\in V\}$ 为 m 集，继而也为 syndetic 的. □

引理 9.4.9　设 (X,T) 为动力系统. 则 (X,T) 为具有稠密小周期集的完全传递的系统当且仅当存在传递点 x，使得对 x 任意邻域 U，我们有性质 $(\star)$：

$(\star)$ 对任意 $r\in\mathbb{Z}_+$，存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $N_k(x,U,r)=\{i\in\mathbb{Z}_+:T^{ki+r}x\in U\}$ 为 thick 的.

证明　设 (X,T) 为有稠密小周期集的完全传递系统且 $x\in\mathrm{Trans}_T$. 则 $x\in\mathrm{Trans}_{T^k}$，$\forall k\in\mathbb{N}$. 对 x 的任意邻域 U，存在非空闭集 $A\subset U$ 以及 $k\in\mathbb{N}$，使得 $T^k(A)\subset A$. 取 $p\in A$. 那么存在 $n_1<n_2<\cdots$，使得 $N(p,U)\supset\cup_{i=1}^{\infty}\{kn_i,k(n_i+1),\cdots,k(n_i+i)\}$. 这样，对任意自然数 l，我们能找到 p 的邻域 V_l，使得当 $y\in V_l$ 时，有 $T^{kn_l}y,T^{k(n_l+1)}y,\cdots,T^{k(n_l+l)}y\in U$. 对任意 $r\in\mathbb{Z}_+$，由于 T^rx 为 T^k 的传递点，存在 $m\in\mathbb{Z}_+$，使得 $T^{mk}T^rx\in V_l$. 继而 $N_k(x,U,r)\supset\{n_l+m+1,n_l+m+2,\cdots,n_l+m+l\}$，$\forall l\in\mathbb{N}$. 这说明 $N_k(x,U,r)$ 为 thick 的.

反之，设存在传递点 x，使得对 x 任意邻域 U，我们有性质 $(\star)$. 为证明 (X,T) 为具有稠密小周期集的完全传递系统，仅需证明对于 X 的任意开集 W 及 $n\in\mathbb{N}$，$N_n(x,W)\neq\varnothing$ 且存在 $k\in\mathbb{N}$ 及 $p\in X$，使得 $N_k(p,W)$ 为 thick 的.

由于 x 为传递点，存在 $s\in\mathbb{N}$，使得 $T^sx\in W$. 取 x 的开邻域 U，使得 $T^sU\subset W$ 且取 $r\in\mathbb{N}$，使得 $n|(r+s)$. 对于 U 和 r，因为我们有性质 $(\star)$，所以存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $N_k(x,U,r)$ 为 thick 的. 令 $p=T^{r+s}x$，则 $N_k(p,W)\supset N_k(x,W,r+s)\supset N_k(x,U,r)$(因为 $T^sU\subset W$). 于是 $N_k(p,W)$ 为 thick 的. 易见，$N_k(p,W)\cap n\mathbb{N}\neq\varnothing$. 对于 $m\in N_k(p,W)\cap n\mathbb{N}$，有 $T^{km+r+s}x\in W$. 因为 $n|(km+r+s)$，所以 $N_n(x,W)\neq\varnothing$. □

定理 9.4.7 的证明　设 $x\in\mathrm{Trans}_T$. 由定理 9.4.2，仅需证明 x 的任意邻域 U 和任意 m 集 A，有 $N(x,U)\cap A\neq\varnothing$. 由引理 9.4.8，存在 $r\in\mathbb{Z}_+$，使得对任意 $k\in\mathbb{Z}_+$，$N_k(A,r)=\{i\in\mathbb{Z}_+:ki+r\in A\}$ 为 syndetic 的. 由于性质 $(\star)$ 成立，存在

$k_r \in \mathbb{N}$, 使得 $N_{k_r}(x,U,r)=\{i\in\mathbb{Z}_+ : T^{k_r i+r}x\in U\}$ 为 thick 的 (引理 9.4.9). 于是 $N_{k_r}(x,U,r)\cap N_{k_r}(A,r)\neq\varnothing$. 这说明 $N(x,U)\cap A\neq\varnothing$. 证毕.

作为推论, 我们得到 Furstenberg 的结论：

推论 9.4.10 如果 (X,T) 为完全传递的 P 系统, 那么 $(X,T)\in\mathcal{M}^\perp$.

注记 9.4.11 Huang-Ye(2005) 构造了一个没有周期点的但在 $\mathcal{M}^\perp$ 中的传递系统.

习 题 9.4

1. 证明：$\mathcal{M}^{\perp\perp}=\mathcal{M}$.

2. 证明：如果 (X,T) 为扩散的, 那么 (X,T) 弱不交于所有 M 系统. 提示：参见文献 (Akin-Glasner, 2001).

3. 证明：由 m 集生成的族可由那些指示函数为 (Σ,σ) 中的极小点的集合全体生成.

§9.5 不交于所有极小系统的系统：一般情形

本节是上一节的延续. 有了上一节的讨论, 一个自然的问题就是：如果 $(X,T)\in\mathcal{M}^\perp$ 但 (X,T) 非传递, 那么结果将会如何? 我们陈述关于这个问题的一些结论, 详细讨论参见文献 (Huang-Ye, 2005).

定理 9.5.1 设 (X,T) 为动力系统. 如果 $(X,T)\perp\mathcal{M}$, 那么 T 的极小点在 X 中稠密.

定理 9.5.1 的证明不同于定理 9.4.5 的证明. 我们需要一个比定理 9.4.3 更强的引理. 首先有定义：

定义 9.5.2 一族 $\mathbb{Z}_+$ 的 $\mathcal{F}_{\rm ts}$ 序列 $\{F_n\}_1^\infty$ 称为**一致的**, 是指对任意 $l\in\mathbb{N}$, 存在 $\phi(l)$, 使得对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $\mathbb{Z}_+$ 子集 $\{w_1^n(l),w_2^n(l),w_3^n(l),\cdots\}$, 使得 $w_1^n(l)\leqslant\phi(l)$, $w_{i+1}^n(l)-w_i^n(l)\leqslant\phi(l)$ 且 $\{w_i^n(l),w_i^n(l)+1,\cdots,w_i^n(l)+l-1\}\subset F_n$, $i\in\mathbb{N}$.

作为定理 9.4.3 的加强, 有

定理 9.5.3 设 $\{F_n'\}_{n=1}^{+\infty}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的一致 $\mathcal{F}_{\rm ts}$ 序列. 则存在极小系统 $(Y,\sigma)\subset(\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+},\sigma)$, 使得对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $y_n\in Y$ 满足 $N(y_n,[1])\subset F_n'$, 其中 $[1]=\{y\in Y: y(0)=1\}$.

证明 定理的证明可以经过定理 9.4.3 证明的修正得到, 留作习题. □

下面证明定理 9.5.1.

定理 9.5.1 证明 不失一般性, 设 T 为同胚. 如果极小点集 M 不在 X 中稠密, 那么存在 X 的开集 U 以及 ${\rm cl}(M)$ 的开邻域 V, 使得 $U\cap V=\varnothing$.

根据命题 9.1.3, $\mathrm{Rec}(T)$ 在 U 中稠密. 于是可以取回复点 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset U$, 使得 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 在 U 中稠. 令 $F_n = N(x_n, U^c) \supset N(x_n, V)$, $n = 1, 2, \cdots$.

断言: $\{F_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为一致的 $\mathcal{F}_{\mathrm{ts}}$ 列.

断言的证明　对任意 $l > 0$, 存在 $\mathrm{cl}(M)$ 的邻域 $W_l \subset V$, 使得 $T^k(W_l) \subset V$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant l$. 因为 $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} T^{-i} W_l = X$ 及 X 为紧致的, 存在 $\phi(l) > 0$, 使得 $\bigcup_{0 \leqslant i \leqslant \phi(l)} T^{-i} W_l = X$.

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令 $N(x_n, W_l) = \{w_1^n, w_2^n, \cdots\}$. 易见 $w_1^n \leqslant \phi(l)$, $w_{i+1}^n - w_i^n \leqslant \phi(l)$ 且 $\{w_i^n, w_i^n + 1, \cdots, w_i^n + l - 1\} \subset N(x_n, V)$. 由于 $F_n \supset N(x_n, V)$, 所以 $\{F_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 的一致 $\mathcal{F}_{\mathrm{ts}}$ 列. 断言证毕.

由断言和定理 9.5.3, 存在极小系统 $(Y, \sigma) \subset (\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}, \sigma)$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $y_n \in Y$, 使得 $N(y_n, [1]) \subset F_n$, 其中 $[1] = \{y \in Y : y(0) = 1\}$. 令

$$J = \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{+\infty} (T \times \sigma)^i (x_n, y_n) \Big) \bigcup \Big(X \setminus \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} T^i U \Big) \times Y.$$

由于 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 在 U 中稠密且每个 x_n 为回复点, 有 $\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} T^i U \subset \mathrm{cl}(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{+\infty} T^i x_n)$. 于是 J 为 X 和 Y 的 joining, 所以 $J = X \times Y$.

易见, $\mathrm{cl}(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{+\infty} (T \times \sigma)^i (x_n, y_n)) \supset U \times [1]$. 因为 $U \times [1]$ 为开集, 得到

$$\Big(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{+\infty} (T \times \sigma)^i (x_n, y_n) \Big) \cap (U \times [1]) \neq \varnothing.$$

于是存在 i 和 n, 使得 $(T^i x_n, \sigma^i y_n) \in U \times [1]$, 即 $N(x_n, U) \cap N(y_n, [1]) \neq \varnothing$, 这与 $N(y_n, [1]) \subset F_n = N(x_n, U^c)$ 矛盾! 证毕.

一般地, 我们有 (Huang-Ye, 2005, 定理 4.5)

定理 9.5.4　*设 (X, T) 为动力系统. 则 $(X, T) \perp \mathcal{M}$ 当且仅当对任意的极小系统, 存在可数个传递子系统 (依赖于 (Y, S)), 使得它们的并在 X 中稠密且每个子系统都不交于 (Y, S).*

需要注意的是, 一般而言, 如果 $(X, T) \perp \mathcal{M}$, 不一定存在可数个传递子系统, 使得它们的并在 X 中稠密且每个子系统都在 $\mathcal{M}^{\perp}$ 中.

例 9.5.5　*在 $\mathcal{M}^{\perp}$ 中存在有不可数个非平凡极小等度连续子系统的 distal 系统 (X, T).*

习　题　9.5

1. 设 T 可逆, V 为 X 的开集且 $Y = \mathrm{cl}(\cup_{i \in \mathbb{Z}} T^n(V))$. 证明: 如果 $(X, T) \perp \mathcal{M}$, 那么 $(Y, T) \perp \mathcal{M}$.

2. 如果存在 (X, T) 的传递子系统 (X_i, T), 使得 $\cup_i X_i$ 在 X 稠且 $(X_i, T) \perp \mathcal{M}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. 证明: $(X, T) \perp \mathcal{M}$.

3. 设 (X,T) 为等度连续的系统. 如果 $(X,T)\in\mathcal{M}^{\perp}$, 证明 X 的每个点为不动点. 于是, 如果系统 (Y,S) 满足 $(Y,S)\in\mathcal{M}^{\perp}$, 那么 (Y,S) 的极大等度连续因子由不动点组成.

4. 补证定理 9.5.3.

5. 设 (X,T) 为动力系统. 一个传递子系统为极大的是指它为包含关系下的极大元. 证明: 如果 (Y,T) 为 (X,T) 的传递子系统, 那么存在包含 (Y,T) 的极大传递子系统.

6. 说明例子 9.5.5 的存在性.

§9.6　极小流不交性的代数刻画与伪因子

在前面几节我们已经讨论了不交性的一些基本性质及结论, 也研究了弱不交性以及其与不交性之联系. 在这一节将注意力放在极小系统上, 对不交性进行更为深入的研究. 本节的风格多少与本书其他章节不太一样, 我们希望介绍抽象拓扑动力系统理论中关于不交性的一些基本结论. 正因为如此, 不同于其他章节, 我们将讨论一般群作用下的动力系统, 让读者可以感受一下抽象动力系统的风格. 由于 §3.3~§3.6 的绝大部分结论对于一般群作用都是成立的, 所以希望读者在阅读本节内容时先承认第 3 章中相应结论.

在本节中, Ellis 半群理论以及伪因子理论起了十分重要的作用. 首先, 在一些必要的准备后我们要给出不交性的代数刻画. 然后作为应用指出实际上在交换群作用下不交性是在 proximal 扩充下保持的. 之后, 我们将致力于研究对某类系统不交的极小系统的刻画. 主要讨论与全体极小 distal、等度连续以及弱混合等系统不交的极小系统性质.

首先考虑 Stone-Čech 紧化. 设群 T 赋以离散拓扑, 记它的全体超滤子集合为 βT. 对子集 $A\subset T$, 我们定义 $\overline{A}=\{p\in\beta T: A\in p\}$. 易验证 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cap B}, \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$, 其中 $A,B\subset T$. 于是 $\{\overline{A}: A\subset T\}$ 形成了 βT 某拓扑的一组开基 (实际上也为闭基). 在此拓扑下 βT 成为紧致 Hausdorff 空间. 定义 $j:T\to\beta T$ 为 $j(t)=\{A\subset T: t\in A\}$. 于是 $(\beta T,j)$ 为 T 的极大紧化, 称之为**Stone-Čech 紧化**. 极大紧化意味着对于任意的紧空间 X 和任意的连续函数 $f:T\to X$, f 均可唯一的扩充为连续映射 $\bar{f}:\beta T\to X$. 正因为有这条万有的性质, 使得 βT 具有半群结构, 并且有着与 Ellis 半群同样的性质 (参见习题).

对取定的 $t\in T$, 考虑映射 $s\mapsto ts$. 将之视为 T 到 βT 的连续映射, 则因为 βT 是极大紧化, 此映射可唯一扩充为 βT 到 βT 的连续映射 $p\mapsto tp$. 由于 T 是离散的, 所以这样定义了 T 在 βT 上的作用. 显然, $(\beta T,T)$ 是一个以单位元 e 为传递点的点传递系统 ($\beta T=\overline{Te}=\overline{\{t:t\in T\}}$). $(\beta T,T,e)$ 实际上是**万有点传递系统**, 也就是说它是任何点传递系统的扩充. 对于任意动力系统 (X,T) 及 $x\in X$, 连续映射 $t\to tx$ 可以唯一地扩充为 βT 到 $\overline{Tx}=\overline{\{tx:t\in T\}}$ 上的连续映射 $p\to px$. 易见, 这定义了

βT 到 Ellis 半群 $E(X,T)$ 的同态. 这样, 我们可以直接以 βT 来替代 $E(X,T)$ 作用于 (X,T) 上.

取定 βT 的一个极小左理想 M, 根据 βT 的万有性容易看出 (M,T) 实际上是**万有极小系统**, 即它为任意极小系统的扩充. 令 $J = J(M)$ 为 M 中全体幂等元的集合并取定 $u \in J$. 以 G 记群 uM, 它以 u 为单位元. 事实上, G 同构于 (M,T) 的自同构群 $\mathrm{Aut}(M,T)$(对于 $\alpha \in G$, 映射 $\varphi(p) = p\alpha$ 为 M 的自同构, 容易说明实际上 M 所有自同构均可以表达成这种形式).

对任意极小系统 (X,T) 及 $x \in uX = \{uz : z \in X\}$, 定义**Ellis 群**为

$$\mathcal{G}(X,x) = \{\alpha \in G : \alpha x = x\}.$$

由定义, $\mathcal{G}(X,x)$ 为 G 的子群. 如果 $\pi : (X,x) \to (Y,y)$ 为极小系统间的同态, 那么易验证 $\mathcal{G}(X,x)$ 为 $\mathcal{G}(Y,y)$ 的子群.

运用 Ellis 群, 我们可以刻画 proximal 扩充:

命题 9.6.1 设 $\pi : (X,x) \to (Y,y)$ 为极小系统间的同态, 其中 $x \in uX, y = \pi(x) \in uY$. 则 π 为 proximal 扩充当且仅当 $\mathcal{G}(X,x) = \mathcal{G}(Y,y)$.

证明 如果 $\mathcal{G}(X,x)$ 为 $\mathcal{G}(Y,y)$ 的真子集, 取 $\beta \in \mathcal{G}(Y,y) \setminus \mathcal{G}(X,x)$. 则 $\beta x \neq x$ 且 $\pi(\beta x) = \beta y = y = \pi(x)$. 因为 $(x, \beta x)$ 为极小点, 所以 $(x,\beta x) \notin P(X,T)$. 所以 π 不是 proximal 的.

反之, 如果 π 不是 proximal 的, 即存在 $x_1, x_2 \in X$, 使得 $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ 且 $(x_1,x_2) \notin P(X,T)$. 于是 $ux_1 \neq ux_2$ 且 $\pi(ux_1) = \pi(ux_2)$. 令 $p_1, p_2 \in G$, 使得 $ux_1 = p_1 x, ux_2 = p_2 x$. 于是

$$p_1 y = \pi(p_1 x) = \pi(ux_1) = \pi(ux_2) = \pi(p_2 x) = p_2 y.$$

所以 ${p_2}^{-1} p_1 y = y$, 即 $p_2^{-1} p_1 \in \mathcal{G}(Y,y)$. 另一方面, 由于 $ux_1 \neq ux_2$, $p_1 x \neq p_2 x$. 这样 $p_2^{-1} p_1 \notin \mathcal{G}(X,x)$, 即 $\mathcal{G}(X,x) \neq \mathcal{G}(Y,y)$. □

证明两个系统 (X,T) 和 (Y,T) 不交的一个常用的方法是验证以下两个条件:

(a) $(X \times Y, T)$ 中极小点稠密;

(b) $(X \times Y, T)$ 中只有唯一一个极小集.

对于条件 (a), 后面我们可以看到它是容易被满足的, 所以条件 (b) 是个关键. 下面我们用 Ellis 群给出一个刻画.

引理 9.6.2 设 (X,T) 与 (Y,T) 为极小系统, $x \in uX, y \in uY$ 以及 $A = \mathcal{G}(X,x), B = \mathcal{G}(Y,y)$ 为相应的 Ellis 群. 则 $(X \times Y, T)$ 有唯一极小子集当且仅当 $AB = G$.

证明 设 $G = AB$ 及 N 为 $X \times Y$ 的极小子集. 由于 (x,y) 为极小点, 所以我们仅需证明 $N \cap \overline{T(x,y)} \neq \varnothing$ 即可. 取 $y' \in uY$, 使得 $(x,y') \in N$. 我们可

以如下得到这样的 y'. 首先任意取 $(x_1, y_1) \in N$, 设 $p \in M$, 使得 $px_1 = x$. 则 $(upx_1, upy_1) = (x, upy_1) \in N$, 取 $y' = upy_1$ 即可. 由于 $y, y' \in uY$, 取 $g \in G$, 使得 $y' = gy$. 根据条件, 存在 $a \in A, b \in B$, 使得 $g = ab$. 于是 $y' = gy = aby = ay$ 且 $(x, y') = (ax, ay) = a(x, y) \in \overline{T(x, y)}$.

反之, 设 $(X \times Y, T)$ 有唯一的极小子集 N. 设 $g \in G$, 则由 (x, gy) 为极小点, 我们得到 $(x, gy) \in N$. 于是存在 $h \in G$, 使得 $(x, gy) = h(x, y)$. 由于 $gy = hy$, 所以 $h^{-1}gy = y$. 这样我们得到 $h \in A, h^{-1}g \in B$. 从而 $g = h(h^{-1}g) \in AB$. □

定理 9.6.3 设 (X, T) 与 (Y, T) 为极小系统, $x \in uX, y \in uY$ 以及 $A = \mathcal{G}(X, x), B = \mathcal{G}(Y, y)$ 为相应的 Ellis 群. 如果 $u \circ uX = X$(等价地, uX 在 X 中稠), 则 $X \perp Y$ 当且仅当 $AB = G$.

证明 设 $AB = G$, 由上引理, $X \times Y$ 中仅有一个极小子集 N. 由于 $uX \times \{y\}$ 中点均为极小的, 所以 $uX \times \{y\} \subseteq N$. 因为 uX 在 X 中稠密, 我们得到

$$X \times \{y\} = \overline{uX} \times \{y\} = \overline{uX \times \{y\}} \subseteq N.$$

于是就有 $X \times Y = \overline{T(X \times \{y\})} \subseteq N$. 反之的证明是明显的. □

推论 9.6.4 如果作用群 T 为交换群或者 X, Y 中有一个为点 distal 的, 那么 $X \perp Y$ 当且仅当 $AB = G$.

证明 根据前定理, 我们仅需验证 uX 在 X 中稠即可. 当 T 为交换群时, 我们有 $uX \supseteq u(Tx) = T(ux) = Tx$, 由 Tx 在 X 中稠密即有结论. 当 X 为点 distal 时, 设 x' 为 distal 点, 那么对任意 $t \in T$, tx' 仍为 distal 点, 从而 $utx' = tx'$. 于是 $Tx' \subseteq uX$, 同样得到 uX 在 X 中稠密. □

推论 9.6.5 如果作用群 T 为交换群, 那么不交性在 proximal 扩充下保持.

证明 根据命题 9.6.1, Ellis 群在 proximal 扩充下保持不变, 自然由定理 9.6.3 就有结论成立. □

对系统 (X, T), 它自然诱导了超空间 $2^X = \{A \subseteq X : A\text{非空闭集}\}$ 上的作用. 为避免混淆, 当用 βT 中元素 p 作用于 $A \in 2^X$ 时, 记之为 $p \circ A$. 一般而言,

$$pA = \{px : x \in A\} \subset p \circ A = \{\lim t_i x_i : x_i \in A, t_i\text{为收敛于 } p \text{ 的网}\}.$$

系统 $(2^X, T)$ 中任意极小集称为 (X, T) 的**伪因子**.

命题 9.6.6 任何极小系统交于它的任何非平凡伪因子.

证明 设 (X, T) 为极小系统, Z 为它的一个非平凡伪因子. 令 $L = \{(x, A) \in X \times Z : x \in A\}$. 则 L 为非空闭不变子集. 由于 Z 非平凡, 存在 $A \in Z$, 使得 $A \neq X$. 所以如果 $x \in X \setminus A$, 则 $(x, A) \notin L$, $L \neq X \times Z$. □

回忆扩充 $\pi : X \to Y$ 为**HP 扩充**是指存在点 $y \in Y$ 以及网 $\{t_n\} \subseteq T$, 使得 $t_n \pi^{-1}(y)$ 在 Hausdoff 度量下收敛于一个点, 即对 $y \in X, x \in \pi^{-1}(y)$ 和 $p \in M$, 成立

$p\circ\pi^{-1}(y)=\{px\}$. 如果 X 为度量空间, 那么 HP 扩充就是几乎一对一扩充.

定理 9.6.7 设 $\pi: X\to Y$ 是极小流间的同态. 定义 $Y'=Cl\{\pi^{-1}(y): y\in Y\}\subseteq 2^X$, 它为 2^X 的闭不变子集且有唯一一个极小子集. 如果定义 $\sigma: Y'\to Y$, 使得 $\sigma(B)=y$(其中 $B\subseteq\pi^{-1}(y)$), 那么 σ 为 HP 的.

证明 由 Zorn 引理, 存在 Y' 中元 A 在 Y' 中包含关系下极小, 即如果存在 $B\in Y'$ 且 $B\subseteq A$, 则 $A=B$. 由于 $A\in Y'$, 存在网 $\{y_i\}\subseteq Y$, 使得 $\pi^{-1}(y_i)\to A$. 设 Y^* 为 Y' 的极小集. 因为 Y^* 映满 Y, 所以存在 $B_i\in Y^*$, 使得 $B_i\subseteq\pi^{-1}(y_i)$. 不妨设 $B_i\to B^*\in Y^*$. 由于 $\pi^{-1}(y_i)\to A$, 所以有 $B^*\subseteq A$. 根据 A 的定义, 有 $B^*=A$.

综上, 我们说明了 A 在 Y' 的任何一个极小子集中, 于是实际上 Y^* 为 Y' 的唯一极小集. 对 $y\in Y$,$\{p\circ\pi^{-1}(y): p\in M\}$ 为极小集, 于是有 $Y^*=\{p\circ\pi^{-1}(y): p\in M\}$.

设 $y_0\in Y$, 使得 $A\subseteq\pi^{-1}(y_0)$. 设 $\{t_i\}$ 为 T 中网使得 $t_i\pi^{-1}(y_0)\to A$. 设 $B_i\subseteq\pi^{-1}(y_0)$ 及 $t_iB_i\to B^\star$, 类似于前面的分析知 $A=B^\star$, 进而 σ 为 HP 的. □

引理 9.6.8 设 X,Y 为两个极小系统, 且 $X\not\perp Y$. 则存在 X 的 HP 扩充 X^*, 使得 X^* 有 Y 的一个非平凡的伪因子作为自己的因子.

证明 设 u 为 M 的幂等元以及设 $x\in uX, y\in uY$. 定义同态 $\gamma: M\to X$ 及 $\delta: M\to Y$, 使得 $\gamma(p)=px,\delta(p)=py$. 由上定理, $X^*=\{p\circ\gamma^{-1}(x): p\in M\}$ 为 X 的 HP 扩充. $Y'=\{\delta(p\circ\gamma^{-1}(x)): p\in M\}$ 为 Y 的伪因子. 下证 Y' 为非平凡的. 由于 $\delta(u\circ\gamma^{-1}(x))\subseteq\delta(\gamma^{-1}(x))$, 我们仅需说明 $\delta(\gamma^{-1}(x))\neq Y$ 即可. 否则, 设 $\delta(\gamma^{-1}(x))=Y$. 那么对任意 $y'\in Y$, 存在 $p\in M$, 使得 $px=x$ 且 $py=y'$. 于是 $\overline{T(x,y)}\supseteq\{x\}\times Y$, 从而 $\overline{T(x,y)}=X\times Y$. 但是 (x,y) 为极小点 (因为 $u(x,y)=(x,y)$), 所以 $X\perp Y$. 矛盾! □

引理 9.6.9 设 $(X,T),(Y,T)$ 和 (X',T) 为极小系统且 Y 为 distal 的. 设 $\psi: X'\to Y$ 为扩充而 $\sigma: X'\to X$ 为 proximal 的, 那么存在扩充 $\pi: X\to Y$, 使得 $\pi\circ\sigma=\psi$.

证明留作习题.

引理 9.6.10 设 (X,T) 为极小 distal 的, 则 X 的任何伪因子 $\mathcal{X}$ 也为极小 distal 的.

证明 设 $A\in\mathcal{X}$, 我们证明对于任意幂等元 $v\in M$, 有 $v\circ A=A$ 成立. 首先由于 $\mathcal{X}$ 极小, 存在幂等元 $u\in M$, 使得 $u\circ A=A$. 取幂等元 $v\in M$, 令 $B=v\circ A$. 由于 X 为 distal 的, 所以 $vx=x,\forall x\in X$. 于是就有 $A=vA\subseteq v\circ A=B$. 另外, 我们有

$$B=uB\subseteq u\circ B=u\circ v\circ A=uv\circ A=u\circ A=A.$$

所以, $A=B=v\circ A$. 于是 $\mathcal{X}$ 为 distal 的. □

最后我们讨论不交类. 设 $\mathfrak{F}$ 为一族极小流, 那么设

$$\mathfrak{F}^{\perp}=\{(X,T):X\perp Y,\forall Y\in\mathfrak{F}\}.$$

记 $\mathcal{D}$ 为全体极小 distal 流的集合, $\mathcal{E}$ 为全体极小等度连续流的集合, 而记全体极小弱混合流的全体为 $\mathcal{WM}$.

定理 9.6.11 当作用群为交换群时, 有

$$\mathcal{D}^{\perp}=\mathcal{E}^{\perp}=\mathcal{WM}.$$

证明 首先证明 $X\in\mathcal{D}^{\perp}$ 当且仅当 X 没有非平凡 distal 因子. 如果 X 有非平凡 distal 因子 Z, 则 $X\not\perp Z$, 从而 $X\notin\mathcal{D}^{\perp}$. 反之, 如果 $X\notin\mathcal{D}^{\perp}$, 那么 X 不交于万有 distal 系统 (D,T). 根据引理 9.6.8, 存在 X 的 HP 扩充 X^* 以及 D 的非平凡伪因子 Z', 使得 Z' 为 X^* 的因子. 根据引理 9.6.10, Z' 为 distal 的. 再由引理 9.6.9, Z' 为 X 的因子. 于是 X 有非平凡 distal 因子.

完全类似的讨论可以证明 $X\in\mathcal{E}^{\perp}$ 当且仅当 X 没有非平凡等度连续因子. 再由 Furstenberg 结构定理, 我们知道 X 有非平凡 distal 因子当且仅当它有非平凡等度连续因子. 于是我们证明了 $\mathcal{D}^{\perp}=\mathcal{E}^{\perp}$. 根据结论: 交换群作用下, 没有非平凡等度连续因子的极小系统为弱混合的, 我们得到上面两个集合等于 $\mathcal{WM}$. □

定理 9.6.12 *如果作用群为交换群, 那么系统属于 $\mathcal{WM}^{\perp}$ 当且仅当 X 的每个非平凡伪因子有非平凡的 distal 因子.*

证明 设 $X\notin\mathcal{WM}^{\perp}$, 由定理, 存在没有 distal 因子的极小系统 Y, 使得 $X\not\perp Y$. 由引理 9.6.8, 存在 X 的伪因子 X', 使得 X' 为 Y^* 的因子, 其中 Y^* 是 Y 的 HP 扩充. 由于 Y 没有非平凡的 distal 因子, 而 Y^* 为 Y 的 proximal 扩充, 所以 Y^* 没有非平凡的 distal 因子. 尤其 X' 没有非平凡的 distal 因子.

反之, 如果 X 非平凡的伪因子 X' 没有非平凡的 distal 因子, 那么首先有 $X'\in\mathcal{D}^{\perp}=\mathcal{WM}$. 因为极小系统与其非平凡伪因子相交, 所以 $X\notin\mathcal{WM}^{\perp}$. □

习　题　9.6

1. 说明 βT 具有与 Ellis 半群一样的半群结构.

2. 设 (X,T) 为极小系统, 证明任何 (M,T) 到 (X,T) 的同态都形如: $p\mapsto px$, 其中 $x\in X$.

3. 证明引理 9.6.9.

§9.7　注　　记

不交性的内容发展到现在已经积累了许多丰富的结论. 关于不交性, 首先推荐的是 Furstenberg(1967) 的开创性文章. §9.1 中的基本概念可以参见 (Furstenberg,

1967), 关于半 distal 的讨论参见文献 (Akin etc.). §9.2 的内容参见文献 (Blanchard, 1993; Huang-Ye, 2004b). §9.3 的处理方法来自 McMahon(1978) 和 Vries(1993), 类似内容也可参见文献 (Auslander etc., 1984; Peleng, 1972; Petersen, 1970; Keynes-Robertson, 1969) 等. §9.4 和 §9.5 的内容来自 Huang-Ye (2005), 进一步的讨论见文献 (Huang etc., 2007b). 关于一般群作用下极小流的不交性理论较为成熟, 可以参见文献 (Auslander etc., 1984; Auslander, 1988; Ellis, 1969; Ellis etc., 1976; Woude, 1982) 等, 我们选取了其中一些最基本的结论作为最后一节的内容, 论述上主要采用了文献 (Auslander, 1988) 中的处理方式.

第10章 混 沌

前面我们已经遇到了许多与混沌有关的概念, 这一章将对混沌这个主题进行较为详细的讨论. §10.1 回顾与整理一些重要的混沌的概念; §10.2 与 §10.3 运用纲的分析证明 Devaney 混沌与正熵都蕴含了 Li-Yorke 混沌; §10.4 给出一个类似于 Li-Yorke 混沌的混沌集的定义, 并且给出此混沌的一个判别准则; §10.5 介绍一种具有较为复杂性状的子集: 熊混沌集, 并且证明任意非平凡的混合系统都具有熊混沌子集. 最后, 我们简单介绍一些其他的混沌定义.

§10.1 混沌的定义

20 世纪 60 年代以前, 确定论是科学研究的主导思想. 人们认为只要有精确的数学模型和初值, 我们便可预知未来, 反演过去. 但是随着气象学、生态学、天体力学等自然学科中许多现象, 特别是 Lorenz 现象的发现, 人们才认识到随机性和不可确定性的重要. 事实上, 早在 19 世纪末 20 世纪初, 法国数学家 Poincaré 在他的著作《天体力学的新方法》最后一章论述同宿栅栏 (homoclinic tangle) 的时候便已瞥见混沌:

"*A very small cause that escapes our notice determines a considerable effect that we cannot fail to see, and then we say that the effect is due to chance. If we knew exactly the laws of nature and situation of the universe at the initial moment, we could predict exactly the situation of that the same universe at a succeeding moment. But even if it were the case that the nature laws had no longer any secret for us, we could still only know the initial situation approximately ⋯ It may happen that small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. Prediction becomes impossible, and we have the fortuitous phenomenon.*"

这就是 Poincaré 关于混沌的理解, 也就是现在我们所指的初值敏感的含义. 但是他的这个伟大的想法却被人们忽略了整整七十多年.

从 20 世纪 60 年代以来, 确定论的科学观开始动摇, 人们开始探索科学上那些不可预测的现象, 这使混沌科学的研究得到飞速发展. 美国气象学家 Lorenz 在这方面取得了很大的成功. 1963 年, Lorenz 在《大气科学》杂志上发表了"确定性的非

周期流”一文, 指出在气候不能精确重演与长期天气预报无能为力之间必然存在着一种联系. 他认为在一串时间中可能有一个临界点, 在这个点上, 小的变化可以放大为大的变化. 而混沌就意味着这些点无处不在. 这些研究清楚地描述了“对初值条件的敏感性”这一混沌的基本特性. 1971 年, Ruelle 和 Takens 在其文章“湍流的本质”中也表达了类似的想法 (Ruelle-Taken, 1971), “初值敏感” (sensitive dependence on initial conditions) 这个词最早就是由 Ruelle 在研究湍流时引入的. 1975 年, Li 与 Yorke 发表了“周期三蕴含混沌”的文章, 在数学上第一次引入了“混沌”这个名词 (Li-Yorke, 1975). 他们的工作激发了众多领域的科学家对混沌现象研究的极大热情. 时至今日, 混沌的观点已经深入人心, 而混沌的研究也已经成为非线性科学的主要课题之一. 但是, 由于不同领域的科学家对什么是混沌有着不同的认识和理解, 现在已有许多关于混沌的不同定义.

目前, 数学上混沌的定义主要集中在以下几个方面: (1) 从初值敏感性出发的定义; (2) 从 Li-Yorke 混沌的角度得出的定义; (3) 从熵的角度刻画系统复杂性以及它的衍生物; (4) 从具有较强回复属性来表现混沌.

首先是从基于轨道的不稳定性或初值敏感性定义的混沌. 我们在 §3.2 中已经详细讨论过初值敏感性. 回忆一下, 一个动力系统 (X,T) 具有**初值敏感性**, 是指存在 $\varepsilon>0$, 使得对任意 $\delta>0$ 和 $x\in X$, 能找到 $y\in B_\delta(x)$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $d(T^nx,T^ny)>\varepsilon$. 1986 年, Devaney 以初值敏感性为核心定义了一类重要的混沌. Devaney 称系统 (X,T) 为混沌的, 如果满足以下三条:

(1) (X,T) 是传递的;

(2) T 的周期点集在 X 中稠密;

(3) (X,T) 具有初值敏感性.

人们习惯把满足上述三条属性的系统称为**Devaney 混沌的**. 前面我们已经看到传递的周期点稠密的非周期系统具有初值敏感性 (推论 3.2.7 或参见 (Banks etc., 1972; Glasner-Weiss, 1993; Akin etc., 1996)), 即有 (1) + (2) ⇒ (3). 鉴于这些原因, 我们干脆将上面定义中第 (2) 条舍弃, 而直接把满足第 (1), 第 (3) 个条件的系统成为混沌的. 准确地说, 称系统为**Auslander-Yorke 混沌的**是指它为初值敏感的传递系统. 例如, 任何非极小的 E 系统 (进而 M 系统) 为 Auslander-Yorke 混沌的 (推论 3.2.7).

与初值敏感对立的概念是“几乎等度连续性”. 这个概念我们在第 3 章已经详细讨论过了, 下面简单回顾一下一些基本的概念与结论. 设 (X,T) 为动力系统, 点 $x\in X$ 称为**等度连续的**是指对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意满足 $d(x,y)<\delta$ 的 y 成立 $d(T^nx,T^ny)<\varepsilon,\forall n\geqslant 0$. 系统称为**几乎等度连续的**是指它为传递的且至少有一个等度连续点. 一个传递系统如果它不是几乎等度连续的, 就是初值敏感的. 而且对几乎等度连续系统, 它的全体等度连续点与系统的传递点集相吻合. 对极小

系统结论更明确：它或为等度连续的，或为初值敏感的.

下面我们看 Li-Yorke 混沌的定义. 直观上讲, Li-Yorke 混沌说的是在系统中存在许多不同的状态, 其中任意两个不同的状态随着时间的演变在某些时刻会变得越来越相似, 但是又在许多其他时刻不一样. 易见这也体现的是系统的不可预知性. 下面我们给出严格的数学定义. 设 (X,T) 为动力系统, d 为空间 X 的一个度量. 称空间 X 的点对 (x,y) 为 **Li-Yorke 对**, 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\inf d(T^nx,T^ny)=0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup d(T^nx,T^ny)>0$. X 的子集 S 称为**混乱集**, 如果对任意 $x\neq y\in S$, (x,y) 为 Li-Yorke 对. 如果 (X,T) 具有不可数混乱集, 则称 (X,T) 为 **Li-Yorke 混沌的**. 许多系统是 Li-Yorke 混沌的. 例如, Li 和 Yorke(1975) 证明：如果区间 $[0,1]$ 上的连续自映射具有 3 周期点, 则它为 Li-Yorke 混沌的; Misirurewicz(1985) 说明存在区间 $[0,1]$ 上的连续自映射具有 Lebesgue 测度为 1 的混乱集; Kato(1994) 对 $[0,1]^n$ 证明了类似于 Misiurewicz 的结果; 麦结华 (1997) 说明了对每个 $n\geqslant 2$, 存在 $(0,1)^n$ 上的自同胚, 它以全空间为混乱集; 黄文和叶向东 (2001b) 进一步说明存在"许多"非平凡的动力系统 (X,T) 以全空间 X 为混乱集, 其中 X 可以为可数个点构成的紧度量空间、Cantor 集和任意维的连通紧度量空间等.

由 Li-Yorke 混沌的定义派生出了许多新的混沌定义. 例如, 如果存在不可数、稠密的混乱集, 则称系统为**稠密 Li-Yorke 混沌的**; 而如果全体 Li-Yorke 对的集合在乘积空间 $X\times X$ 中为剩余 (residual) 集合, 则称系统为**本质混沌的**. 根据 Kuratowski-Ulam 定理, 本质混沌必为稠密 Li-Yorke 混沌的, 但反之不然 (Blanchard etc., 2002; Huang-Ye, 2002a). 另外, Akin 加强了 Li-Yorke 对的概念, 引入了**强 Li-Yorke 对**, 即在原有条件上再要求点对在乘积空间 $X\times X$ 中为回复的. 而 X 的子集 S 称为**强混乱集**, 是指对任意 $x\neq y\in S$, (x,y) 为强 Li-Yorke 对. 进而, 如果系统具有不可数强混乱集, 则称 (X,T) 为**强 Li-Yorke 混沌的**. Floyd-Auslander 系统为 Li-Yorke 混沌但没有强 Li-Yorke 对的例子 (Auslander, 1988).

与 Li-Yorke 混沌相对立的情况是没有 Li-Yorke 对或没有强 Li-Yorke 对. 这就是第 3 章中已经研究过的几乎 distal 和半 distal 的概念, 在这里我们不再多述.

Li-Yorke 混沌与 Auslander-Yorke 混沌没有必然联系, 二者互不蕴含. Morse 极小系统为极小且初值敏感的, 但是它的混乱集都是有限集, 于是它是 Auslander-Yorke 混沌但不是 Li-Yorke 混沌的; Akin-Glasner(2001) 证明存在扩散的几乎等度连续系统 (也可参见 §3.7), 这个系统是 Li-Yorke 混沌但不 Auslander-Yorke 混沌. 由于极小的时候, 系统或为等度连续的, 或为初值敏感的, 所以此时, Li-Yorke 混沌系统必为 Auslander-Yorke 混沌. 对于 Li-Yorke 混沌与 Devaney 混沌, 在下一节我们会证明后者蕴含前者.

还有一类关于混沌的定义是跟系统的熵相关的. 熵的概念远在混沌提出以前就已经开始被系统研究了. 1958 年, Kolmogorov(1985) 借鉴 Shannon(1948) 信息论中

不确定性的描述在遍历论中引入了熵的概念; 随后, 在 1965 年 Adler, Konheim 和 McAndrew(1965) 引入拓扑熵的概念. 熵是重要的同构不变量, 它反映了系统的混乱程度. 由于零熵系统具有一定的确定性, 所以许多研究者就直接将正熵理解为混沌的. 测度 Kolmogorov 系统是一类极端的正熵系统, 在考虑有关测度 Kolmogorov 系统的拓扑类似时, 人们研究了一致正熵系统. 对于一致正熵系统 (X,T), 它的每个由两个非稠密开集构成的覆盖 $\mathcal{U}$ 具有正熵, 即 $\mathcal{U}$ 的复杂性函数 $N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U})$ 关于 n 为指数增长的. 于是出现了一个十分自然的问题: 如果一个动力系统的开覆盖的复杂性函数关于 n 以其他方式增长, 则我们对该系统的动力学性质能说什么? 在这种想法的指导下, Blanchard, Host 和 Maass(2000) 引入了扩散性的概念 (参见第 8 章). 他们证明了: 一个动力系统为扩散系统当且仅当它与极小系统弱不交, 由于弱混合系统与极小系统弱不交, 从而弱混合系统一定为扩散系统. 相反地, Akin 和 Glasner(2001) 证明了存在非弱混合的扩散系统 (另外的例子见 (Huang-Ye, 2002b)). 这些结论说明了扩散性是严格介于传递性和弱混合性之间的传递属性. 而对于极小系统扩散性与弱混合是等价的.

后面我们将证明扩散系统是 Li-Yorke 混沌的, 也是本质混沌的, 但是扩散性不能保证初值敏感性. 由于任何几乎等度连续系统为一致刚性的 (参见命题 3.2.12), 而刚性系统必为零熵的 (参见 (Blanchard etc., 2002) 或 §10.3). 这样, 任何传递的正熵系统必为初值敏感的, 即为 Auslander-Yorke 混沌的. 在 §10.3 中我们会证明, 正熵系统必为 Li-Yorke 混沌的.

最后一类定义混沌的方式是从回复性入手的. 一般地, 我们要求这种回复性强于弱混合性. 关于混合性, 前面我们已经讨论很多. 在本章中我们将证明 $\mathcal{F}$ 混合系统的一个等价刻画, 此刻画也说明了 $\mathcal{F}$ 混合系统的混乱程度.

当然, 还有许多别的混沌的定义, 我们将在 §10.6 中进行一些简要的介绍.

§10.2 纲的分析

纲的分析是数学中证明存在性的的一种常用方法. 一个令人印象深刻的例子是, 运用纲的分析证明 $C([0,1])$ 中处处不可导的函数在 $C([0,1])$ 中是剩余的, 这不仅说明了 $[0,1]$ 上处处连续但处处不可导的函数存在, 而且也说明了它“非常多”. 在本节中, 我们将运用纲的分析来证明 Devaney 混沌蕴含 Li-Yorke 混沌.

设 X 为没有孤立点的完备度量空间, 而 $R \subset X^n$ 为 n 元关系. 子集 $F \subset X$ 称为**在 R 中独立**, 记之为 $F \in \mathcal{J}(R)$, 是指对任意 F 中的不同元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 有 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \notin R$.

定理 10.2.1 (Mycielski 定理 (Mycielski, 1964)) *设 X 为没有孤立点的完备度量空间. 如果对每个 $n \in \mathbb{N}$, R_n 为 X^{r_n} 的第一纲子集而 $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X 一组开集, 则*

存在 Cantor 集 $C_i \subset O_i$, 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$K = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{J}(R_n).$$

一般也把这种由可数个 Cantor 集的并组成的集合称为**Mycielski 集**. 而**Kuratowski 定理**(Kuratowski, 1974) 说, 实际上对于紧度量空间, $\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{J}(R_n)$ 为 2^X 的剩余子集. 特别地, 几乎每个 Cantor 集对 $R_n, n = 1, 2, \cdots$ 为独立的.

根据 Mycielski 定理, 如果 R 为 $X \times X$ 中的稠密 G_δ 集, 那么一定存在 Mycielski 集合 K, 使得 $K \times K \setminus \Delta_X \subseteq R$. 因而, 如果我们能对某些系统说明 Li-Yorke 对的全体 $LY(X,T)$ 为 $X \times X$ 中的稠密 G_δ 集, 那么就可以判定 (X,T) 必为 Li-Yorke 混沌的. 这就是本节的主要思想.

设 (X,T) 为具有度量 d 的动力系统, 对于关系 $R \subset X \times X$ 和 $x \in X$, 定义 $R(x) = \{y \in X : (x,y) \in R\}$. 设 $[x] = \mathrm{Asym}(X,T)(x)$, 则 $[x]$ 为 x 所在的渐近类. 设 $\Delta_{\frac{1}{n}} = \left\{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < \dfrac{1}{n}\right\}$, $\Delta_X = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$ 以及 $\overline{\Delta_{\frac{1}{n}}}$ 为 $\Delta_{\frac{1}{n}}$ 的闭包. 我们容易得到以下事实:

引理 10.2.2 设 $A_{k,n} = \bigcap_{i=k}^{+\infty} (T \times T)^{-i}\overline{\Delta_{\frac{1}{n}}}$, 则

(1) $\mathrm{Asym}(X,T) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,n})$;

(2) 对每个 $x \in X$, $[x] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,n}(x))$;

(3) $LY(X,T) = P(X,T) \setminus \mathrm{Asym}(X,T)$.

对于渐近关系和渐近类, 我们有

定理 10.2.3 (渐近定理) *设 (X,T) 为动力系统. 则*

(1) 如果 (X,T) 是 2 刚性的, 那么对每个 $x \in X$, 有 $[x] = \{x\}$;

(2) 如果 (X,T) 是初值敏感的, 那么在 $X \times X$ 中渐近关系 $\mathrm{Asym}(X,T)$ 为第一纲集且对每个 $x \in X$, 渐近类 $[x]$ 为 X 的第一纲集.

证明 (1) 因每个点对 (x,y) 为乘积空间 $X \times X$ 的回复点, 从而 $\mathrm{Asym}(X,T) = \Delta_X$. 另外, 对每个 $x \in X$, 有 $[x] = \{x\}$.

(2) 设 ε 为初值敏感性定义中的正常数且 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\dfrac{2}{n} < \varepsilon$. 那么对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $x \in X$, $A_{k,n}(x)$ 没有内点. 这是因为如果存在 X 的非空开集 $U \subset A_{k,n}(x)$, 则对任意 $y, z \in U$ 和 $i \geqslant k$ 有 $d(T^i y, T^i z) \leqslant \dfrac{2}{n}$ 成立; 适当地收缩 U, 我们能做到对任意 $y, z \in U$ 和 $i \geqslant 0$, 有 $d(T^i y, T^i z) \leqslant \dfrac{2}{n}$ 成立, 这与 ε 的定义矛盾. 同理, $A_{k,n}$ 没有内点. 注意到 $A_{k,n}$ 和 $A_{k,n}(x)$ 为闭集, 由引理 10.2.2 的 (1) 和 (2) 知, 渐近关系 $\mathrm{Asym}(X,T)$ 为第一纲集, 以及对每个 $x \in X$, 渐近类 $[x]$ 为 X 的第一纲集. □

推论 10.2.4 *设 (X,T) 为非周期的传递系统. 则渐近关系 $\mathrm{Asym}(X,T)$ 为第一纲集并且对每个 $x \in X$, 渐近类 $[x]$ 为第一纲集.*

证明　如果 T 是非初值敏感的, 由命题 3.2.7 知 T 为一致刚性的, 因此 T 为 2 刚性的. 现在由渐近定理 10.2.3 即知本推论成立. □

推论 10.2.5　假设 $\{[x]:x\in X\}$ 为可数集. 则空间 X 的每个回复点为周期点且周期点集为可数集. 进而, T 的拓扑熵为零.

证明　假设 $\{[x]:x\in X\}$ 为可数集. 注意到两个不在同一轨道的周期点属于不同的渐近类以及周期点的轨道为有限集, 我们有 X 的周期点集为可数集.

设 x 为 X 的回复点. 如果 x 不是周期点, 则 x 的 ω 极限集 $\omega(x,T)$ 为非周期的传递系统. 由推论 10.2.4, 对每个 $y\in\omega(x,T)$, $[y]_{\omega(x,T)}=\mathrm{Asym}(\omega(x,T),T)(y)$ 为第一纲集. 由于紧度量空间 $\omega(x,T)$ 不能表示为可数个第一纲集的并集, $\{[y]_{\omega(x,T)}: y\in\omega(x,T)\}$ 为不可数集. 这与 $\{[x]:x\in X\}$ 为可数集矛盾. 这说明 X 的每个回复点为周期点. 最后, 由熵的变分原理和一个周期轨的拓扑熵为零的事实, 我们知 T 为零熵系统. □

注记 10.2.6　由推论 10.2.4 知非周期的传递系统 (X,T) 其渐近关系 $\mathrm{Asym}(X,T)$ 为第一纲集. 在某些情况下, 对非周期的传递系统 (X,T) 其渐近关系 $\mathrm{Asym}(X,T)$ 可以在 $X\times X$ 中稠密. 单边的两符号全转移就是如此的非周期的传递系统.

根据推论 10.2.4, 对任意非周期的传递系统 (X,T), 其渐近关系 $\mathrm{Asym}(X,T)$ 为第一纲集. 于是, 如果能说明对某些非周期的传递系统 $P(X,T)$ 为稠密的, 那么就可以运用 Mycielski 定理说明系统为 Li-Yorke 混沌的. 我们以下就由此证明 Devaney 混沌蕴含 Li-Yorke 混沌.

定理 10.2.7　设 (X,T) 为非周期的传递系统. 如果 (X,T) 具有周期点, 那么对 T 存在 Mycielski 混乱集. 假如 T 还为完全传递的, 则存在稠密 Mycielski 混乱集. 特别地, Devaney 混沌蕴含着 Li-Yorke 混沌.

证明　首先假设 T 有不动点 p. 取 $x\in\mathrm{Trans}_T$, 则存在自然数序列 $\{n_i\}$, 使得 $T^{n_i}x\to p$. 这说明对任意 $i,j\in\mathbb{N}$, $(T^ix,T^jx)\in P(X,T)$. 由此 $P(X,T)$ 为稠密集, 由定理 10.2.1 知, 对 T 存在稠密的 Mycielski 混乱集.

现假设 T 有周期为 $n>1$ 的周期点. 设 $x\in\mathrm{Trans}_T$, 则 $\omega(x,T)=X$. 设 $D_i=\omega(T^ix,T^n)$. 因 $T(D_i)=D_{i+1(\mathrm{mod}\ n)}$, 每个 D_i 为不可数集且包含了 T 的 n 周期点. 因为 $T^n|_{D_0}$ 为传递的, D_0 包含 T^n 的不动点; 由上面的讨论对 T^n 存在 D_0 的稠密 Mycielski 混沌集 B. 显然, B 也为 T 的 Mycielski 混乱集.

最后, 从上述过程不难看出如果 T 为完全传递的, 则对 T 存在稠密的 Mycielski 混乱集. 这就完成了证明. □

定理 10.2.8　任何扩散系统为 Li-Yorke 混沌的.

证明　由于扩散系统满足 $Q(X,T)=X^2$, 所以 $P(X,T)$ 为稠密的 G_δ 集. 于是运用上面的分析就有此结论. □

称动力系统 (X,T) 为**完全混沌**, 如果 X 不为独点集且对任意的 $x \neq y \in X$, (x,y) 为 Li-Yorke 对.

推论 10.2.9 设 (X,T) 为传递的非极小系统. 那么存在 (X,T) 的因子系统为 Li-Yorke 混沌的. 进而, 如果 (X,T) 为几乎等度连续的非极小系统, 则存在 (X,T) 的完全混沌的因子系统.

证明 因 T 不为极小系统, 存在 $x \in X$, 使得 $A = \omega(x,T)$ 为无处稠密的不变闭集. 收缩 A 为一点, 我们便得到了 (X,T) 的一个传递因子系统, 该系统不为周期轨且包含了一个不动点. 由定理 10.2.7 知, 该因子系统存在 Mycielski 混乱集.

如果 T 为几乎等度连续的非极小系统, 则 X 的极小点集的闭包为 X 的真子集 (习题). 我们将 X 的极小集的闭包收缩为一点, 就得到了 X 的一个几乎等度连续的传递系统, 该系统为一致刚性且只有一个不动点为其唯一的极小点, 即一致刚性的 proximal 系统. 于是该因子系统为完全混沌的 (习题). □

习 题 10.2

1. 给出定理 10.2.8 的详细证明.

2. 设 (X,T) 为几乎等度连续的非极小系统, 证明: X 的极小点集的闭包为 X 的真子集.

3. 证明: 2 刚性的 proximal 系统为完全混沌系统.

4. 设 (X,T) 为动力系统, $D(X,T) = X^2 \setminus P(X,T)$ 以及 $\mathrm{Rec}(X)$ 为回复点集, 证明:

(1) 如果 $(x,y) \in D(X,T)$, 则 $\omega((x,y), T\times T) \subset D(X,T)$. 如果 T 还为同胚且 $(x,y) \in \mathrm{Rec}(T\times T)$, 那么 $(x,y) \in D(X,T^{-1})$;

(2) 如果 (X,T) 为传递的, 则 $\mathrm{Rec}(T\times T)$ 为 $X\times X$ 的一个稠密的 G_δ 集. 进而, 如果 T 为传递的且没有周期点, 则 $D(X,T)$ 在 $X\times X$ 中稠密.

5. 设 (X,T) 为动力系统, 证明:

(1) 如果 $Q(X,T) = X\times X$, 则 $P(X,T)$ 为 $X\times X$ 的稠密 G_δ 集;

(2) 假设 (X,T) 为可逆的传递系统. 如果存在 X 的非空开集 Y_1 和 Y_2 满足 $Q(X,T) \supset Y_1\times Y_2$, 则 $Q(X,T^{-1}) \supset Y_1\times Y_2$. 因此, 如果 $Q_{\mathbb{Z}}(X,T) = X\times X$, 则

$$Q(X,T) = Q(X,T^{-1}) = X\times X.$$

6. 设 (X,T) 为动力系统, 证明以下性质彼此等价:

(1) $Q(X,T) = X\times X$;

(2) $P(X,T)$ 是 $X\times X$ 中的稠密 G_δ 集;

(3) $P(X,T)$ 在 $X\times X$ 中稠密;

如果 T 为非周期的传递映射或 T 为初值敏感的, 则 (1)~(7) 彼此等价;

(4) $LY(X,T)$ 包含了 $X\times X$ 中一个稠密 G_δ 集;

(5) 对 T 存在一个稠密的混乱集;

(6) 对 T 存在稠密 Mycielski 混乱集;

(7) T 是稠密的 Li-Yorke 混沌的, 即对 T 存在一个稠密的不可数的混乱集; 如果 T 为非周期可逆的传递映射, 则 (1)~(8) 彼此等价;

(8) 对 T 和 T^{-1} 存在一个共同的稠密的不可数的混乱集且该混乱集包含在 $\text{Trans}_T \cap \text{Trans}_{T^{-1}}$.

7. 设 (X,T) 为非周期的传递系统. 如果 X 的非空开集 Y 满足 $\overline{P(X,T)} \supset Y \times Y$, 证明: 在 Y 中存在一个不可数的混乱集.

8. 设 (X,T) 为非周期的传递系统. 如果 (X,T) 不为 Li-Yorke 混沌的, 证明: 对 T 而言每个混乱集是无处稠密的.

9. 设 (X,T) 为动力系统且 X 为无限集. 如果 (X,T) 为弱混合, 证明: T 存在稠密的 Mycielski 混乱集. 进一步地, 如果假设 (X,T) 为极小系统, 证明: (X,T) 为弱混合当且仅当对 T 存在稠密的 Mycielski 混乱集.

§10.3　正熵系统与混沌

运用上一节发展的思想我们可以证明正熵系统也是 Li-Yorke 混沌的.

定理 10.3.1　*任何正熵系统是 Li-Yorke 混沌的.*

证明　设 (X,T) 为动力系统, 且 $h(T)>0$. 根据变分原理, 存在一个遍历测度 $\mu \in M^e(X,T)$, 使得 $h_\mu(T)>0$. 设 $\pi:(X,\mathcal{B},\mu,T)\to(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ 为到 Pinsker 因子的扩充. 令 $\mu=\int_Y \mu_y \mathrm{d}\nu(y)$ 为 μ 相对于 ν 的积分分解. 设

$$\lambda=\mu\times_Y\mu=\int_Y \mu_y\times\mu_y \mathrm{d}\nu(y).$$

由于 π 为测度弱混合扩充, 所以 λ 为遍历的. 令 $W=\text{supp}(\lambda)\supseteq\{(x,x):x\in \text{supp}(\mu)\}$. 则

$$W=\text{supp}(\lambda)\subseteq \text{supp}(\mu)\times\text{supp}(\mu)\subseteq X\times X.$$

设 W_λ 为 λ 的 generic 点全体, 则 $\lambda(W_\lambda)=1$. 因为 $W=\text{supp}(\lambda)$,$(W,T\times T)$ 为传递的且 W_λ 在 W_{Trans} (系统 $(W,T\times T)$ 的传递点全体) 中稠密. 因为

$$1=\lambda(W_\lambda)=\int_Y \mu_y\times\mu_y(W_\lambda)\mathrm{d}\nu(y),$$

从而存在 $Y_\lambda\subseteq Y$, $\nu(Y_\lambda)=1$, 使得 $\mu_y\times\mu_y(W_\lambda)=1, \forall y\in Y_\lambda$. 对任意 $y\in Y_\lambda$, 令 $S_y=\text{supp}(\mu_y)$, 则

$$W_\lambda\cap(S_y\times S_y)\subseteq W_{\text{Trans}}\cap(S_y\times S_y)=L.$$

又因为 $\mu_y\times\mu_y(W_\lambda\cap(S_y\times S_y))=1$, 有 $W_\lambda\cap(S_y\times S_y)$, 进而 $W_{\text{Trans}}\cap S_y\times S_y$ 为 $S_y\times S_y$ 的稠密子集.

因为 W_{Trans} 为 W 的稠密 G_δ 子集, 从而 L 为 $S_y \times S_y$ 的稠密 G_δ 子集. 根据 Rohlin 定理, 对几乎处处的 $y \in Y$,μ_y 都没有原子. 设 $Y_0 \subseteq Y_\lambda$ 为所有使得 μ_y 非原子的点 $y \in Y_\lambda$ 全体. 对任意 $y \in Y_0$, 运用 Mycielski 定理于 S_y, 存在在 S_y 中稠密的 Mycielski 子集 $K \subseteq S_y$, 使得

$$K \times K \setminus \Delta \subseteq W_{\text{Trans}}.$$

易见任意 $(x, y) \in K \times K \setminus \Delta$ 为强混合对, 于是 $K \subseteq X$ 为混乱集. 尤其 (X, T) 为 Li-Yorke 混沌的. □

注记 10.3.2 回顾整个证明, 我们运用了许多遍历论中的深刻结论. 最近, Kerr 和 Li(2007) 给出了一个不依赖于遍历理论的证明.

习 题 10.3

设 (X, T) 为拓扑动力系统, 且设存在某不变测度 μ, 使得对应的保测系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 不是测度 distal 的. 记 $Z = \text{supp}(\mu)$, 证明: 存在一个闭不变子集 $W \subseteq Z \times Z$, 使得 $(W, T \times T)$ 为拓扑传递的且对任意满足 $U \cap Z \neq \varnothing$ 的开集 $U \subseteq X$, 存在 Mycielski 子集 $K \subseteq U$ 满足 $(K \times K) \setminus \Delta_Z \subseteq W_{\text{Trans}}$.

§10.4 一个 Li-Yorke 混沌的判别定理

根据 Mycielski 定理, 如果 R 为 $X \times X$ 中的稠密 G_δ 集, 那么一定存在 Mycielski 集合 K, 使得 $K \times K \setminus \Delta_X \subseteq R$. 尤其, 如果 $R = P(X, T) \cap \text{Rec}(X \times X, T \times T)$ 在 $X \times X$ 中稠密, 那么 (X, T) 必为强 Li-Yorke 混沌的, 自然也是 Li-Yorke 混沌的. 于是要判断一个系统是否为 Li-Yorke 混沌的, 一个重要的途径就是看 $R = P(X, T) \cap \text{Rec}(X \times X, T \times T)$ 是否足够大. 下面我们避开 Mycielski 定理直接用构造性的方法来实现这个想法.

引理 10.4.1 设 (X, T) 为传递的动力系统. 则 $[\{N(U, U) : U \text{ 为 } X \text{ 的开集}\}]$ 为滤子.

证明 设 U_1, U_2 为 X 的非空开集. 因为 (X, T) 为传递的, 所以存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $U_3 = U_1 \cap T^{-n} U_2 \neq \varnothing$. 因此

$$\begin{aligned} N(U_3, U_3) &\subseteq N(U_1, U_1) \cap N(T^{-n} U_2, T^{-n} U_2) \\ &= N(U_1, U_1) \cap N(T^n T^{-n} U_2, U_2) \\ &\subseteq N(U_1, U_1) \cap N(U_2, U_2). \end{aligned}$$

由此易得结论. □

命题 10.4.2 设 (X,T) 为没有孤立点的传递系统. 那么存在 Cantor 集列 $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$, 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ 为 X 稠密的刚性子集, 并且对任意 $N \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{N} C_n$ 为一致刚性的.

证明 设 $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$ 为 X 的可数稠密子集, 且设 $Y_n = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$. 令 $\mathcal{F}$ 为包含 $\{N(U,U) : U$ 为 X 的非空开集 $\}$ 的最小族. 由于 (X,T) 为传递的, 由上引理 $\mathcal{F}$ 为滤子.

设 $a_0 = 0$ 及 $V_{0,1} = X$, 我们有如下断言:

断言 对任意 $S \in k\mathcal{F}$, 存在 $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{N}$, $\{k_n\} \subseteq S$, X 的非空开集列 $\{V_{n,1}, V_{n,2}, \cdots, V_{n,a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

(1) $2a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1} + n$;

(2) $\mathrm{diam} V_{n,i} < \dfrac{1}{n}$, $i = 1, 2, \cdots, a_n$;

(3) 闭包 $\{\overline{V_{n,i}}\}_{i=1}^{a_n}$ 为互不相交的;

(4) $\overline{V_{n,2i-1}} \cup \overline{V_{n,2i}} \subset V_{n-1,i}$, $i = 1, 2, \cdots, a_{n-1}$;

(5) $Y_n \subset B\Big(\bigcup_{i=1}^{a_n} V_{n,i}, \dfrac{1}{n}\Big)$, 其中 $B(A,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}$;

(6) $T^{k_n}(V_{n,2i-1} \cup V_{n,2i}) \subseteq V_{n-1,i}$, $i = 1, 2, \cdots, a_n$.

断言的证明 当 $j = 1$ 时, 易定义 $a_1 = 1$ 以及相应的 k_1 和 $V_{1,1}$. 假设对 $1 \leqslant j \leqslant n-1$, 我们已经定义好 $\{a_j\}_{j=1}^{n-1}$, $\{k_j\}_{j=1}^{n-1}$ 以及 $\{V_{j,1}, V_{j,2}, \cdots, V_{j,a_j}\}_{j=1}^{n-1}$ 满足 (1)$\sim$(6).

取 $2a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1} + n$ 以及 X 的开集 $V_{n,1}^{(0)}, V_{n,2}^{(0)}, \cdots, V_{n,a_n}^{(0)}$, 使得

(a) $\mathrm{diam} V_{n,i}^{(0)} < \dfrac{1}{2n}$, $i = 1, 2, \cdots, a_n$;

(b) 闭包 $\{\overline{V_{n,i}^{(0)}}\}_{i=1}^{a_n}$ 为互不相交的;

(c) $\overline{V_{n,2i-1}^{(0)}} \cup \overline{V_{n,2i}^{(0)}} \subset V_{n-1,i}^{(0)}$, $i = 1, 2, \cdots, a_{n-1}$;

(d) $Y_n \subset B\Big(\bigcup_{i=1}^{a_n} V_{n,i}^{(0)}, \dfrac{1}{2n}\Big)$.

由于对每 $1 \leqslant i \leqslant a_n$ 有 $N(V_{n,i}^{(0)}, V_{n,i}^{(0)}) \in \mathcal{F}$, 于是 $\bigcap_{i=1}^{a_n} N(V_{n,i}^{(0)}, V_{n,i}^{(0)}) \in \mathcal{F}$. 取 $k_n \in S \cap \bigcap_{i=1}^{a_n} N(V_{n,i}^{(0)}, V_{n,i}^{(0)})$. 于是存在非空开集 $V_{n,i}^{(1)} \subseteq V_{n,i}^{(0)}$, $1 \leqslant i \leqslant a_n$, 使得

(e) $T^{k_n}(V_{n,2i-1}^{(1)} \cup V_{n,2i}^{(1)}) \subseteq V_{n-1,i}$, $i = 1, 2, \cdots, a_{n-1}$.

令 $V_{n,i} = V_{n,i}^{(1)}$, $1 \leqslant i \leqslant a_n$, 则对 n, 条件 (1) $\sim$ (6) 得到满足. 由归纳我们得到断言. 断言证毕.

令 $C_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{j-n} a_n} \overline{V_{j,i}}$. 则 $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$. 由 (1) $\sim$ (4), C_n 为 Cantor 集. 由 (2),(4) 和 (5), $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ 在 X 中稠密. 对每个 $N \in \mathbb{N}$, 由 (6), $\bigcup_{i=1}^{N} C_n$ 为相对于 S 一致刚性的. □

注记 10.4.3 我们可以在断言证明中加上如下条件 (7):

(7) $Y_n \subseteq B\Big(\mathrm{orb}(x,T), \dfrac{1}{n}\Big)$, $\forall x \in \bigcup_{i=1}^{a_n} \overline{V_{n,i}}$.

这样可以在上定理中要求 $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_n$ 由传递点组成.

设 (X,T) 为动力系统. 子集 $A \subseteq X$ 称为**一致 proximal 的**, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得对任意 $x, y \in A$, 均有 $d(T^n(x), T^n y) < \varepsilon$ 成立. 对 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned} UP_n(X,T) = \{&(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \text{对任意}\varepsilon > 0, \\ &\text{存在}N, \text{使得 } \mathrm{diam}\{T^N x_1, T^N x_2, \cdots, T^N x_n\} < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

如果在命题 10.4.2 中添加条件: 对任意 $n \geqslant 2$, $UP_n(X,T)$ 都在 X^n 中稠密, 则我们可以在证明断言中要求

(8) *存在* $t_n \in \mathbb{N}$, *使得*

$$\mathrm{diam}\left\{T^{t_n} \bigcup_{i=1}^{a_n} \overline{V_{n,i}}\right\} < \frac{1}{n}.$$

从而在结论中要求: 对任意 $N \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{N} C_i$ 为一致 proximal 的. 即得到如下结论:

引理 10.4.4 *设 (X,T) 为没有孤立点的传递系统. 如果对任意 $n \geqslant 2$, $UP_n(X,T)$ 都在 X^n 中稠密, 那么存在 Cantor 集 $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$, 使得*

(1) $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ *为 X 稠密刚性子集;*

(2) *对每个 $N \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{N} C_n$ 为一致刚性的;*

(3) *对每个 $N \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{N} C_n$ 为一致 proximal 的.*

这条引理启发我们如下定义混乱集:

定义 10.4.5 *设 (X,T) 为动力系统. 子集 $K \subseteq X$ 称为 (X,T) 的***一致混乱集** *是指存在 Cantor 集列 $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$, 使得对任意 $N \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{N} C_n$ 为一致刚性的, 并且也为一致 proximal 的.*

易见, 此时 $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ 为刚性子集, 并且为强混乱集. 下面我们给出一个条件来判别一致混乱集的存在性.

定理 10.4.6 (*混沌判别准则*) *设 (X,T) 为没有孤立点的传递系统. 如果存在 (X,T) 的子系统 (Y,T), 使得 $(X \times Y, T \times T)$ 为传递的, 那么它就有一个稠密的 Mycielski 一致混乱集.*

证明 由引理 10.4.4, 我们仅需证明对任意 $n \in \mathbb{N}$, $UP_n(X,T)$ 在 X^n 中稠密即可. 取定 $n \in \mathbb{N}$, 对 $\varepsilon > 0$, 令

$$P_n(\varepsilon) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \exists m \in \mathbb{N}, \text{使得}\mathrm{diam}(\{T^m x_1, \cdots, T^m x_n\}) < \varepsilon\}.$$

则 $UP_n(X,T) = \bigcap_m^{\infty} P_n\left(\frac{1}{m}\right)$. 下面我们证明对任意 $\varepsilon > 0$, $P_n(\varepsilon)$ 为 X^n 的稠密子集, 继而就有 $UP_n(X,T)$ 为 X^n 的稠密 G_δ 子集.

取定 $\varepsilon > 0$. 设 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 为 X 的非空开集,W 为 Y 的非空开集且 $\mathrm{diam}(W) < \varepsilon$. 因为 $(X \times Y, T \times T)$ 传递, $N(U_1, U_2) \cap N(W \cap Y, W \cap Y) \neq \varnothing$. 取 $m_2 \in N(U_1, U_2) \cap N(W \cap Y, W \cap Y)$. 则

$$U_1 \cap T^{-m_2}U_2 \neq \varnothing \text{ 并且} W \cap T^{-m_2}W \cap Y \neq \varnothing.$$

归纳地, 取 $m_1, m_2, \cdots, m_n$, 使得

$$U_1 \cap \bigcap_{i=2}^{n} T^{-m_i}U_i \neq \varnothing \text{且} W \cap \bigcap_{i=2}^{n} T^{-m_i}W \cap Y \neq \varnothing.$$

因为 (X,T) 传递, 所以存在传递点 $x \in U_1 \cap \bigcap_{i=2}^{n} T^{-m_i}U_i$. 令 $y \in W \cap \bigcap_{i=2}^{n} T^{-m_i}W$. 由于 x 传递, 所以存在序列 l_k, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} T^{l_k}x = y$. 于是对每个 $2 \leqslant i \leqslant n$, $\lim\limits_{k\to\infty} T^{l_k}(T^{m_i}x) = T^{m_i}y$. 因为 $\{y, T^{m_2}y, \cdots, T^{m_3}y\} \subset W$ 以及 $\mathrm{diam}(W) < \varepsilon$, 所以对充分大的 l_k, 有

$$\mathrm{diam}(\{T^{l_k}x, T^{l_k}(T^{m_2}x), \cdots, T^{l_k}(T^{m_n}x)\}) < \varepsilon.$$

即 $(x, T^{m_2}x, \cdots, T^{m_n}x) \in P_n(\varepsilon)$. 注意到 $(x, T^{m_2}x, \cdots, T^{m_n}x) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$. 于是

$$P_n(\varepsilon) \cap U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \neq \varnothing.$$

由于 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 任意, 所以 $P_n(\varepsilon)$ 在 X^n 中稠密. □

根据这个判别准则, 我们就得到如下这些重要的 Li-Yorke 混沌系统:

推论 10.4.7 设 (X,T) 为没有孤立点的动力系统. 如果 (X,T) 满足以下任何一个条件, 那么它就有一个稠密的 Mycielski 混乱集:

(1) (X,T) 为有周期点的传递系统;

(2) (X,T) 为扩散的;

(3) (X,T) 为有等度连续极小子集的弱扩散系统;

(4) (X,T) 为弱混合的.

习　题　10.4

1. 如果 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 传递的, $\mathcal{F}$ 为满的族, 则对任意 $S \in k\mathcal{F}$, 存在 Cantor 集 $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$, 使得 $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_n$ 稠密, $\forall N \in \mathbb{N}$, 且 $\bigcup_{i=1}^{N} C_n$ 相对于 S 一致刚性.

2. 设 (X,T) 为动力系统, 点 $x \in X$ 称为 regular 是指对 x 任意邻域 U, 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $N(x,U) \supseteq k\mathbb{Z}_+$. 证明: 具有 regular 点的完全传递系统有稠密的一致混乱集. 提示: 证明极小系统具有 regular 点当且仅当它为加法机器的几乎一对一扩充 (Huang-Ye, 2005).

§10.5　混合系统的混沌性状

定义 10.5.1 设 (X,T) 为动力系统. X 的一个子集 C 称为**相对于序列** $S \subset \mathbb{Z}_+$ **的熊混沌集**, 是指对 C 的任一子集 A 及任意连续函数 $F: A \to X$, 均存在子序列 $\{q_i\} \subset S$, 使得对任意 $x \in A$ 成立 $\lim\limits_{i\to\infty} T^{q_i}(x) = F(x)$.

易见, 熊混沌集一定是强混乱集. 这个定义看起来似乎很强, 但是我们会发现其实很多系统都有熊混沌集.

定理 10.5.2 (熊金城 – 杨忠国) 设 (X,T) 为动力系统, 其中 X 为至少有两个点的局部紧可分度量空间, 则

(1) (X,T) 为弱混合的当且仅当存在无限子集 $S \subseteq \mathbb{Z}_+$ 以及相对于 S 的稠密的 Mycielski 熊混沌子集 K;

(2) (X,T) 为强混合的当且仅当对任意无限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}_+$, 存在子集 $S \subseteq F$ 以及相对于 S 的稠密的 Mycielski 熊混沌子集 K.

定理 10.5.2 的原始证明比较难读, 我们在更为一般的情形下证明这个结论. 证明的方法与命题 10.4.2 的证明十分相似.

定理 10.5.3 设 (X,T) 为动力系统, 其中 X 为至少有两个点的局部紧可分度量空间, $\mathcal{F}$ 为满的族. 则 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 混合的当且仅当对任意 $S \in k\mathcal{F}$, 存在相对于 S 的稠密的 Mycielski 熊混沌子集 K.

证明 首先证明充分性. 设对任意 $S \in k\mathcal{F}$, 存在 K 满足定理中的条件. 对 $X \times X$ 的任意非空开集 U, V, 取 $(x_1, x_2) \in U \cap (K \times K)$ 及 $(y_1, y_2) \in V$. 由 K 的定义, 存在序列 $\{q_i\} \subset S$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} T^{q_i}(x_1) = y_1$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty} T^{q_i}(x_2) = y_2$. 于是 $N(U,V) \cap S \neq \varnothing$. 所以 $N(U,V) \in kk\mathcal{F} = \mathcal{F}$, 即 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 混合的.

下证必要性. 由于 X 为 $\mathcal{F}$ 混合的且至少有两个点, 则 X 没有孤立点. 设 $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X 的可数基. 不妨假设 $\{\mathrm{diam} O_i\}$ 为递减的且趋于零. 这个假设是自然的, 首先, 我们可以先取任一组基 $\{O_i'\}_{i=1}^{\infty}$, 使得对每个 $i \in \mathbb{N}$, $\overline{O_i'}$ 为紧的. 这样对每个 $i \in \mathbb{N}$, 紧子集 $A_i = O_1' \cup \cdots \cup O_i'$ 有有限开覆盖 $\mathcal{A}_i$, 且其中元素的直径小于 $\frac{1}{i}$. 将 $\mathcal{A}_i$ 中元素按直径大小排列得到 $\{O_i\}$, 则 $\{O_i\}$ 即为所求.

设 $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$ 为 X 的可数稠密子集且 $Y_n = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$. 我们有如下断言 $(a_0 = 0, V_0 = X)$.

断言 存在 $\{a_n\} \subseteq \mathbb{N}$, $\{k_n\} \subseteq S$ 及 X 的开集 $\{V_{n,1}, V_{n,2}, \cdots, V_{n,a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足:

(1) $2a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1} + n$;

(2) $\mathrm{diam} V_{n,i} < \dfrac{1}{n}$, $i = 1, 2, \cdots, a_n$;

(3) $\{\overline{V_{n,i}}\}_{i=1}^{a_n}$ 为 X 互不相交的紧子集;

(4) $\overline{V_{n,2i-1}} \cup \overline{V_{n,2i}} \subset V_{n-1,i}$, $i = 1, 2, \cdots, a_{n-1}$;

(5) $Y_n \subset B\Big(\bigcup_{i=1}^{a_n} V_{n,i}, \dfrac{1}{n}\Big)$, 其中 $B(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$;

(6) 对任意 $\alpha \in \{1, 2, \cdots, a_n\}^{a_n}$, 存在 $m(\alpha) \in S$, 使得

$$T^{m(\alpha)} V_{n,i} \subseteq O_{\alpha(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, a_n.$$

断言的证明　设 $a_1=1, V_{1,1}^{(0)}$ 为 y_1 的邻域且 $\mathrm{diam}V_{1,1}^{(0)}<1$. 由于 $N(V_{1,1}^{(0)},O_1)\cap S\neq\varnothing$, 我们可取 $m(1)\in N(V_{1,1}^{(0)},O_1)\cap S$. 于是, 存在开子集 $V_{1,1}\subseteq V_{1,1}^{(0)}$, 使得 $T^{m(1)}V_{1,1}\subseteq O_1$.

假设对 $1\leqslant j\leqslant n-1$, 已有 $\{a_j\}_{j=1}^{n-1}$, $\{k_j\}_{j=1}^{n-1}$ 及 $\{V_{j,1},V_{j,2},\cdots,V_{j,a_j}\}_{j=1}^{n-1}$ 满足 (1)~(6). 取 $2a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 2a_{n-1}+n$ 及 X 的开集 $V_{n,1}^{(0)},V_{n,2}^{(0)},\cdots,V_{n,a_n}^{(0)}$ 满足:

(7) $\mathrm{diam}V_{n,i}^{(0)}<\dfrac{1}{2n}$, $i=1,2,\cdots,a_n$;

(8) 闭包 $\{\overline{V_{n,i}^{(0)}}\}_{i=1}^{a_n}$ 互不相交;

(9) $\overline{V_{n,2i-1}^{(0)}}\cup\overline{V_{n,2i}^{(0)}}\subset V_{n-1,i}$, $i=1,2,\cdots,a_{n-1}$;

(10) $Y_n\subset B\Big(\bigcup_{i=1}^{a_n}V_{n,i}^{(0)},\dfrac{1}{2n}\Big)$.

令 $\{1,2,\cdots,a_n\}^{a_n}=\{\alpha_i\}_{i=1}^{t_n}$, 其中 $t_n=a_n^{a_n}$.

因为 $N(\Pi_{i=1}^{a_n}V_{n,i}^{(0)},\Pi_{i=1}^{a_n}O_{\alpha_1(i)})=\bigcap_{i=1}^{a_n}N(V_{n,i}^{(0)},O_{\alpha_1(i)})\in\mathcal{F}$, 所以存在

$$m(\alpha_1)\in S\cap N(\Pi_{i=1}^{a_n}V_{n,i}^{(0)},\Pi_{i=1}^{a_n}O_{\alpha_1(i)}).$$

设 $V_{n,i}^{(1)}\subseteq V_{n,i}^{(0)}$ 满足

$$T^{m(\alpha_1)}V_{n,i}^{(1)}\subseteq O_{\alpha_1(i)},\quad i=1,2,\cdots,a_n.$$

取

$$m(\alpha_2)\in S\cap N(\Pi_{i=1}^{a_n}V_{n,i}^{(1)},\Pi_{i=1}^{a_n}O_{\alpha_2(i)}).$$

于是, 可取 $V_{n,i}^{(2)}\subseteq V_{n,i}^{(1)}$, 使得

$$T^{m(\alpha_2)}V_{n,i}^{(2)}\subseteq O_{\alpha_2(i)},\quad i=1,2,\cdots,a_n.$$

假设对 $1\leqslant j\leqslant t_n-1$, 已有 $m(\alpha_1),m(\alpha_2),\cdots,m(\alpha_j)\in S$ 及 $W'_{n,i}\supseteq V_{n,i}^{(1)}\supseteq V_{n,i}^{(2)}\supseteq\cdots\supseteq V_{n,i}^{(j)}$, 使得 $T^{m(\alpha_h)}V_{n,i}^{(h)}\subseteq O_{\alpha_h(i)}$, $i=1,2,\cdots,a_n$, $h=1,2,\cdots,j$.

取

$$m(\alpha_{j+1})\in S\cap N(\Pi_{i=1}^{a_n}V_{n,i}^{(j)},\Pi_{i=1}^{a_n}O_{\alpha_{j+1}(i)}).$$

于是, 可取 $V_{n,i}^{(j+1)}\subseteq V_{n,i}^{(j)}$, 使得

$$T^{m(\alpha_{j+1})}V_{n,i}^{(j+1)}\subseteq O_{\alpha_{j+1}(i)},\quad i=1,2,\cdots,a_n.$$

根据归纳法得到 $\{m(\alpha_j)\}_{j=1}^{t_n}$ 及 $\{V_{n,i}^{(j)}\}_{j=1}^{t_n}$. 令 $V_{n,i}=V_{n,i}^{(t_n)}, i=1,2,\cdots,a_n$. 则 (6) 成立. 断言证毕.

设 $C_n=\bigcap_{j=n}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2^{j-n}a_n}\overline{V_{j,i}}$. 则 $C_1\subseteq C_2\subseteq\cdots$. 由 (1)~(4) C_n 为 Cantor 集. 由 (2),(4) 及 (5), $K=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$ 在 X 中稠.

下面证明对 K 的任意子集 A 及任意连续映射 $F: A \to X$, 存在序列 $\{q_i\} \subset S$, 使得对任意 $x \in A$, $\lim_{i\to\infty} T^{q_i}(x) = F(x)$.

设 $A_n = \{x \in A: 存在 1 \leqslant i \leqslant n 及 1 \leqslant a_x \leqslant a_n, 使得 x \in V_{n,a_x} \cap A \subseteq F^{-1}(O_i)\}$ (注意 A_n 在 n 很小时可能为空集). 易见 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A$ 且 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$. 如果 A_n 不为空集, 则设

$$\begin{aligned}&\{V_{n,j}: \exists x \in A_n \text{ 及 } 1 \leqslant i \leqslant n, \text{使得} x \in V_{n,j} \cap A \subset F^{-1}(O_i)\}\\ =&\{V_{n,i_1^{(n)}}, V_{n,i_2^{(n)}}, \cdots, V_{n,i_{b_n}^{(n)}}\}, \text{其中} 1 \leqslant i_1^{(n)} < i_2^{(n)} < \cdots < i_{b_n}^{(n)} \leqslant a_n.\end{aligned}$$

取 $\alpha_n \in \{1,2,\cdots,a_n\}^{a_n}$ 满足 $\alpha_n(i_j^{(n)}) = \max\{1 \leqslant k \leqslant n : V_{n,i_j^{(n)}} \cap A \subseteq F^{-1}(O_k)\}$, $1 \leqslant j \leqslant b_n$. 并令 $q_n = m(\alpha_n)$.

下证对任意 $x \in A$, 有 $\lim_{i\to\infty} T^{q_i}(x) = F(x)$.

设 $\varepsilon > 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $\mathrm{diam} O_n < \varepsilon$. 取定 $x \in A$. 取 $t > N$, 使得 O_t 为 $F(x)$ 的邻域. 由于 F 连续, $F^{-1}(O_t)$ 为 x 在 A 中的开集. 于是存在某个 $n_t > t$ 及 $1 \leqslant a_x \leqslant a_{n_t}$, 使得 $x \in V_{n_t,a_x} \cap A \subseteq F^{-1}(O_t)$. 由 (4), 对任意 $j \in \mathbb{N}$, 存在某 $1 \leqslant a_x^j \leqslant a_{n_t+j}$, 使得

(11) $x \in V_{n_t+j,a_x^j} \cap A \subseteq V_{n_t,a_x} \cap A \subseteq F^{-1}(O_t)$.

于是对每个 $j \in \mathbb{N}$ 有 $\alpha_{n_t+j}(a_x^j) \geqslant t > N$. 进一步, 由 $\{q_n\}$ 的定义有对任意 $j \in \mathbb{N}$, 成立:

(12) $T^{q_{n_t+j}} V_{n_t+j,a_x^j} = T^{m(\alpha_{n_t+j})} V_{n_t+j,a_x^j} \subseteq O_{\alpha_{n_t+j}(a_x^j)}$;

(13) $x \in V_{n_t+j,a_x^j} \cap A \subseteq F^{-1}(O_{\alpha_{n_t+j}(a_x^j)})$.

由 (13) 有 $F(x) \in O_{\alpha_{n_t+j}(a_x^j)} \neq \varnothing$. 由 (12) 有 $T^{q_{n_t+j}} x \in O_{\alpha_{n_t+j}(a_x^j)}$. 于是对任意 $j \in \mathbb{N}$,

$$d(T^{q_{n_t+j}} x, F(x)) \leqslant \mathrm{diam}(O_{\alpha_{n_t+j}(a_x^j)}) < \varepsilon.$$

即 $\lim_{i\to\infty} T^{q_i}(x) = F(x)$. □

注记 10.5.4 我们的证明非常突出地体现了混合系统的滤子性, 比原先的证明更加简洁.

习 题 10.5

设 (X,T) 为动力系统且 $S \in \mathcal{F}_{\rm inf}$ 为无限子集. X 的子集 C 称为**相对于 S 的 Kronecker 集**是指 C 为 Cantor 集, 并且满足对任意 $g \in C(C,X)$ 及 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数 $n \in S$, 使得 $d(g(x), T^n(x)) < \varepsilon$ 对任意 $x \in C$ 成立, 即 $\{T^n|_C : n \in S\}$ 在 $C(C,X)$ 中一致稠密. X 子集 K 称为**相对于 S 的混沌集**是指对任意 $g \in C(K,X)$, 存在子序列 $\{q_i\} \subset S$, 使得对每个 $x \in K$, 都有 $\lim_{i\to\infty} T^{q_i}(x) = g(x)$ 成立, 即 $\{T^n|_K : n \in S\}$ 在 $C(K,X)$ 中依逐点收敛拓扑为稠密的.

设 (X,T) 非平凡的动力系统而 $\mathcal{F}$ 为满的族. 证明: 如果 (X,T) 为 $\mathcal{F}$ 混合的, 那么对任意 $x \in X$ 及任意 $S \in k\mathcal{F}$, 都存在 Cantor 集 $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$ 满足:

(i) $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ 在 X 稠密;

(ii) 存在 $\{k_n\} \subseteq S$ 使得 $\mathrm{diam} T^{k_n}(C_n \cup \{x\}) \to 0, n \to +\infty$;

(iii) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, C_n 为相对于 S 的 Kronecker 子集;

(iv) K 为相对于 S 的混沌集.

§10.6 其他混沌

这一节简要论述一些关于混沌的其他内容. 我们主要介绍一些概念和结论, 而不给出证明以及更为深入的讨论. 其具体的性质请参见相关文献.

在前面的几节中, 我们讨论的都是针对一般的紧致度量空间进行的. 那么一个自然的问题是: 对于一些特殊的空间, 各种混沌的概念是否有着更为紧密的联系? 最容易想到的特殊空间莫过于一维流形. 事实上, 李天岩和 Yorke 引入混沌概念的时候就是对区间直映射进行讨论的. 他们写道: “In this work, we analyze the case where the sequence $\{F^n(x)\}$ is not periodic and can be called ‘chaotic’...” . Li-Yorke(1975) 的主要结论是: 设 I 为区间, $f: I \to I$ 为具有 3 周期点的连续映射, 那么我们有如下断言:

(1) f 有任意周期的周期点;

(2) 存在一个不可数子集 $S \subseteq I$, 其中没有周期点且满足:

(i) 对于任何 $x \neq y \in S$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \inf |f^n(x) - f^n(y)| = 0 \quad 且 \quad \lim_{n\to\infty} \sup |f^n(x) - f^n(y)| > 0;$$

(ii) 对任意 $x \in S$ 和任意周期点 $p \in I$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f^n(x) - f^n(p)| > 0.$$

但是, 实际上这只是 Sharkovsky 1964 年工作的一个特殊情况. 在给出 Sharkovsky 定理前, 我们需要一些定义. 在集合 $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ 上定义序 (称为**Sharkovsky 序**):

$$\begin{aligned} &3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \cdots \succ 2^2\cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \\ &\succ 2^2 \cdot 7 \succ \cdots \succ 2^\infty \succ \cdots \succ 4 \succ 2 \succ 1. \end{aligned}$$

对 $t \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$, 令 $S(t) = \{k \in \mathbb{N} : t \succeq k\}$ ($S(2^\infty)$ 为集合 $\{1, 2, 2^2, \cdots, 2^k, \cdots\}$).

定理 10.6.1 (Sharkovsky 定理(Šarkovskiĭ, 1964)) *对任意连续映射 $f: I \to I$, 存在 $t \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$, 使得 $\mathrm{Per}(f) = S(t)$. 反之, 对任意 $t \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$, 存在连续映射 $f: I \to I$, 使得 $\mathrm{Per}(f) = S(t)$.*

对于区间自映射, 我们前面提到的各种混沌定义有着密切的联系.

定理 10.6.2 设 I 为区间, $f: I \to I$ 为连续映射. 则

(1) 如果 f 传递, 那么 f 要么为强混合的, 要么 I 可以分解为两个子区间 J 和 K, 使得 $f^2|_J$ 以及 $f^2|_K$ 均为强混合的;

(2) 强混合等价于完全传递, 尤其强混合等价于弱混合;

(3) 如果 f 为传递的, 那么它为初值敏感的; 反之, 如果 f 为初值敏感的, 那么存在子区间 J 以及 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $f^n|_J$ 为传递的;

(4) f 具有正熵当且仅当它具有非 2 的幂次的周期点;

(5) 如果 f 有一个 Li-Yorke 对, 那么必为 Li-Yorke 混沌的.

关于上述定理的证明以及区间自映射混沌性质更为详细的讨论可参见文献 (Ruette, 2002). 区间上的混沌性质是目前讨论较多而且研究较为清楚的一个主题. 另外还有一些重要的混沌性质, 如分布混沌和 ω 混沌等, 最先也是在研究区间自映射的时候提出的.

(X,T) 称为 ω **混沌的**(Li, 1993) 是指存在不可数集 S, 使得对任意不同点 $x, y \in S$ 满足:

$$\omega(x,T) \cap \omega(y,T) \neq \varnothing, \quad \omega(x,T) \setminus \omega(y,T) \text{为不可数的}, \quad \omega(x,T) \setminus \mathrm{Per}(T) \neq \varnothing.$$

对于区间映射, ω 混沌蕴含 Li-Yorke 混沌, 反之不然. 对于一般空间, 二者互不蕴含.

设 (X,T) 为动力系统. 对 $x, y \in X$, $n \in \mathbb{N}$ 及 $\varepsilon > 0$, 定义

$$F_{xy}^{(n)}(\varepsilon) = \frac{1}{n}|\{i : 0 \leqslant i < n, d(T^i x, T^i y) < \varepsilon\}|,$$

且设

$$F_{xy}(\varepsilon) = \liminf_{n\to\infty} F_{xy}^{(n)}(\varepsilon) \text{ 及 } F_{xy}^*(\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} F_{xy}^{(n)}(\varepsilon)$$

易见, 当 $\varepsilon > \mathrm{diam}(X)$ 时, $F_{xy}(\varepsilon) = F_{xy}^*(\varepsilon) = 1$. 为方便讨论, 下面我们总假设 $\varepsilon \in (0, \mathrm{diam}(X))$.

目前有三种定义**分布混沌的**(distributional chaos) 的方式, 我们将它们分别记为 DC1, DC2 和 DC3. (X,T) 称为 DC1 是指存在不可数集 S, 使得对任意 $x \neq y \in S$, 都成立 $F_{xy}^* \equiv 1$, 且存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $F_{xy}(\varepsilon) = 0$; 称为 DC2 是指存在不可数集 S, 使得对任意 $x \neq y \in S$, 都成立 $F_{xy}^* \equiv 1$, 且存在 $F_{xy}(\varepsilon) < F_{xy}^*(\varepsilon), \forall\varepsilon$; 称为 DC3 是指存在不可数集 S, 使得对任意 $x \neq y \in S$, 都成立 $F_{xy}(\varepsilon) < F_{xy}^*(\varepsilon), \forall\varepsilon$. 对于区间自映射, 三种分布混沌都是跟正熵是等价的. 对于一般的拓扑动力系统, DC1 $\Rightarrow$ DC2 $\Rightarrow$ DC3, DC2 蕴含 Li-Yorke 混沌. 但是正熵不能蕴含 DC1 和 DC2, 反之 DC1 不能蕴含正熵. 关于分布混沌的研究, 可参见文献 (Schweizer-Smital, 1994; Liao etc., 1998) 等.

最后介绍一个最近由 Akin 和 Kolyada 引入的一个混沌的概念结束本节. 这个概念的特点是综合表现了 Li-Yorke 混沌和初值敏感两个概念. 称传递系统 (X,T) 为**Li-Yorke 初值敏感的**(Akin-Kolyada, 2002) 是指存在 $\delta > 0$, 对任意 $x \in X$ 及其任一邻域 U, 在 U 中存在点 y, 使得 (x,y) 为 Li-Yorke 对且满足 $\limsup d(T^n x, T^n y) > \delta$. 可以证明, 弱混合系统为 Li-Yorke 初值敏感的, 但反之不然. 一个有趣的问题是: 是否每个极小的 Li-Yorke 初值敏感的系统必为 Li-Yorke 混沌的?

习 题 10.6

证明弱混合系统为 Li-Yorke 初值敏感的.

§10.7 注 记

本章讨论了几类重要的混沌定义以及它们的关系. 关于 Li-Yorke 混沌, 可以参见文献 (Akin, 2004; Blanchard etc., 2002; Huang-Ye, 2001b; 2002a; Li-Yorke, 1975; Kato, 1994; 1998; Mai, 1997; 2004) 等; 关于初值敏感可以参见文献 (Akin, 1997; Akin etc., 1996; 1998; Akin-Glasner, 2001; Auslander-Yorke, 1980; Glasner-Weiss, 1993; Glasner, 2003) 等; 关于正熵的混沌性质可以参见文献 (Blanchard etc., 2002), 相对化的情况见文献 (zhang, 2006) 等. 关于混合系统的刻画涉及的文献较多, 其中涉及混沌方面的内容可以参见文献 (Iwanik, 1989; Huang etc., 2004; Xiong-Yang, 1990) 等.

§10.2 的内容主要取材于文献 (Huang-Ye, 2002a), §10.3 的内容取自文献 (Blanchard etc., 2002). §10.4 关于混沌的判别准则的内容可以参见文献 (Glasner etc., 2005). §10.5 关于混合系统的混沌性状的内容引自文献 (Huang etc., 2004c) 的附录.

混沌的研究至今还吸引着众多数学家的关注, 有兴趣的读者可参考 Blanchard-Huang, Shao-Ye-Zhang, Ye-Zhang, Huang-Lu-Ye 等人关于部分混合 (partial mixing) 和敏感集 (sensitive set) 方面的工作. 另外, 在 Cadre 和 Jacob 以及 James, Koberda, Lindsey, Sliva 和 Speh 的文章中, 作者研究了测度空间上的混沌问题.

参考文献

[Adler etc.] Adler R L, Konheim A G and McAndrew M H. 1965. Topological entropy. Trans. Amer. Math. Soc., **114**: 309~319.

[Akin] Akin E. 1993. The general topology of dynamical systems. Graduate Studies in Mathematics 1. American Mathematical Society. Providence. RI.

[Akin] Akin E. 1997. Recurrence in topological dynamics. Furstenberg families and Ellis actions. The University Series in Mathematics. New York: Plenum Press.

[Akin] Akin E. 2004. Lectures on Cantor and Mycielski sets for dynamical systems. Chapel Hill Ergodic Theory Workshops, 21~79. Contemp. Math., **356**. Amer. Math. Soc.. Providence. RI.

[Akin etc.] Akin E, Auslander J and Berg K.1996. When is a Transitive Map Chaotic? Convergence in Ergodic Theory and Probability (Columbus, OH, 1993) de Gruytr. Berlin: Ohio University Math. Res. Inst. Pub., **5**: 25~40.

[Akin etc.] Akin E, Auslander J and Berg K. 1998. Almost equicontinuity and the enveloping semigroup. Topological dynamics and applications (Minneapolis, MN, 1995), 75~81. Contemp. Math., **215**. Amer. Math. Soc.. Providence. RI.

[Akin etc.] Akin E, Auslander J and Glasner E. The topological dynamics of Ellis actions. to appear in Memoirs Amer. Math. Soc.

[Akin-Glasner] Akin E and Glasner E. 2001. Residual properties and almost equicontinuity. J. d'Anal. Math., **84**: 243~286.

[Akin-Kolyada] Akin E and Kolyada S. 2002. Li-Yorke sensitivity. Nonlinearity, **16**(4): 1421~1433.

[Ambrose etc.] Ambrose W, Halmos P R and Kakutani S. 1942. The decomposition of measures II. Duke Math. J., **9**: 43~47.

[Auslander] Auslander J. 1960. On the proximal relation in topological dynamics. Proc. Amer. Math. Soc., **11**: 890~895.

[Auslander] Auslander J. 1988. Minimal flows and their extensions. North-Holland Mathematics Studies, **153**. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 122. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[Auslander-Guerin] Auslander J and Guerin M. 1997. Regional proximality and the prolongation. Forum Math., **9**(6): 761~774.

[Auslander etc.] Auslander J, McMahon D, Jaap van der Woude and Wu T. 1984. Weak disjointness and the equicontinuous structure relation. Ergodic Theory Dynam. Systems, **4**(3): 323~351.

[Auslander-Yorke] Auslander J and Yorke J. 1980. Interval maps, factors of maps and chaos. Tôhoku Math. J., **32**(2): 177~188.

[Banks] Banks J. 1997. Regular periodic decompositions for topologically transitive maps. Ergodic Theory Dynam. Systems, **17**(3): 505~529.

[Banks etc.] Banks J, Brooks J, Cairns G, Davis G and Stacey P. 1992. On Devaney's definition of chaos. Amer. Math. Monthly, **99**: 332~334.

[Bergelson] Bergelson V. 1996. Ergodic Ramsey theory—an update. Ergodic theory of Z^d actions (Warwick, 1993~1994), 1~61, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **228**. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[Bergelson-Leibman] Bergelson V and Leibman A. 1996. Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems. J. Amer. Math. Soc., **9**(3): 725~753.

[Bergelson-McCutcheon] Bergelson V and McCutcheon R. 2000. An ergodic IP polynomial Szemerédi theorem. Mem. Amer. Math. Soc., **146**: 695.

[Bergelson etc.] Bergelson V. Host B. 2005. B. Kra with an Appendix by I. Ruzsa, Multiple recurrence and nilsequence. Inv. Math., **160**: 261~303.

[Birkhoff] Birkhoff G. 1927. Dynamical systems, Colloquium publication IX. Ameican Mathematical Society. Providence: Rhode Island.

[Birkhoff] Birkhoff G. 1931. Proof of the ergodic theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **17**: 656~660.

[Blanchard] Blanchard F. 1992. Fully positive topological entropy and topological mixing. Contemporary Mathematics, **135**: 95~105.

[Blanchard] Blanchard F. 1993. A disjointness theorem involving topological entropy. Bull. Soc. Math. France, **121** (4): 465~478.

[Blanchard etc.] Blanchard F, Glanser E and Host B. 1997. A variation on the variational principle and applications to entropy pairs. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **17**(1): 29~43.

[Blanchard etc.] Blanchard F, Glasner E, Kolyada S and Maass A. 2002. On Li-Yorke pairs. J. Reine Angew. Math., **547**(3): 51~68.

[Blanchard etc.] Blanchard F, Host B, Maass A, Martinez S and Rudolph D. 1995. Entropy pairs for a measure. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **15**(4): 621~632.

[Blanchard etc.] Blanchard F, Host B and Maass A. 2000. Topological complexity. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **20**(3): 641~662.

[Blanchard etc.] Blanchard F, Host B and Ruette S. 2002. Asymptotic pairs in positive-entropy systems. Ergod. Th. Dynam. Sys., **22**(3): 671～686.

[Blanchard-Lacroix] Blanchard F and Lacroix Y. 1993. Zero-entropy factors of topological flows. Proc. Amer. Math. Soc., **119**(3): 85～992.

[Block-Coppe] Block L and Coppel W A. 1992. Dynamics in one dimension. Lecture Notes in Mathematics, **1513**. Berlin: Springer-Verlag.

[Blokh] Blokh A and Fieldsteel A. 2002. Sets that force recurrence. Proc. Amer. Math. Soc., **130**(12): 3571～3578.

[Bowen] Bowen R. 1971. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. Trans. Amer. Math. Soc., **153**: 401～414.

[Bourbaki] Bourbaki N. 1966. General Topology. Hermann, Paris.

[Boyle-Downarowicz] Boyle M and Downarowicz T. 2004. The entropy theory of symbolic extensions. Invent. Math., **156**(1):119～161.

[Bronstein] Bronstein I U. 1979. Extensions of minimal transformation groups. Martinus Nijhoff Publications. The Hague.

[Coven-Nitecki] Coven E M and Nitecki. 1981. Nonwandering sets of the powers of maps of the interval. Ergodic Theory Dynamical Systems, **1**(1): 9～31.

[Denker etc.] Denker M. Grillenberger C and Sigmund C. 1976. Ergodic Theory on Compact Spaces. Lecture Notes in Math, **527**. New York: Springer-Verlag.

[Devaney] Devaney R L. 1989. An introduction to chaotic dynamical systems. Second edition. Addison Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company. Advanced Book Program, Redwood City, CA.

[Dinaburg] Dinaburg E I. 1971. A connection between various entropy characterizations of dynamical systems.(Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **35**: 324～366.

[Dou etc.] Dou D, Ye Xiangdong and Zhang G H. 2006a. Entropy sequences and maximal entropy sets. Nonlinearity, **19**: 53～74.

[Dou etc.] Dou D, Huang W and Ye Xiangdong. 2006b. Null flows and null functions on R. Journal of Dynamics and Differential equations, **18**: 197～221.

[Downarowicz-Ye] Downarowicz T and Ye X. 2002. When every point is either transitive or periodic. Colloq. Math., **93**(1): 137～150.

[Ellis] Ellis R. 1953. Continuity and homeomorphism groups. Proc. Amer. Math. Soc., **4**: 969～973.

[Ellis] Ellis R. 1957. Locally compact transformation groups. Duke Math. J., **24**: 119～125.

[Ellis] Ellis R. 1958. Distal transformation groups. Pacific J. Math., **8**: 401～405.

[Ellis] Ellis R. 1960. A semigroup associated with a transformation group. Trans. Amer. Math. Soc., **94**: 272～281.

[Ellis] Ellis R. 1965. The construction of minimal discrete flows. Amer. J. Math., **87**: 564～574.

[Ellis] Ellis R. 1969. Lectures on topological dynamics. New York: W. A. Benjamin, Inc.

[Ellis] Ellis R. 1973. The Veech structure theorem. Trans. Amer. Math. Soc., **186**: 203～218.

[Ellis] Ellis R. 1978. The Furstenberg structure theorem. Pacific J. Math., **76**(2): 345～349.

[Ellis etc.] Ellis D, Ellis R and Nerurkar M. 2001. The topological dynamics of semigroup actions. Trans. Amer. Math. Soc., **353**(4): 1279～1320.

[Ellis etc.] Ellis R, Glasner S and Shapiro L P. 1975. Proximal-isometric flows. Advances in Math., **17**(3): 213～260.

[Ellis etc.] Ellis R, Glasner S and Shapiro L. 1976. Algebraic equivalents of flow disjointness. Illinois J. Math., **20**(2): 354～360.

[Ellis-Gottschalk] Ellis R and Gottschalk W.1960. Homomorphisms of transformation groups. Trans. Amer. Math. Soc., **94**: 258～271.

[Ellis-Keynes] Ellis R and Keynes H. 1971. A characterization of the equicontinuous structure relation. Trans. Amer. Math. Soc., **161**: 171～183.

[Friedman-Ornstein] Friedman N and Ornstein D. 1972. On mixing and partial mixing. Ill. J. Math., **16**: 61～68.

[Frantzikinakis etc.] Frantzikinakis N, Lesigne E and Wierdl M. 2006. Sets of k-recurrence but not $(k+1)$-recurrence. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **56**: 839～849.

[Furstenberg] Furstenberg H. 1961. Strict ergodicity and transformation of the torus. Amer. J. Math., **83**: 573～601.

[Furstenberg] Furstenberg H. 1963. The structure of distal flows. Amer. J. Math., **85**: 477～515.

[Furstenberg] Furstenberg H. 1967. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. Math. Systems Theory, **1**: 1～49.

[Furstenberg] Furstenberg H. 1977. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. J. Analyse Math., **31**: 204～256.

[Furstenberg] Furstenberg H. 1981. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory. M. B. Porter Lectures. Princeton, N.J: Princeton University Press.

[Furstenberg] Furstenberg H. 1981. Poincaré recurrence and number theory. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **5**(3): 211～234.

[Furstenberg] Furstenberg H. 1982. IP-systems in ergodic theory. Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982), 131~148. Contemp. Math., **26**. Amer. Math. Soc., Providence. RI, 1984

[Furstenberg-Katznelson] Furstenberg H and Katznelson Y. 1978. An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. J. Analyse Math., **34**: 275~291.

[Furstenberg-Katznelson] Furstenberg H and Katznelson Y. 1985. An ergodic Szemerédi theorem for IP-systems and combinatorial theory. J. Analyse Math., **45**: 117~168.

[Furstenberg-Katznelson] Furstenberg H and Katznelson Y. 1991. A density version of the Hales-Jewett theorem. J. Anal. Math., **57**: 64~119.

[Furstenberg etc.] Furstenberg H , Katznelson Y and Ornstein D. 1982. The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **7**(3): 527~552.

[Furstenberg-Weiss] Furstenberg H and Weiss B. 1978. The finite multipliers of infinite ergodic transformations. The structure of attractors in dynamical systems (Proc. Conf., North Dakota State Univ.. Fargo. N.D., 1977), 127~132. Lecture Notes in Math., 668, Berlin: Springer.

[Furstenberg-Weiss] Furstenberg H and Weiss B. 1979. Topological dynamics and combinatorial number theory. J. Analyse Math., **34**: 61~85.

[Glasner] Glasner S. 1976. Proximal flows. Lecture Notes in Mathematics, **517**. Berlin-New York: Springer-Verlag.

[Glasner] Glasner S. 1980. Divisible properties and the Stone-Čech compactification. Canad. J. Math., **32**(4): 993~1007.

[Glasner] Glasner E. 1997. A simple characterization of the set of μ-entropy pairs and applications. Israel J. Math., **102**: 13~27.

[Glasner] Glasner E. 1998. On minimal actions of Polish groups. 8th Prague Topological Symposium on General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra (1996). Topology Appl., **85** (1~3): 119~125.

[Glasner] Glasner E. 2000. Structure theory as a tool in topological dynamics. Descriptive set theory and dynamical systems (Marseille-Luminy, 1996), 173~209. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 277. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[Glasner] Glasner E. 2003. Ergodic theory via joinings. Mathematical Surveys and Monographs, 101. American Mathematical Society. Providence, RI.

[Glanser] Glasner E. 2004. Classifying dynamical systems by their recurrence properties. Topol. Methods Nonlinear Anal., **24**(1): 21~40.

[Glasner] Glasner E. 2006. On tame dynamical systems. Colloq. Math., **105**: 283~295.

[Glasner etc.] Glasner E, Host B and Rudolph D. 1992. Simple systems and their higher order self-joinings. Israel J. Math., **78**(1): 131~142.

[Glasner etc.] Glasner E, Huang W, Shao S and Ye X D. Sufficient conditions under which a transitive system is chaotic, preprint.

[Glasner-Maon] Glasner S and Maon D. 1989. Rigidity in topological dynamics. Ergodic Theory Dynam. Systems, **9**(2): 309~320.

[Glasner etc.] Glanser E, Megrelishvili M and Uspenskij V V. On metrizable enveloping semigroups. Israel J. of Math., to appear.

[Glasner-Rudolph] Glasner S and Rudolph D. 1984. Uncountably many topological models for ergodic transformations. Ergodic Theory Dynam. Systems, **4**(2): 233~236.

[Glasner etc.] Glasner E, Thouvenot J and Weiss B. 2000. Entropy theory without a past. Ergodic Theory Dynam. Systems, **20**(5): 1355~1370.

[Glasner-Weiss] Glasner S and Weiss B. 1983. Minimal transformations with no common factor need not be disjoint. Israel J. Math., **45**(1): 1~8.

[Glasner-Weiss] Glasner E and Weiss B. 1993. Sensitive dependence on initial conditions. Nonlinearity, **6**(6): 1067~1075.

[Glasner-Weiss] Glanser E and Weiss B. 1994. Strictly ergodic, uniform positive entropy models. Bull. de la Soc. Math. de France, **122**(3): 399~412.

[Glasner-Weiss] Glasner E and Weiss B. 1995a. Quasi-factors of zero-entropy systems. J. Amer. Math. Soc., **8**(3) 665~686.

[Glasner-Weiss] Glasner E and Weiss B. 1995b. Topological entropy of extensions, in Ergodic theory and its connections with harmonic Analysis. Cambridge University Press, 299~307.

[Glasner-Weiss] Glasner E and Weiss B. 1997. Kazhdan's property T and the geometry of the collection of invariant measures. Geom. Funct. Anal., **7**(5): 917~935.

[Glasner-Weiss] Glasner E and Weiss B. 2000. Locally equicontinuous dynamical systems, Dedicated to the memory of Anzelm Iwanik. Colloq. Math., **84/85**(2): 345~361.

[Glasner-Weiss] Glasner E and Weiss B. 2002. Minimal actions of the group $\mathbb{S}(\mathbb{Z})$ of permutations of the integers. Geom. Funct. Anal., **12**(5): 964~988.

[Glasner-Weiss] Glasner E and Weiss B. 2004. On the interplay between measurable and topological dynamics. to appear in: Handbook of dynamical systems, Vol.1.B. Editors: B. Hasselblatt and A. Katok.

[Goodman] Goodman T N T. 1971. Relating topological entropy with measure theoretic entropy. Bull. London. Math. Soc., **3**: 176~180.

[Goodman] Goodman T N T. 1974. Topological sequence entropy. Proc. London Math. Soc., **29** (3): 331~350.

[Goodwyn] Goodwyn L.W. 1969. Topological entropy bounds measure-theoretic entropy. Proc. Amer. Math. Soc., **23**: 679~688.

[Gottschalk] Gottschalk W. 1944. Orbit-closure decompositions and almost periodic properties. Bull. Amer. Math. Soc., **50**: 915~919.

[Gottschalk] Gottschalk W. 1963. Substitution minimal sets. Trans. Amer. Math. Soc., **109**: 467~491.

[Gottschalk-Hedlund] Gottschalk W and Hedlund G. 1955. Topological Dynamics. Amer. Math. Soc., Providence.

[Green-Tao] Green B and Tao T. 2006. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. to appear in Ann. Math.

[Halmos] Halmos P R. 1941. The decomposition of measures. Duke Math. J., **8**: 386~392.

[Halmos] Halmos P R. 1949. Measurable transformations. Bull. Amer. Math. Soc., **55**: 1015~1034.

[Halmos] Halmos P R. 1953. Lectures on Ergodic Theory. New York: Chelsea.

[Halmos-Neumann] Halmos P R and Von Neumann J. 1942. Operator methods in classical mechanics. II. Ann. Math., **43**: 332~350.

[He etc.] He L, Yan X and Wang L. 2004. Weak-mixing implies sensitive dependence. J. Math. Anal. Appl., **299** (1): 300~304.

[Hindman] Hindman N. 1972. The existence of certain ultra-filters on N and a conjecture of Graham and Rothschild. Proc. Amer. Math. Soc., **36**: 341~346.

[Hindman] Hindman N. 1974. Finite sums from sequences within cells of a partition of N. J. Combinatorial Theory Ser. A, **17**: 1~11.

[Hindman] Hindman N. 1979. Ultrafilters and combinatorial number theory. Number theory, Carbondale 1979 (Proc. Southern Illinois Conf., Southern Illinois Univ., Carbondale, Ill., 1979), 119~184. Lecture Notes in Math., **751**. Berlin: Springer.

[Hindman] Hindman N. 2001. Problems and new results on the algebra of $\beta\mathbb{N}$ and its application to Ramsey theory. Unsolved problems on mathematics for the 21st century, 295~305, IOS, Amsterdam.

[Hindman-Strauss] Hindman N and Strauss D. 1998. Algebra in the Stone-Čech compactification. Theory and applications. de Gruyter Expositions in Mathematics, **27**. Berlin: Walter de Gruyter and Co..

[Host] Host B. 1991. Mixing of all orders and pairwise independent joinings of systems with singular spectrum, Israel J. Math., **76**(3): 289~298.

[Host-Kra] Host B and Kra B. 2005. Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds. Ann. of Math., **161**(2), (1): 397~488.

[Huang] Huang W. 2006. Tame systems and scrambled pairs under an Abelian group action. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **26**: 1549~1567.

[Huang-Ye] Huang W and Ye X. 2001a. Non-wandering points of a tree map under iterations. Science in China (Series A), **44**(1): 31~39 (English version).

[Huang-Ye] Huang W and Ye X. 2001b. Homeomorphisms with the whole compacta being scrambled sets. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **21**(1): 77~91.

[Huang-Ye] Huang W and Ye X. 2002a. Devaney's chaos and 2-scattering imply Li-Yorke's chaos. Topology Appli., **117** (3): 259~272.

[Huang-Ye] Huang W and Ye X. 2002b. An explicit scattering, non-weakly mixing example and weak disjointness. Nonlinearity, **15**(3): 849~862.

[Huang-Ye] Huang W and Ye Xiangdong. 2004a. Minimal sets in almost equicontinuous systems. Proc. of the Steklov Inst. of Math., **244**: 280~287.

[Huang-Ye] Huang W and Ye X. 2004b. Topological complexity, return times and weak disjointness. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **24**(3): 825~846.

[Huang-Ye] Huang W and Ye X. 2005. Dynamical systems disjoint from all minimal systems. Trans. Amer. Math. Soc., **357**(2): 669~694.

[Huang-Ye] Huang W and Ye X. 2006. A local variational relation and applications. Israel Journal of Mathematics, **151**: 237~280.

[Huang-Ye] Huang W and Ye X. Generic eigenvalues, generic homomorphisms and weak disjointness. preprint.

[Huang-Ye] Huang W and Ye X. 2007. Combinatorial lemmas and applications. preprint.

[Huang etc.] Huang W, Li S, Shao S and Ye X. 2003. Null systems and sequence entropy pairs. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **23**: 1505~1523.

[Huang etc.] Huang W, Maass A and Ye X. 2004a. Sequence entropy pairs and complexity pairs for a measure. Annales de l'Institut Fourier, **54**(4): 1005~1028.

[Huang etc.] Huang W, Maass A, Romagnoli P and Ye X. 2004b. Entropy pairs and a local abramov formula for the mte of open covers. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **24**(4): 1127~1153.

[Huang etc.] Huang W. Kyewon P and Ye X. 2007b. Dynamical systems disjoint from all minimal systems with zero entropy. Bull. of France Math. Soc.. to appear.

[Huang etc.] Huang W, Shao S and Ye X. 2004c. Mixing and proximal cell along sequences. Nonlinearity, **17**(4): 1245~1260.

[Huang etc.] Huang W, Shao S and Ye X. 2005. Mixing via sequence entropy. Contemporary Mathematics, **358**: 101~122.

[Huang etc.] Huang W, Ye X and Zhang G. 2006. A local variational principle for conditional entropy. Erg. Th. and Dynam. Sys.. Ergod. Th.and Dynam. Sys., **26**(1): 219~245.

[Huang etc.] Huang W, Ye X and Zhang G. 2007a. Relative entropy tuples, relative u.p.e. and c.p.e. extensions. Israel Journal of Mathematics, **158**: 249~283.

[Hulse] Hulse P. 1982. Sequence entropy and subsequence generators. J. London Math. Soc., **26**: 441~450.

[Hulse] Hulse P. 1986. Sequence entropy relative to an invariant σ-algebra. J. Londan Math. Soc., (2), **33** (3): 441~450.

[Iwanik] Iwanik A. 1989. Indepedent sets of transitive points//Dynam. Sys. and Ergod. Th., Banach center Pub1., Vol.23, PWN, Warsaw, 277~282.

[Kalikow] Kalikow S. 1982. T, T^{-1} transformation is not loosely Bernoulli. Annals of Math., **115**(2): 393~409.

[Kalikow] Kalikow S. 1984. Two fold mixing implies threefold mixing for rank one transformations. Ergodic Theory Dynam. Systems, **4**(2): 237~259.

[Kato] Kato H. 1994. Chaotic continua of (continuum-wise) expansive homeomorphism and chaos in the sense of Li-Yorke. Fund. Math., **145**(3): 261~279.

[Kato] Kato H. 1998. On scrambled sets and a theorem of Kuratowski on independent sets. Proc. Amer. Math. Soc., **126**(7): 2151~2157.

[Kato-Park] Kato H and Park J. 1999. Expansive homeomorphisms of countable compacta. Topology Appl., **95**(3): 207~216.

[Katok] Katok A. 1980. Smooth non-Bernoulli K-automorphism. Invent. Math., **61**(3): 291~300.

[Katznelson] Katznelson Y. 2001. Chromatic numbers of Cayley graphs on $\mathbb{Z}$ and recurrence, Paul Erdős and his mathematics (Budapest, 1999). Combinatorica, **21**(2): 211~219.

[Kechris] Kechris A S. 1995. Classical descriptive set theory. Graduate Texts in Mathematics, **156**. New York: Springer-Verlag.

[Kelley] Kelley J. 1995. General Topology. Princeton: Van Nostrand.

[Kerr-Li] Kerr D and Li H. 2005. Dynamical entropy in Banach spaces. Invent. Math., **162**: 649~686.

[Kerr-Li] Kerr D and Li H. 2007. Independence in topological and C^*-dynamics. Math. Ann., **338**: 869~926.

[Keynes-Robertson] Keynes H B and Robertson J B. 1969. Eigenvalue theorems in topological transformation groups. Trans. Amer. Math. Soc., **139**: 359~369.

[Kolmogorov] Kolmogorov A N. 1958. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces. Dokl. Akad. Sci. SSSR., **119**: 861~864 (Russian).

[Kinoshita] Kinoshita S. 1958. On orbit of homeomorphisms. Colloq. Math., **6**: 49~53.

[Kolyada-Snoha] Kolyada S, Snoha L. 1997. Some aspects of topological transitivity—a survey. Iteration theory (ECIT 94) (Opava), 3~35, Grazer Math. Ber., **334**, Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz.

[Kolyada etc.] Kolyada S. Snoha L and Trofimchuk S. 2001. Noninvertible minimal maps. Fund. Math., **168**(2): 141~163.

[Koopman-Neumann] Koopman B O and Neumann J Von. 1932. Dynamical systems continuous spectra. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **18**: 255~263.

[Krieger] Krieger W. 1970. On entropy and generators of measure-preserving transformations. Trans. Amer. Math. Soc., **149**: 453~464.

[Kriz] Kriz I. 1987. Large independent sets in shift-invariant graphs. Solution of Bergelson's problem. Graphas and Combinatorics, **3**: 145~158.

[Kuratowski] Kuratowski K. 1974. Application of Baire-cateory method to the problem of independent sets. Fundamenta Mathematicae, **81**: 65~72.

[Kushnirenko] Kushnirenko A. G. 1967. On metric invariants of entropy type. Russion Math. Surveys, **22**: 53~61.

[Kuang-Ye] Kuang R and Ye X. 2005. The return times set and mixing for measure preserving transformations. preprint.

[Ledrappier] Ledrappier F. 1978. Un champ markovien peut être d'entropie nulle et mélangeant. C. R. Acad. Sci. Paris Sér., A-B **287**(7): 561~563.

[Lemanczyk] Lemanczyk M. 1985. The sequence entropy for Morse shift and some counterexamples. Studia Math., **82**: 221~241.

[Lemanczyk-Siemaszko] Lemanczyk M and Siemaszko A. 2001. A note on the existence of a largest topological factor with zero entropy. Proc. Amer. math. Soc., **129**: 475~482.

[Li] Li S. 1993. ω-chaos and topological entropy. Trans. Amer. Math. Soc., **339**(1): 243~249.

[Li-Yorke] Li T and Yorke J. 1975. Period 3 implies chaos. Amer. Math. Monthly, **82**: 985~992.

[Lindenstrauss] Lindenstrauss E. 1995. Lowering topological entropy. J. d'Analyse Math., **67**: 231~267.

[Liao etc.] Liao Gongfu and Fan Qinjie. 1998. Minimal subshifts which display Schweizer-Smital chaos and have zero topological entropy. Sci. China Ser., A **41**(1): 33~38.

[Mai] Mai J. 1997. Continuous maps with the whole space being a scrambled set. Chinese Sci. Bull., **42**(19): 1494~1497.

[Mai] Mai J. 2004. Devaney's Chaos implies existence of s-scrambled sets. Proc. Amer. math. Soc., **132**(9): 2761~2767.

[McCutcheon] McCutcheon R. 1999. Elemental methods in ergodic Ramsey theory, Lecture Notes in Mathematics, **1722**. Berlin: Springer-Verlag.

[McMahon] McMahon D C. 1976. Weak mixing and a note on a structure theorem for minimal transformation groups. Illinois J. Math., **20**(2): 186~197.

[McMahon] McMahon D C. 1978. Relativized weak disjointness and relatively invariant measures. Trans. Amer. Math. Soc., **236**: 225~237.

[Milnor] Milnor J. 1999. Dynamics in one complex variable. Introductory lectures. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.

[Misiurewicz] Misiurewicz M. 1976. A short proof of the variational principle for a $\mathbb{Z}_+^n$ action on a compact space. Int. Conf. Dyn. Systems in Math. Physics. Société Mathématique de France. Astérisque, **40**: 147~158.

[Misiurewicz] Misiurewicz M. 1985. Chaos almost everywhere. Lecture Notes in Mathematics, **1163**: 125~130. Springer.

[Mozes] Mozes S. 1992. Mixing of all orders of Lie groups actions. Invent. Math., **107**(2): 235~241.

[Mycielski] Mycielski J. 1964. Independent sets in topological algebras. Fund. Math., **55**: 139~147.

[Namakura] Namakura K. 1952. On bicompact semigroup. Math. J. Okayama University, **1**: 99~108.

[Newton] Newton D. 1970. On sequence entropy. I, II. Math. Systems Theory, **4**: 119~125; ibid. **4**, 126~128.

[Ornstein] Ornstein D. S. 1970. On the root problem in ergodic theory. Proc. sixth Berkeley symposium Math. Statist. Probab. Univ. of California Press, 347~356.

[Ornstein-Shields] Ornstein D S and Shields. 1973. An uncountable family of K-automorphisms, Advances in Math., **10**: 63~88.

[Park-Siemaszko] Park K K and Siemaszko A. 2001. Relative topological Pinsker factors and entropy pairs, Monatsh. Math., **134**(1):67~79.

[Parry] Parry W. 1981. Topics in Ergodic Theory. Cambridge Tracks in Mathematics. Cambridge-New York: Cambridge University Press.

[Peleg] Peleg R. 1972. Weak disjointness of transformation groups. Proc. Amer. Math. Soc., **33**: 165~170.

[Petersen] Petersen K. 1970. Disjointness and weak mixing of minimal sets. Proc. Amer. Math. Soc., **24**: 278~280.

[Petersen] Petersen K. 1983. Ergodic theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **2**.Cambridge: Cambridge University Press.

[Phelps] Phelps R. 1966. Lectures on Choquet's theorem. Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London: D. Van Nostrand Co., Inc..

[Poincaré] Poincaré H. 1899. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, **3**. Paris: Gauthier-Villars.

[Queffélec] Queffélec M. 1987. Substitution Dynamical systems–spectral analysis. Lecture Notes in Mathematics, **1294**. Berlin: Springer–Verlag.

[Rohlin] Rohlin V A. 1959. On the entropy of a metric automorphism. Dokl. Akad. Nauk. SSSR., **124**: 980~983(Russian).

[Rohlin] Rohlin V A. 1962. On the fundament ideas of measure theory. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 1, **10**: 1~54.

[Rohlin] Rohlin V. A. 1964. Exact endomorphisms of a Lebesgue space. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **39**: 1~36.

[Rohlin] Rohlin V. A. 1966. Selected topics in the metric theory of dynamical systems. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **49**: 171~240.

[Rohlin] Rohlin V A. 1967. Lectures on ergodic theory. Russian Math. Surverys, **22**: 1~52.

[Rohlin-Sinai] Rohlin V A and Sinai Ya G. 1967. Construction and properties of invariant measure. Usp. Mat. Nauk, **22**: 4~54(Russian).

[Romagnoli] Romagnoli P P. 2003. A local variational principle for the topological entropy. Ergodic Theory Dynam. Systems, **23**(5): 1601~1610.

[Rudolph] Rudolph D J. 1990. Fundamentals of measurable dynamics. Ergodic theory on Lebesgue spaces. Oxford Science Publications. The Clarendon Press. New York: Oxford University Press.

[Ruelle-Taken] Ruelle D and Taken F. 1971. On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys., **20**: 167∼192; **23**: 343∼344.

[Ruette] Ruette S. 2002. Chaos for continuous interval maps: a survey of relation between the various sorts of chaos. preprint.

[Ruppert] Ruppert W. 1984. Compact semitopological semigroup: an intrinsic theory. LNM, **1079**, Springer-Verlag, Berlin.

[Ryzhikov] Ryzhikov V. V. 1992. Mixing, rank and minimal self-joining of actions with invariant measure.(Russian. Russian summary) Mat. Sb., **183**(3): 133∼160; translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math., **75**(2): 405∼427.

[Saleski] Saleski A. 1977. Sequence entropy and mixing. J. of Math. Anal. and Appli., **60**: 58∼66.

[Šarkovskiĭ] Šarkovskiĭ O M. 1964. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. Ukrain. Mat. $\check{Z}$., **16**: 61∼71.

[Schweizer-Smital] Schweizer B and Smital J. 1994. Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval. Trans. Amer. Math. Soc., **344**: 737∼754.

[Shannon] Shannon C. 1948. A mathematical theory of communication. Bell System Tech. J., **27**: 379∼423, 623∼656.

[Shao] Shao S. 2006. Proximity and distality via Furstenberg families. Topology and its Applications, **153**: 2055∼2072.

[Shao-Ye] Shao S and Ye X. 2004. F-mixing and weak disjointness. Topology and its Applications, **135** (1∼3): 231∼247.

[Shapiro] Shapiro L. 1970. Proximality in minimal transformation groups. Proc. Amer. Math. Soc., **26**: 521∼524.

[Shelah] Shelah S. 1972. A combinatorial problem; Stability and order for models and theories in infinitary languages. Pacific J. Math., **41**: 247∼261.

[Sinai] Sinai Ya G. 1959. On the concept of entropy for dynamical systems. Dokl. Akad. Nauk. SSSR., **124**: 768∼771(Russian).

[Sinai] Sinai Ya G. 1963. On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics. Sov. Math. Dokl., **4**: 1818∼1822.

[Tao] Tao T. Norm convergence of multiple ergodic averages for commuting transformations. Submitted to Ergod. Th.and Dynam. Sys..

[Tao-Ziegler] Tao T and Ziegler T. The primes contain arbitrarily long polynomial progressions. to appear Acta Math..

[Veech] Veech W A. 1963. Almost automorphic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **49**: 462~464.

[Veech] Veech W A. 1965. Almost automorphic functions on groups. Amer. J. Math., **87**: 719~751.

[Veech] Veech W A. 1968. The equicontinuous structure relation for minimal Abelian transformation groups. Amer. J. Math., **90**: 723~732.

[Veech] Veech W A. 1970. Point-distal systems. Amer. J. Math., **92**: 205~242.

[Veech] Veech W A. 1977. Topological systems. Bull. Amer. Math. Soc., **83**: 775~830.

[Vries] Vries J de. 1993. Elements of Topological Dynamics. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

[Walters] Walters P. 1972. Some invariant σ-algebras for measure-preserving transformations. Trans. Amer. Math. Soc., **163**: 357~368.

[Walters] Walters P. 1982. An introduction to ergodic theory. Graduate Texts in Mathematics, **79**. New York-Berlin: Springer-Verlag.

[Weiss] Weiss B. 1971. Topological transitivity and ergodic measures. Math. Systems Theory, **5**: 71~75.

[Weiss] Weiss B. 1998. Multiple recurrence and doubly minimal systems. Contemporary Math., **215**: 189~196.

[Weiss] Weiss B. 2000a. A survey of generic dynamics. Descriptive set theory and dynamical systems (Marseille-Luminy, 1996), 273~291. London Math. Soc. Lecture Note Ser., **277**. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[Weiss] Weiss B. 2000b. Single Orbit Dynamics. AMS Regional Conference Series in Mathematics, **95**.

[Woude] Woude Jaap van der. 1982. Topological dynamics. Dissertation. Vrije Universiteit. Amsterdam. CWI Tract, **22**.

[Woude] Woude Jaap van der. 1985. Characterizations of (H)PI extensions. Pacific J. of Math., **120**: 453~467.

[Xiong] Xiong J. 1989. A simple proof of a theorem of Misiurewicz. J. China Univ. Sci. Tech., **19**: 21~24.

[Xiong-Yang] Xiong J and Yang Z. 1990. Chaos caused by a topologically mixing map.// World Sci. Adv. Ser. Dyn. Syst., **9**: 550~572.

[Yang] Yang R. 2004. Topological sequence complexity and mixing. Chinese Ann. Math. Ser. A, **25**(6): 809~816.

[Yang] Yang R. 2005. Collection of infinite difference sets and its application. (Chinese) Acta Math. Sinica, **48** (3): 457~464.

[Ye] Ye X. 1992. D-function of a minimal set and an extension of Sharkovskii' theorem to minimal set. Ergod. Th. and Dynam. Sys., **12**(2):365~376.

[Ye] Ye X. 1993. Minimal dynamical system with a given D-function and a topological entropy. Ukran. Math. Z., **45**: 287~292.

[Ye] Ye X. 1995. Topological entropy of the induced map of the inverse limit space. Topology Appl., **67**: 113~118.

[Ye-Zhang] Ye X, Zhang G H., Entropy points and applications. to appear in Trans. Amer. Math. Soc..

[Zhang] Zhang G H. 2006. Relative entropy, asymptotic pairs and chaos. J. Lonon Math. Soc., **73**: 157~172.

[Zhang] Zhang Q. 1992. Sequence entropy and mild mixing. Can. J. Math., **44**(1): 215~224.

[Zhang] Zhang Q. 1993. Conditional sequence entropy and mild mixing extensions. Canad. J. Math., **45** (2): 429~448.

[Zhou] Zhou Z. 1986. A proof of small conjecture on topological entropy. Sci. Sinica Ser. A,**29**(3): 254~264.

[Ziegler] Ziegler T. 2005. Universal characteristic factors and Furstenberg averages. Accepted for publication in the Journal of the AMS.

[Zimmer] Zimmer R J. 1976a. Extensions of ergodic group actions. Illinois J. Math., **20**(3): 373~409.

[Zimmer] Zimmer R J. 1976b. Ergodic actions with generalized discrete spectrum. Illinois J. Math., **20**(4): 555~588.

[张筑生] 张筑生. 1999. 微分动力系统原理. 北京: 科学出版社.

[张景中等] 张景中, 熊金城. 1992. 函数迭代与一维动力系统. 成都: 四川教育出版社.

[周作领] 周作领. 2001. 符号动力系统. 北京: 科学出版社.

索　引

W

X

Y

Z

其他

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著

29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著

63　调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著
64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德、郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66　拓扑空间中的反例　2000.6　汪林、杨富春　编著
67　拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68　非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69　序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70　动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军、张祥、董梅芳　编著
71　随机分析学基础（第二版）　2001.3　黄志远　著
72　非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚、马军海　著
73　高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎、陆传荣、张立新　著
74　数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75　光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76　动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77　神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯、顾凡及、蔡志杰　编著
78　同调论——代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79　金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80　排队论基础　2002.10　孙荣恒、李建平　著
81　算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川、崔建莲　著
82　微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83　周期小波及其应用　2003.3　彭思龙、李登峰、谌秋辉　著
84　集值分析　2003.8　李雷、吴从炘　著
85　数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86　强偏差定理与分析方法　2003.8　刘文　著
87　椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群、尹景学、王春朋　著
88　有限典型群子空间轨道生成的格（第二版）　2003.10　万哲先、霍元极　著
89　调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版）　2004.3　苗长兴　著
90　稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91　发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92　传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩、周义仓、王稳地、靳 祯　著
93　模李超代数　2004.9　张永正、刘文德　著
94　巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用　2005.1　王玉文　著
95　巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰　著
96　脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林、闫宝强、刘衍胜　著

97 代数学中的Frobenius结构 2005.7 汪明义 著
98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与Banach空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.3 叶向东 黄 文 邵 松 著